任意断面棒中の弾性波の応力分布について

東北工業大学　正員　秋田宏

まえがき

動的設計に関連して、荷重が衝撃的にかかった場合に生じる応力波の、応力分布を知る必要がある。ここでは、線形弾性に範囲を限り、棒の長さが無限である場合の、sin型進行波を扱う。この範囲では、解が解析的に求められているのは、無限板中のいわゆるLamb波と、丸棒中のPochhammerの解だけである。これらについては、分散曲線、変位の分布、応力分布等は容易に求められる。矩形断面となると、特殊な波長、波速に対する解か、又は近似的な解が求められているにすぎない。

Mindlinは、波速がdilatational velocityを越える場合についての解を求めているが、これは分散曲線の最も重要な低次の分枝が欠けていることになる。Medickは、Legendreの多項式を用いた近似により、低次の分枝に対する分散曲線を求めているが、その一次元化の方法に多少の疑問もあり、他の方法による検証が必要であると思われる。

著者は、有限要素法の概念を用いることにより、任意断面形、無限長棒中の弾性波について、分散曲線、変位の分布、応力分布等を求める方法を考案したので、その概要を述べる。

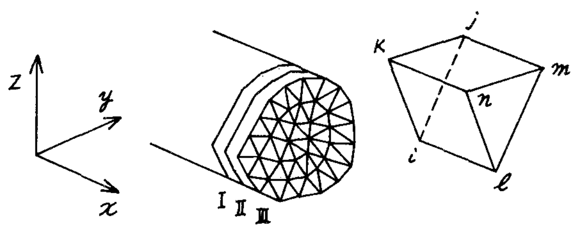
方法の概要

応力波の進行方向をx軸とする、デカルト座標を図の様にとる。Lamb波、Pochhammerの解との類推から、変位は次の様に仮定できる。

$$u = U(y,z)\sin(\omega t - Kx)$$

$$v = V(y,z)\cos(\omega t - Kx)$$

$$w = W(y,z)\cos(\omega t - Kx)$$



ただし、$K = 2\pi/\Lambda$、Λは波長、$\omega = KC$、Cは位相速度。よって、Λを与えると、図のI, II, III断面上において対応する点同志の変位の比は簡単に知られる。図の様な三次元の五面体要素を用い、変位関数を次の様に仮定すれば、各稜上での変位の連続性は保証される訳である。

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z + \alpha_5 xy + \alpha_6 xz$$

$$v = \alpha_7 + \alpha_8 x + \alpha_9 y + \alpha_{10} z + \alpha_{11} xy + \alpha_{12} xz$$

$$w = \alpha_{13} + \alpha_{14} x + \alpha_{15} y + \alpha_{16} z + \alpha_{17} xy + \alpha_{18} xz$$

ここで、x, y, zは五面体の重心を原点とした座標である。少し煩雑な積分計算を行うことにより、18行18列の要素の剛性マトリックスを求めることができる。

各要素がII面上のある点に及ぼす力は、通常の三次元有限要素法の考え方により、I, II, III面上の変位の一次式として与えられる訳であるが、前述の様に結局はII面上の変位のみで表わされることになる。加速度は変位に$-\omega^2$を掛けたものとなるから、運動方程式をマトリックス表示すると、

$$[K]\{u\}-\omega^2[M]\{u\}=0$$

ここで $\{u\}$ はII面の変位成分よりなる変位ベクトル、$[K]$, $[M]$ はそれぞれ剛性マトリックスおよび質量マトリックスであるが、通常の二次元あるいは三次元のものとは多少異なる。上式を解くことは、いわゆる固有値問題であって、固有値として求められた ω より波速が定まって分散曲線が得られ、固有ベクトルとしての $\{u\}$ より、変位の分布、応力の分布が求められる。

問題点および考察

周知のように、剛性マトリックスや質量マトリックスは、節点数の多い場合には圧倒的に0要素の多いマトリックスである。通常の静的な問題や動的な応答の問題においては、0要素を記憶させない方法により、コアメモリーの範囲だけでも、実用に足る分割数まで処理できる。ところが本問題では、固有値を求めなければならないために、方法上の制約がある。例えば、質量マトリックスにいわゆる *consistent mass matrix* を用い、累積法で解くものとすれば、

$$\left([K]^{-1}[M]-\frac{1}{\omega^2}[I]\right)\{u\}=0$$

の様な変形が必要であり、$[K]^{-1}$, $[M]$ のために多数の記憶場所を必要とし、磁気テープ等を使わなければならない。ここで *lumped mass matrix* を用いれば $[M]$ はベクトルとして扱うことができ

$$\left([M]^{-1}[K]-\omega^2[I]\right)\{u\}=0$$

の形に導ける。ここで0要素を使わずに、かつ、小さい固有値から求められる方法があれば、非常に便利な訳である。この点に関しては、なお検討を要するところである。

さらに固有値問題等では、次数が高くなった場合の精度落ちは、深刻な問題である。適切な方法の選択と、収束可能な次数の限界を調べることが重要である。

あとがき

この方法は、本来三次元の波動現象を、z 方向の *sin* 型進行波と仮定して、二次元の問題に引き直し、簡明な原理で解くものである。応力波の問題では、棒の断面がどの様な形をしていても解けるところが、非常に有用であり、波動を扱う他の分野にも広く応用することが可能と思われる。

著者は、上記の方法により、矩形断面、六角形断面等について計算を遂行中であり、近日中にその結果を発表する予定である。

参考文献

1. R.D. Mindlin, E.A. Fox "Vibration and waves in elastic Bars of Rectangular Cross Section" Journ. of Appl. Mech. Vol. 27 1960 P152-158
2. M.A. Medick "On Dispersion of Longitudinal Waves in Rectangular Bars" Journ. of Appl. Mech. Vol. 34 1967 P714-717
3. O.C. ツィエンキーヴィッツ, Y.K. チューン 共著、吉識雅夫監訳 "マトリックス有限要素法" 培風館 1970