

1. まえがき

通常の弾性理論では歪や応力はその微視的な変動を平均化した巨視的な量として扱われるが、材料の不均一性が問題となる場合には、変形状態を表わすのに平均的な歪の他に微視的変動に対応する量が必要になると考えられる。近來このような微視的な量を幾何学的な立場で捉えることにより、転位論や降伏の理論の研究が進められ⁽¹⁾⁻⁽⁶⁾、又材料内部の介在物などにより生ずる固有応力や不均一な温度応力の解析にも応用されている。⁽⁷⁾⁻⁽⁹⁾ ここでは弾性変形に対し微視的な不均一性を伴う材料—微視的不均質材料⁽¹⁰⁾—を対象とし、これに固有応力の影響も含めた微視的変動の幾何学的表現方法について述べる。

2. 弾性的な歪と応力

平均的、巨視的な歪と応力をそれぞれ $\bar{\epsilon}_{ij}, \bar{\sigma}^{kl}$ で表わすと、両者の間には巨視的な Hooke の法則

$$\bar{\epsilon}_{ij} = C'_{ijkl} \bar{\sigma}^{kl} \quad (1)$$

が成立する。ここに C'_{ijkl} は材料試験により得られる巨視的な定数であり、これは微視的な不均一性が平均化されて無視されるような充分大きな材料要素に於て求められる。ところで歪や応力の変動を観察されるような材料内部の微視的要素に対応する歪と応力を $\epsilon_{ij}, \sigma^{kl}$ で表わすならば両者の間には C_{ijkl} は材料内部で変化する微視的弾性定数として次の微視的な Hooke の法則が成立する。

$$\epsilon_{ij} = C_{ijkl} \sigma^{kl} \quad (2)$$

(2) 式の両辺の平均をとり、 $\Delta C_{ijkl}, \Delta \sigma^{kl}$ をそれぞれの平均値からのずれとすると

$$\bar{\epsilon}_{ij} = \overline{C_{ijkl} \sigma^{kl}} = \overline{C_{ijkl}} \bar{\sigma}^{kl} + \overline{\Delta C_{ijkl} \Delta \sigma^{kl}} \quad (3)$$

となり、右辺の第 2 項は必ずしも零とならないので、一般に $\overline{C_{ijkl}} \neq C'_{ijkl}$ である。⁽¹¹⁾

3. 微視的素片への分解と計量テンソル

変形を受ける前の材料の「初期状態」に対し、各物質点を直角座標系 x_i で表わすとこの空間の計量テンソルは δ_{ij} (Kronecker のデルタ) である。また変形を受けた状態の座標系は変形後の物質点の座標値が初期状態のそれに一致するように Lagrange 座標系で表わすこととする。今、初期状態に於ける材料内部に一種の不均一性があるために生ずると考えられる固有応力が含まれているとすると、この材料を前節に述べたような微視的要素に切り出して分解すると、各微視的素片には固有応力を打消すような歪 ϵ_{ij} が生じて、計量テンソルが

$$b_{ij} = \delta_{ij} + 2 \epsilon_{ij} \quad (4)$$

となるような「自然状態」に落ち着く (naturalization^(12, 13, 14))。そこで本文ではこの自然状態の各微視的素片に対し平均応力 $\bar{\sigma}^{kl}$ を加えた状態を考える。応力 $\bar{\sigma}^{kl}$ に応じて微視的素片は歪 ϵ_{ij} を受け

る。この歪 ε_{ij} は

$$\varepsilon_{ij} = c_{ijkl} \bar{\sigma}^{kl} \quad (5)$$

で与えられる*。歪 ε_{ij} , ε_{ij} を受けた微視的素片の計量テンソルを a_{ij} で表わすと

$$a_{ij} = b_{ij} + 2\varepsilon_{ij} = \delta_{ij} + 2(\varepsilon_{ij} + \varepsilon_{ij}) \quad (6)$$

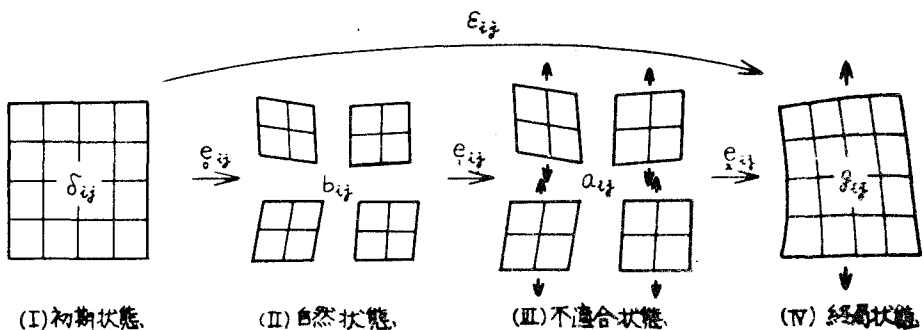
となる。この a_{ij} を計量テンソルとして持つ空間は後述するように一般に不適合度を有し、各微視的素片も互に重なり合いや空隙を生じないように Euclid 空間に並べることができないので、この状態をここでは「不適合状態」と呼ぶことにする。ところで、実際の材料は内部に微視的変動があるにせよ応力 σ^{kl} を受けると微視的変動を含んだ歪 ε_{ij} (ここでは適合歪とする) が生じ、「終局状態」に落着く。この状態の計量テンソルを g_{ij} で表わすと

$$g_{ij} = \delta_{ij} + 2\varepsilon_{ij} \quad (7)$$

となり、これは一般に a_{ij} に一致しない。今、 g_{ij} と a_{ij} の差を歪 ε_{ij} で表わすと

$$g_{ij} = a_{ij} + 2\varepsilon_{ij} \quad (8)$$

で与えられる。上述の変形を受ける材料の各状態の関係を図示すれば下図のようになる。



ε_{ij} には初期状態に含まれる固有応力と材料の微視的な Hooke の法則の不均一性の累積が含まれ、この歪に対して生ずる応力は平均応力からのずれを示す。よって次節以下には主に計量テンソルが a_{ij} で与えられる不適合状態のなす空間と歪 ε_{ij} について考察を行なう。

4. 不適合状態の微視的素片の接続と幾何学的諸量

終局状態の計量テンソル g_{ij} は ε_{ij} が適合歪であることから Euclid 的であり、 g_{ij} より導かれる Christoffel の 3 添字記号を Γ_{ijk}^a で表わす。ところで不適合状態では各素片の計量は与えられているが、接続が与えられていないので、今この空間に終局状態と同じ接続係数 (non-metric connexion^{(2,1), (11)}) を導入し、計量テンソル a_{ij} に Γ_{ijk}^a による共変微分 ∇_k を施すと、これは一般

* 平均応力とは材料試験などに表わされる巨視的な応力、或は平均的な Hooke の法則より理論的に求められる応力とする。従ってこの応力は巨視的に力の平衡条件、境界条件を満している。

に零とならないので、この量を次のように表わす。

$$\forall_k a_{ij} = -Q_{kij} \quad (9)$$

もし不均一性がない場合には $a_{ij} = g_{ij}$ となり、また

$$\forall_k g_{ij} = 0 \quad (10)$$

となることから $Q_{kij} = 0$ である。(8), (9), (10) 式より次式を得る。

$$Q_{kij} = 2 \nabla_k \xi_{ij} \quad (11)$$

この量を用いて Γ_{ik}^l を表わせば、終局状態が Euclid 空間であり換率のないことから

$$\Gamma_{ik}^l = \{i|k\}^l + T_{ik}^l \quad (12)^{11)}$$

となる。ここに $\{i|k\}^l$ は a_{ij} より導かれる Christoffel の 3 添字記号であり、 T_{ik}^l は

$$T_{ik}^l = \frac{1}{2} a^{lj} Q_{lij|k} \quad (13)^{**}$$

を表わすものとする。 Γ_{ik}^l , $\{i|k\}^l$ より計算される Riemann-Christoffel 曲率テンソルをそれぞれ $R_{min}{}^k$, $K_{min}{}^k$ で表わすと次式を得る。

$$\begin{aligned} R_{min}{}^k &= K_{min}{}^k + 2 \nabla_{[m} T_{n]i}{}^k + 2 T_{[m|i}{}^k T_{n]j}{}^i \\ &= K_{min}{}^k + 2 \nabla_{[m} T_{n]i}{}^k - 2 T_{[m|i}{}^k T_{n]j}{}^i \end{aligned} \quad (14)^{11)}$$

但し ∇ は $\{i|k\}^l$ に関する共変微分を表わすものとする。ところが終局状態は Euclid 空間であるので

$$R_{min}{}^k = 0 \quad (15)$$

であり、従って $K_{min}{}^k$ は次式のように表わされる。

$$K_{min}{}^k = -2 \nabla_{[m} T_{n]i}{}^k + 2 T_{[m|i}{}^k T_{n]j}{}^i \quad (16)$$

(11), (13) 式より

$$T_{ik}^l = a^{lj} \nabla_{[i} \xi_{j]k} \quad (17)$$

となるので、 $K_{min}{}^k$ は ξ_{ij} によって定まる量である。特に歪の 2 次以上の微小量を無視すると

$$K_{mn}{}^k = K_{min}{}^k a_{jk} \div -\frac{1}{2} (\partial_l \partial_m \xi_{nk} + \partial_k \partial_n \xi_{ml} - \partial_l \partial_n \xi_{mk} - \partial_k \partial_m \xi_{nl}) \quad (18)$$

となる。 $K_{mn}{}^k$ はまた ξ_{ij} の代りに $\xi_{ij} + \xi_{ji}$ を用いても (18) 式と類似の式により表わすことができる。

** $\psi_{ijk} = \psi_{ij|k} - \psi_{jk|i} + \psi_{ki|j}$ を表わすものとする。"

5. 不均一性と不適合度について

3節に定義した ε_{ij} が零ならばこれは不適合状態が終局状態に一致することを意味し、微視的不均一性はないことになる。又、前節の Q_{kij} が零ならば $\forall \varepsilon_{ij} = 0$ であるが、これは不適合状態にある各素片全てに一樣な歪をかけて終局状態に移すことを意味し、このような歪が生ずる際には巨視的にもある平均的な応力が作用しなければならないが、不適合状態には既に最終状態の平均応力が与えられているので、結局この場合も $\varepsilon_{ij} = 0$ と同様であると考えられる。前節における K_{inik}^* は不適合状態のなす空間に Levi-Civita の平行性を導入した場合の Riemann-Christoffel 曲率であるが、これは又(18)式などより分かるように、歪 ε_{ij} の不適合度を表わす量と考えられる。従って不適合状態より終局状態に至る変形は一般に不適合変形である。もし $K_{inik}^* = 0$ ならば初期状態には固有応力がなく $\varepsilon_{ij} = 0$ であり、 ε_{ij} が適合条件を満たすことから ε_{ij} も適合条件を満たし、 σ_{ij} は既に平衡状態にあり又 Hooke の法則も満たされているので、結局不適合状態は終局状態になると考えられる。従って不適合状態の Riemann-Christoffel 曲率が材料内部の不均一性の連続的な表現であると考えられる。以上のことから歪 ε_{ij} は Riemann-Christoffel 曲率のある不適合状態 (Riemann 空間) を適合状態である終局状態 (Euclid 空間) におしつけるために生じる歪に相当し、不均一性を含まない材料では不適合状態の Riemann-Christoffel 曲率がなくこのような歪を生いしないと言うことができる。

6. あとがき

本文では材料の初期状態に含まれる固有応力や、弾性変形を受ける際の材料の不均一的な挙動を捉えるために幾何学的な考察を行なったが、5節にも述べたように、材料の不均一性がある場合には巨視的な解析には考慮されないような歪が生ずることになり、この歪は特に材料の強度に密接な関係があると思われるので、今後もこれらの研究を進めたいと考えている。

参考文献

- 1) 近藤一夫：変形の幾何学，岩波講座，現代応用数学 (1957)
- 2) Kröner, E.: Kontinuumstheorie der Versetzungen und Eigenspannungen, Springer-Verlag Berlin Göttingen Heidelberg (1958)
- 3) Kondo, K.: On the Fundamental Equations of the Macroscopic Mechanical Behaviour of Microscopically Non-Uniform Materials, RAAG Memoirs 1 (1955), 470-483
- 4) Amari, S.: On Some Primary Structures of Non-Riemannian Plasticity Theory, RAAG Memoirs 3 (1962), 163-172
- 5) Kishino, Y.: Yield Criterion Derived through the Consideration of Plastic Deformations with Couple-Stresses, Tech. Rep. Tohoku Univ. 37, 1 (1972), 61-68
- 6) 佐武, 岸野：微視的な自由度を考慮した材料の性質について, 土木学会第27回年次学術講演会講演概要集 I-95 (1972)
- 7) Bilby, B. A. et al.: Continuous Distributions of Dislocations VI. Non-metric Connexions, Proc. Roy. Soc. A292 (1966), 105-121
- 8) Anthony, K. H.: Die Reduktion von nichteuklidischen geometrischen Objekten in eine euklidische Form und physikalische Deutung der Reduktion durch Eigenspannungszustände in Kristallen, Arch. Rat. Mech. Anal. 37 (1970), 161-180
- 9) Anthony, K. H.: Die Theorie der nichtmetrischen Spannungen in Kristallen, Arch. Rat. Mech. Anal. 40 (1971), 50-78
- 10) Volkov, S. D.: Statistical Strength Theory, Gordon and Breach (1962)
- 11) Schouten, J. A.: Ricci-Calculus, Springer-Verlag (1954)