砂の排水時および非排水時における変形定数

東北大（院） 諸戸靖史

土の変形を圧縮とセン断にわけ，さらに排水と非排水とに区別して考えるのは土質力学の伝統である。セン断変形は有効応力表示を用いて排水と非排水で区別のない同じ式で整理されるが，体積変形の場合はかなり事情が異ってくる。我々は土の変形定数を知って地盤の工学的諸問題を取り扱うわけであるが，土の変形を記述するには最低3個の変形定数が必要であろう。すなわち，体積変形係数 C ダイレイタンシー係数 D，剛性率 G の3つである。筆者は，従来の土の変形係数のとりあつかい方に何か不明確なものを感じていたが，最初に等方性の場合につき，その適用性と限界につき論じ，さらに異方性を考慮した土の変形および変形定数の評価の重要性に触れよう。

線形等方性材料は2個の独立な変形定数でその材料の工学的性質が定まる。したがって，通常，土は3個の変形定数を最低必要とするのであるから，等方線形の仮定で土の変形を記述することは不充分となる。この欠点にもかかわらず，等方線形理論は実用上の便利さと簡単さからよく用いられる。まず，排水状態を考えよう。土要素の体積変化は一応次のように書ける。応力・ヒズミは圧縮を正。

$$v = \frac{\Delta V}{V} = C \cdot p + D \cdot \tau \qquad (1)$$

ここで，$v = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$，$p = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$，$\tau = \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$

みかけの体積圧縮係数 $1/K^* = v/p$ とする。すなわち，

$$1/K^* = C + D \cdot \zeta \quad , \quad \zeta = \tau/p \qquad (2)$$

等方弾性理論から，ポアソン比 ν は，$\nu = \frac{1}{2}\left\{1 - \frac{3G/K}{3 + G/K}\right\}$ となる。この類推から，土要素のみかけのポアソン比 ν^* は

$$\nu^* = \frac{1}{2}\left\{1 - \frac{3G/K^*}{3 + G/K^*}\right\} = \frac{1}{2}\left\{1 - \frac{3G(C + D \cdot \zeta)}{3 + G(C + D \cdot \zeta)}\right\} \qquad (3)$$

式(3)において $D \cdot \zeta = C - 3/5G$ ならば $\nu^* = \frac{1}{2}$ となる。この場合，線形弾性理論（等方）における縦波の速度は無限大となるが現実には，このようなことは起りえないのである。$D \cdot \zeta > C - \frac{3}{5G}$ の場合，$\nu^* > 1/2$ となる。線形弾性理論においては，エネルギー論的考察から $-1 < \nu < 1/2$ が求められているから，どうも $\nu^* > \frac{1}{2}$ の場合，すなわち正のダイレイタンシーがある程度生じてくると，等方弾性理論は使いずらくなってくることがわかる。

次に非排水の場合はどうであろうか，今，飽和した土要素に p と水が作用しているとしよう。では土の骨格により，また，p は土の骨格と中に含まれる間ゲキ水の圧力 u によりバランスが保たれているとする。水の圧縮率を C_w とし，土要素内の水の部分 nV の縮み（n：間ゲキ率）と骨格部の縮み

が等しいと考えると，よく知られているように，

$$n C_w u = C(p-u) + D'\cdot\tau \qquad D'\text{：非排水試験時のD} \tag{4}$$

ここで，$D' \fallingdotseq D$として間ゲキ水圧を求めると，

$$u = \frac{C\cdot p + D\cdot\tau}{C + nC_w} \tag{5}$$

土要素の骨格の圧縮率C_wを比べると，$C \gg C_w$であるから

$$u \fallingdotseq p + \frac{D}{C}\cdot\tau \tag{6}$$

このuによる土要素の体積の縮みを体積ヒズミで表わすと，$v = nC_w\left(p + \frac{D}{C}\cdot\tau\right)$

$$\therefore \quad \frac{1}{K'} = \frac{p}{v} = nC_w\left(1 + \frac{D}{C}\cdot\tau\right) \tag{7}$$

となる。ここに，ここ非排水時における体積圧縮係数である。式（ ）にしたがって非排水時におけるポアソン比ν'を求めてみると，

$$\nu' = \frac{1}{2}\left\{1 - \frac{3G(1+\frac{D}{C}\tau)C_w}{3+G(1+\frac{D}{C}\cdot\tau)C_w}\right\} \tag{8}$$

となる。水の圧縮率は20℃でほぼ48×10^{-6} $\mathrm{cm^2/kg}$であり，土の剛性率Gは通常$10^{1\sim3}$ $\mathrm{kg/cm^2}$のオーダーにあるから，

$$\nu' = \frac{1}{2}\left\{1 - G\left(1+\frac{D}{C}\cdot\tau\right)nC_w\right\} \tag{9}$$

と簡単になる。この式から，土のセン断剛性の大なるほど，また同一のセン断剛性を有するならばDが大きいほど，すなわちダイレイタンシーによる圧縮性が大きいほど，ポアソン比がわずかばかりであるが，0.5より小さくなることがわかる。いま，$D\cdot\tau \fallingdotseq 0$とできるならば，式(9)は

$$\nu' = \frac{1}{2}\left\{1 - nC_w G\right\} \tag{10}$$

となり，石原[1]が導いたものと一致する。そして，飽和土のポアソン比は0.50以下～0.47程度の値をとることが知られている。ここで間ゲキ比が0.5～1.0の飽和土における縦波の速度はほぼ，1.7 Km/sec～1.5 Km程度と計算できる。

今までみてきたように，正のダイレイタンシーがあまり大きくない場合は線形弾性体(等方)としての土の変形の記述がなんとか可能であることがわかる。たとえば，地盤の弾性波探査による地盤の定数は地下水面上であればP波とS波から，地下水面下であればS波と式(10)から求められることがわかる。また，土の骨格の圧縮率が水のそれより非常に大きい場合の地下水面の位置，あるいは存在を確認するために式(10)が用いられよう。これは，S波の速度が地下水面の存在にかかわらず地盤の剛さと良い相関を示すが，P波の速度は地下水面下では一様になる傾向にあり，それもポアソン比が0.5に近く取るようになることがわかるからである。最近，Well-Shooting法により測定されたS波の速

度から微少変形時のGを計算した資料が集収されつつある。それらによると，G−N（N:動的貫入試験の値）関係は地盤の種類による明瞭なる相違がないことが見い出されている。丹羽ら[2]は，ちゅう積層，洪積層，才三紀層(土丹)について，G−N関係を次のように報告している。

$$G = aN^{b} \qquad (a = 139,\ b = 0.72) \qquad [kg/cm^2] \qquad (11)$$

このような実験式は実用上非常に価値がある。しかし，こまかいことをいえば，たとえ地盤を歴史の新しい砂層にかぎってみた場合でも，式(11)の指数bは$N=15\sim20$付近で変った値をとるものと筆者は考えている。式の意味を考えて，実験式を用いることは，N値の本性が明らかになるまでまたなければならないことはいたしかたないのである。

室内においても，土供試体のセン断変形係数は，波動法，共振法，各種セン断試験機で測定される。Silverら[3]は動的解析に用いる目的で砂の動的単純セン断試験を行ない

$$G = K(p')^{m} \qquad (12)$$

で整理している。ここに，Kは指数mと相対密度によって変る係数で，mはヒズミの大きさにより変化する指数である。また，p'は有効平均応力である。ヒズミが小さいときは $m \fallingdotseq 1/2$ となることはよく知られている。ヒズミがしだいに大きくなるとmの値は1に近ずく。またHardin & Drnevich[4]はヒズミを用いて

$$\frac{G}{G_{max}} = \frac{1}{1+\frac{\gamma}{\gamma_r}\left(1-0.5e^{-0.16\frac{\gamma}{\gamma_r}}\right)}, \qquad G_{max} = \tau_{max}/\gamma_r \qquad (13)$$

を実験的に導いている。柴田[5]もヒズミと初期の係数G_0を用いて，

$$G = \frac{G_0\cdot\sqrt{p}}{\sqrt{p}+10^{3}\cdot\gamma} \qquad (14)$$

を提案している。

また，微少変形時には間ゲキ水圧がGに与える影響および動的な方法と静的な方法で求められたGの異いは少いものとされている。

静的な砂の排水三軸圧縮試験において，諸戸[6]はセン断変形に対する双曲線表示式の有用性を示し，

$$G_t = G_0(1 - k/k_m)^2 \qquad \text{接線係数} \qquad (15)$$

$$G_s = G_0(1 - k/k_m) \qquad \text{割線係数} \qquad (16)$$

とできることを報告している。ここに，$k = \tau/p$，$\tau = \sigma_1 - \sigma_3$，$k_m = k_{max}$

このようにに，目的や用途に応じて，各種の表示の仕方が考えられているが，一般のセン断変形を記述できる形式はいまだ現われていない。

* * * * * * * * * * * * *

最初に土の変形を等方性材料に準じて取り扱った。しかし，土は決して等方ではなく，異方性[7]，ダイレイタンシー特性を示し，その挙動も極めて非線形である。それゆえ，等方非線形(柴田，佐藤)，異方非線形(諸戸)[8]

異方性非線形（Holbec[9]，諸戸[10]）を考慮したとりあつかいを必要とする。ここでは，線形異方性材料の圧縮性および間ゲキ水圧特性を簡単な場合について議論する。今後，異方性を考慮することにより，土のダイレイタンシー，土の体積変化特性，間ゲキ水圧係数などの問題で，従来の等方性の行き方でカバーできなかった点を補うことができると考えられる。ちなみに，三軸圧縮試験の場合を調べよう。

$$\varepsilon_a = \frac{1}{E_a}\sigma_a - \frac{2\nu_{ra}}{E_r}\sigma_r \qquad (17)$$

$$\varepsilon_r = -\frac{\nu_{ar}}{E_a}\sigma_a + \frac{1-\nu_{rr}}{E_a}\sigma_r \qquad (18)$$

σ_a：軸圧，σ_r：側圧
ε_a：軸ヒズミ，ε_r：側方ヒズミ
E_i：変形係数
ν_{ij}：ポアソン比

と書く。等方圧 $\sigma_a = \sigma_r = \sigma$ で圧縮した場合 式（ ）の C は

$$C = \frac{1}{E_a} + \frac{2}{E_r} - 2\left(\frac{\nu_{ar}}{E_a} + \frac{\nu_{ra}+\nu_{rr}}{E_r}\right) \qquad (19)$$

いま，$p = \frac{1}{3}(\sigma_a + 2\sigma_r)$ を一定にした場合の式（ ）における D を求めてみると

$$D = 2\left(\frac{1}{E_r} - \frac{1}{E_a}\right) + 2\left(\frac{2\nu_{ar}}{E_a} - \frac{\nu_{ra}}{E_r} - \frac{\nu_{rr}}{E_r}\right) \qquad (20)$$

次に，式（ ）と同様にして，間ゲキ水圧を求めてみると

$$u = p + \frac{D}{C}\cdot\tau \qquad (21)$$

または，

$$u = \sigma_r + \frac{\frac{1}{E_a} - \frac{2\nu_{ar}}{E_a}}{C}(\sigma_a - \sigma_r) \qquad (22)$$

この式(22)における，$A = \dfrac{\frac{1}{E_a} - \frac{2\nu_{ar}}{E_a}}{C}$ は Skempton の間ゲキ水圧A係数[11]に対応するものである。

$$A = \frac{n - 2\nu_{ar}}{n + 2 - 2(n\nu_{ar} - \nu_{ra} - \nu_{rr})}, \quad n = \frac{E_r}{E_a} \qquad (23)$$

このように，Skempton の A係数は異方性のえいきょうも含み三軸圧縮試験では式(23)で示される意味をもつことがわかる。しかし，A係数は，土の外力に対する構造の変化に依存するものであるから，土の構成方程式がかなり確立するまでは，その真の姿を把握することは困難であろう。

* * * * * * * * * * * *

本文では，土の変形係数のとりあつかいにつき，等方材料に準ずる場合と異方性を考慮する場合につき，簡単に述べた。

筆者に研究の機会を与え，御援助ねがっている河上房義教授に心からお礼の念を表わします。

参考文献

① 石原，土質工学，年次講，札幌，1971，PP 147-151，② 河村ら，土質工学研究発表会，1972，広島，PP.265-268，③ Silver & Seed，ASCE，Vol.97，SM8，PP.1081～1097，1971．④ Hardin & Drnevich，ASCE，SM，Vol.98，PP.667～692，1972，⑤ 柴田徹（1972）非公式．⑥ 諸戸，土質工学会論文報告集投稿中 ⑦ 土質工学会研究発表会，1971，札幌，PP.185-188 ⑧ 諸戸，土木工学論文報告集 投稿中 ⑨ Holbec，ASCE，SM6，1968，PP.1215～1230．⑩ 諸戸，土質工学会論文集，1972，9月号，PP.65-74．⑪ Skempton，Géotechnique，Vol.4，1954，PP.143～147．