

conjugate projectionの理論による差分式の誘導

東北工学部 正 員 佐武正雄
 の東北入学院 学生員 新聞 茂

1. まえがき

一般に、差分法は、微分方程式の数学的近似であり、有限要素法は、連続体の物理的近似と考えられてきたが、近年、有限要素法の理論的うらづけが進むにつれて、有限要素法も連続体の数学的モデルの一つとみなされるようになってきた。微分方程式を直接差分化せずにポテンシャル・エネルギーを汎関数に選び、変分問題の差分法による解法を応用し、不規則な mesh 上の差分式を誘導する試みが Griffin 等によって行なわれており、この方法は、有限要素法と差分法の混合的方法と考えられる。

本文では、有限要素法への応用を目的として、J. T. Oden によって提案された conjugate projection の理論を応用して差分式を誘導し、考察したものである。

2. Conjugate projectionの理論

この理論は、広義の有限Fourier級数の概念を conjugate な関数空間を用いることによって、非直交関数系による級数展開に一般的に拡張し、Hilbert 空間内の元 $f \in H$ を合理的に近似することを目指すとしたものである。互いに conjugate な関数空間をなす力学量の例としては、変位と荷重、応力と歪の関係などが考えられる。J. T. Oden は、この理論と有限要素法の定式化や応力マトリックスから求められた個々の要素の境界で不連続な応力場から変位分布と consistent な応力場を得るために利用している。ここでは、主として conjugate projection による関数方程式の離散化について説明する。 n 次元 Euclid 空間内の境界 ∂R をもつ領域を R とし、 $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ は、領域 R 上の任意の一点を表わすものとする。今、領域 R 上の Hilbert 空間 H を 2 つの部分空間 H と H' に分離するために、 H から部分空間 H の基底を構成する G 個の独立な関数 $\varphi_\alpha(x)$ ($\alpha = 1, 2, \dots, G$) を選ぶ。 H の Gram 行列は、

$$C_{\alpha\beta} = \int_R \varphi_\alpha(x) \varphi_\beta(x) dx \triangleq \langle \varphi_\alpha(x), \varphi_\beta(x) \rangle \quad (2.1)$$

によって定義される。 $C_{\alpha\beta}$ の逆行列

$$C^{\alpha\beta} = (C_{\alpha\beta})^{-1} \quad (2.2)$$

を用いれば、 $\varphi_\alpha(x)$ と conjugate な関数系 $\varphi^\alpha(x)$ ($\alpha = 1, 2, \dots, G$) は

$$\varphi^\alpha(x) = C^{\alpha\beta} \varphi_\beta(x) \quad (2.3)$$

によって導びくことができる (β について和をとるものとする。以下同様)。 $\varphi^\alpha(x)$ は、 H と conjugate な空間 H' の基底であり、 H' は、 H と conjugate な空間 H' の部分空間となる。 (2.3) 式より H は、 self-conjugate な関数空間であり、 H と H' は、空間として同一と考えられる。 (2.2), (2.3) 式より、

$$\langle \varphi_\alpha, \varphi^\beta \rangle = \delta_\alpha^\beta \quad (2.4)$$

となり、 $\varphi_\alpha(x)$ と $\varphi^{\alpha'}(x)$ は、双対基の関係にある。任意の H の関数 $F(x)$ は、 Ω と H' の要素の和

$$F(x) = \bar{F}(x) + \hat{F}(x) \quad (2.5)$$

として表現することが出来る。ここに $\bar{F}(x) \in \Omega$, $\hat{F}(x) \in H'$ である。したがって H を Ω へ写像する projection operator Π を定義することが出来る。すなわち

$$\Pi F(x) = \bar{F}(x) = F^\alpha \varphi_\alpha(x) = F_\alpha \varphi^\alpha(x) \quad (2.6)$$

$$\text{ただし} \quad F_\alpha = \langle F, \varphi_\alpha \rangle, \quad F^\alpha = \langle F, \varphi^\alpha \rangle \quad (2.7)$$

である。 $\bar{F}(x)$ は、最小2乗の意味で、 Ω における $F(x)$ の最良近似を表わしている。(2.5)(2.6)(2.7)より

$$\langle \hat{F}, \varphi_\alpha \rangle = \langle F - \bar{F}, \varphi_\alpha \rangle = 0 \quad (2.8)$$

$$\langle \hat{F}, \varphi^\alpha \rangle = \langle F - \bar{F}, \varphi^\alpha \rangle = 0 \quad (2.9)$$

であるから H' は、 Ω の直交補空間である。次に $\mathcal{L}$ を線形作用素とし、関数方程式

$$\mathcal{L} F(x) = G(x) \quad (2.10)$$

を考察する。 $\mathcal{L}$ と Π が、可換であるものとし projection operator の 冪等性を考慮すれば、(2.10) 式は、(2.6)(2.7)式を用いて

$$(F^\alpha L_{\alpha\beta} + G_\beta) \varphi^\beta = 0 \quad (2.11)$$

と記すことが出来る。ここに $F^\alpha = \langle F, \varphi^\alpha \rangle$, $L_{\alpha\beta} = \langle \mathcal{L} \varphi_\alpha, \varphi_\beta \rangle$, $G_\beta = \langle G, \varphi_\beta \rangle$ である。 φ^β の一次独立性を考慮して(2.11)式から連立方程式

$$F^\alpha L_{\alpha\beta} + G_\beta = 0 \quad (2.12)$$

を得る。conjugate projection の理論による関数方程式の離散化は、本質的には、Galerkin 法と同等であることを容易に示すことが出来る。

3. conjugate projection の理論による差分式の誘導

差分式は、Hilbert 空間 H の微分作用素を離散化したものである。conjugate projection の理論によれば、Hilbert 空間 H の作用素を離散化することは、その部分空間 Ω へ近似的に作用素を表現することと考えられる。したがって部分空間 Ω の性質を決定する基底 φ_α ($\alpha=1, 2, \dots, G$) を適当に選び conjugate projection の理論を用いて差分式を誘導することが出来るものと思われる。読み及び分布荷重をそれぞれ $w(x)$, $p(x)$ とするとき、はりの微分方程式

$$EI \frac{d^4 w}{dx^4} = p(x) \quad (3.1)$$

を例として conjugate projection の理論による差分式の誘導について説明する。表-1 は、差分式の誘導に用いる補間関数を一般内点、固定端、単純支持端、自由端の各場合について示したもので、 $\varphi_j^{(i)}$ は、微係数 $\left. \frac{d^i w}{dx^i} \right|_{x_j}$ に対する補間関数を表わしている。はり長 l で、等分割されているもの

一般内点	固定端
$\varphi_2 = \frac{1}{24k^3}(2k^3x - k^2x^2 - 2kx^3 + x^4)$ $\varphi_1 = \frac{1}{6k^2}(-4k^3x + 4k^2x^2 + kx^3 - x^4)$ $\varphi_0 = \frac{1}{4k^2}(4k^4 - 5k^2x^2 + x^4)$ $\varphi_1 = \frac{1}{6k^2}(4k^3x + 4k^2x^2 - kx^3 - x^4)$ $\varphi_2 = \frac{1}{24k^3}(-2k^3x - k^2x^2 + 2kx^3 + x^4) \quad (3.2)$	$\varphi_1 = \frac{1}{36k^3}(-34k^3x + 24k^2x^2 + 16kx^3 - 11x^4)$ $\varphi_1^{(1)} = \frac{1}{6k^2}(-2k^3x + k^2x^2 + 2kx^3 - x^4)$ $\varphi_0 = \frac{1}{2k^2}(2k^4 + k^3x - 3k^2x^2 + kx^3 + x^4)$ $\varphi_1 = \frac{1}{4k^2}(2k^3x + 3k^2x^2 - x^4)$ $\varphi_2 = \frac{1}{18k^3}(-k^3x - k^2x^2 + kx^3 + x^4) \quad (3.3)$
単純支持端	自由端
$\varphi_1 = \frac{1}{66k^4}(-34k^3x + 39k^2x^2 + kx^3 - 6x^4)$ $\varphi_1^{(1)} = \frac{1}{22k^3}(2k^3x - k^2x^2 - 2kx^3 + x^4)$ $\varphi_0 = \frac{1}{22k^3}(22k^4 - k^3x - 27k^2x^2 + kx^3 + 5x^4)$ $\varphi_1 = \frac{1}{22k^3}(14k^3x + 15k^2x^2 - 3kx^3 - 4x^4)$ $\varphi_2 = \frac{1}{66k^4}(-5k^4x - 3k^3x^2 + 5k^2x^3 + 3x^4) \quad (3.4)$	$\varphi_0 = \frac{1}{14k^4}(-15k^3x + x^4)$ $\varphi_0^{(1)} = \frac{1}{14k^3}(-6k^3x + 7k^2x^2 - x^4)$ $\varphi_0^{(2)} = \frac{1}{42k^2}(-4k^3x + 7k^2x^2 - 3x^4)$ $\varphi_1 = \frac{1}{7k^4}(8k^3x - x^4)$ $\varphi_2 = \frac{1}{14k^4}(-k^3x + x^4) \quad (3.5)$

表 - 1

とする。(3.2)式は、Lagrangeの補関函数、又(3.3)~(3.5)式は、微係数に対する補関も行っており Hermite の補関函数と呼ばれる。図-1 は、例として補関函数(3.2)を示したものである。(2.10)式から(2.12)式を導いたと同様にして (3.1)式から conjugate projectionを用いて

$$W^\alpha \langle EI \frac{d^4}{dx^4} \varphi_\alpha, \varphi_\beta \rangle - p_\beta = 0 \quad (3.6)$$

を得る。ここに $W^\alpha = \langle w, \varphi^\alpha \rangle$, $p_\beta = \langle p, \varphi_\beta \rangle$ である。

φ_α , ($\alpha = -2, -1, 0, 1, 2$) として(3.2)式を用い, $\beta = 0$ とすれば, 一般内点における差分式

$$W^{-2} - 4W^{-1} + 6W^0 - 4W^1 + W^2 = \frac{15b^4k^3}{8EI} \quad (3.7)$$

を求めることができる。同様に補関函数(3.3)~(3.5)

を用いれば, それぞれ, 固定端, 単純支持端, 自由端に対する差分式は

$$-11W^{-1} - 6k\dot{W}^{-1} + 18W^0 - 9W^1 + 2W^2 = \frac{45bk^3}{16EI} \quad (3.8)$$

$$-2W^{-1} + k^2\ddot{W}^{-1} + 5W^0 - 4W^1 + W^2 = \frac{55k^3}{32EI} \quad (3.9)$$

$$W^0 - k^2\ddot{W}^0 - k^3\dddot{W}^0 - 2W^1 + W^2 = \frac{35k^3}{32EI} \quad (3.10)$$

となる($\dot{W}^{-1}$ は, $\frac{dW}{dx}|_{x=-l}$ を示す。他も同様)。

(3.7)~(3.10)式で等分布荷重(p =一定)を受けるとす

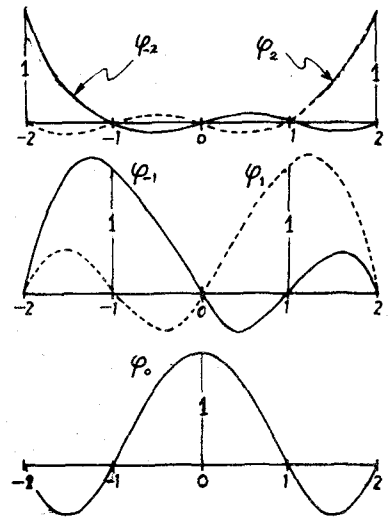


図 - 1

※) れば、それぞれ、文献(8)の差分式での等分布荷重を受ける場合に一致する。(3.6)式の分布荷重を高次の関数で近似することも考えられ、例えば、 p を 2 次関数で近似し

$$p(x) = p^\alpha \psi_\alpha(x), (\alpha = -1, 0, 1) \quad (3.11)$$

$$\text{ここに} \quad \psi_{-1} = \frac{1}{2h^2}(-hx+x^2), \quad \psi_0 = \frac{1}{h^2}(h^2-x^2), \quad \psi_1 = \frac{1}{2h^2}(hx+x^2) \quad (3.12)$$

とすれば、(3.7)式は

$$W^2 - 4W^1 + 6W^0 - 4W^{-1} + W^{-2} = \frac{h^4}{7EI}(-10P^1 + 27P^0 - 10P^{-1}) \quad (3.13)$$

となり、分割点での荷重に関する係数が、文献(8)の差分式と異なったものとなる。

4. あとがき

(3.6)式は、(3.1)式を π^* へ conjugate projection したものであるが、 π 上へ conjugate projection することも考えられ、この場合には、通常の差分式と同一の結果を得ることが出来る。ほりの場合、(3.1)式の特解と変位の間に成立する関係と(3.7)~(3.10)式の左辺のウェイトを用いて、任意の荷重に対して厳密に成立する差分式を誘導することも可能であるが、ここでは、その詳細は、省略する。本文の方法は、Lagrange 及び Hermite の補間関数を用いているので、分割点が、不等間隔である差分式や、板の解析などに用いる差分式も同様に導くことが可能と思われる。

※) 等分布荷重 p を受ける場合は、 $P_0 = p \int_{-2h}^{2h} \varphi_0 dx = \frac{8}{15} p h^2$ であるから、たとえば(3.7)式は $W^2 - 4W^1 + 6W^0 - 4W^{-1} + W^{-2} = \frac{p h^4}{EI}$ となる。

参考文献

- 1) Olivera, E.E.A : Theoretical Foundations of the Finite Element Method, Inter. J. Solids and Structures, Vol.4, 1968, P.929-952
- 2) Fraeijns de Veubeke, B.M., : Upper and Lower Bounds in Matrix Structural Analysis, in B.M. Fraeijns de Veubeke(ed.), Matrix Methods of Structural Analysis, Pergamon Press, 1964
- 3) Oden, J.T. : Some Aspects of Recent Contributions to the Mathematical Theory of Finite Elements, Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design, Univ. of Alabama in Huntsville Press, P.3-38, 1972
- 4) Courant, R. and Hilbert, D. : Methoden der Mathematischen Physik I, Springer-Verlag, 1931
- 5) Griffin, D.S. and Kellogg, R.B. : A Numerical Solution for Axially Symmetrical and Plane Elasticity Problems, Int. Solids and Structures, Vol.3, P.781-794, 1967
- 6) Brauchli, H.J. and Oden, J.T. : Conjugate Approximation Function in Finite Element Analysis, Quart. Appl. Math., Vol.29, No.3, P.65-90, 1969
- 7) Oden, J.T. : Finite Elements of Nonlinear Continua, MacGraw-Hill, 1972
- 8) 佐武正雄 : はりの高精度差分式について, 土木学会論文報告集, 165, P.53-58, 1969
- 9) Yoshida, K. : Functional Analysis, Springer-Verlag, 1967