有限要素法に対するトポロジー的考察

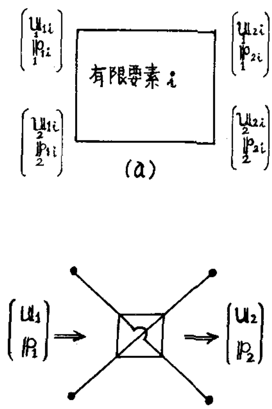
東北大学工学部　正　員　佐武正雄
東北大学大学院　学生員　○新関　茂

1．まえがき

連続体の有限要素解析では，nodal point ばかりでなく要素の境界上で適合条件を満たしているようなmodel を用いる場合でも，全ての力学量は nodal point のみを通じて伝達されるとして解析している。したがって各々の nodal point における力学量が与えられれば，有限要素内の変形状態は，一意的に決定され,有限要素の集合体は，本質的には Network を構成しているものと考えられる[1]ので，このようなtopology 的立場から有限要素に分割された連続体に対して，骨組の解析と類似な考察を行うことができる。力学問題と電気回路理論との間には，analogy が成立する[2]が 連続体と骨組構造との基本的相異点は，連続体が電気回路における相互誘導 に相当する現象を有することである。本文では，Stiffness Method で定式化された有限要素 model を用い，上記のような Network 的立場から，従来，骨組構造の解析に用いられている transfer matrix method を連続体の有限要素解析にも応用できることを板の解析を例として説明し，有限要素解析に topology 的考察を行なったものである。

2．連続体の有限要素の transfer matrix method 的解析法に関する基礎理論

骨組構造は，nodal point を 0-胞，部材を 1-胞で置き換えれば，そのまま linear graph にすることができるが，板の解析では，2次元の広がりをもつ有限要素（図-1(a)）を図-1(b)に示すような4端子 model でおきかえ，この4端子 model に連続体としての性質を付着させて考える。任意の有限要素 i の stiffness matrix を



(a)

(b)

図－1

$$\begin{pmatrix} \mathbb{P}_1 \\ \mathbb{P}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbb{U}_1 \\ \mathbb{U}_2 \end{pmatrix} \qquad (2\text{-}1)$$

と表わす。ここに $\mathbb{P}_1$, $\mathbb{U}_1$ は，それぞれ任意の有限要素 i の左側の荷重及び変位 vector，$\mathbb{P}_2$, $\mathbb{U}_2$ は 右側の荷重及び変位vector である。(2-1) 式を分解して

$$\mathbb{P}_1 = K_{11}\mathbb{U}_1 + K_{12}\mathbb{U}_2 \qquad (2\text{-}2)$$

$$\mathbb{P}_2 = K_{21}\mathbb{U}_1 + K_{22}\mathbb{U}_2 \qquad (2\text{-}3)$$

(2-3) 式より　$\mathbb{U}_2 = K_{22}^{-1}\mathbb{P}_2 - K_{22}^{-1}K_{21}\mathbb{U}_1$　これを(2-2)式に代入し

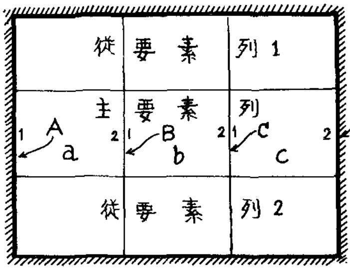


図-2-1

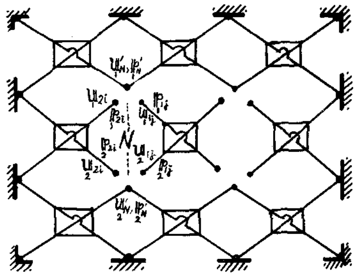


図-2-2

図-2

$$(K_{11}-K_{12}K_{22}^{-1}K_{21})\mathbb{U}_1 + K_{12}K_{22}^{-1}\mathbb{P}_2 = \mathbb{P}_1 \qquad (2\text{-}4)$$

$(K_{12}K_{22}^{-1})^{-1}=K_{22}K_{12}^{-1}$ であるから $\mathbb{P}_2$ について解けば,

$$\mathbb{P}_2 = (K_{21}-K_{22}K_{12}^{-1}K_{11})\mathbb{U}_1 + K_{22}K_{12}^{-1}\mathbb{P}_1 \qquad (2\text{-}5)$$

を得る。又(2-2)式より

$$\mathbb{U}_2 = -K_{12}^{-1}K_{11}\mathbb{U}_1 + K_{12}^{-1}\mathbb{P}_1 \qquad (2\text{-}6)$$

であるから,(2-5),(2-6)式は.まとめてmatrixで表わせば

$$\begin{pmatrix}\mathbb{U}_2\\ \mathbb{P}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-K_{12}^{-1}K_{11} & K_{12}^{-1}\\ K_{21}-K_{22}K_{12}^{-1}K_{11} & K_{22}K_{12}^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbb{U}_1\\ \mathbb{P}_1\end{pmatrix} \qquad (2\text{-}7)$$

となるがこれを更に次のように書き換える。

$$\mathbb{S}_{2i} = F_i\mathbb{S}_{1i} \qquad (2\text{-}8)$$

一般に,$\mathbb{S}_{1i}$ 及び $\mathbb{S}_{2i}$ はstate vector,F_i は,transter matrix と呼ばれる。鎖状に接続した主要素列*)に沿って有限要素を接続するときの平衡条件及び適合条件は,その部分のもつtopology的性質に依存し,従要素列*)の影響は,この平衡条件及び適合条件によって考慮される。図-2-2の境界Nのnodal pointに作用する荷重を $\mathbb{P}_N$ とすれば,主要素列の境界Nでの平衡条件は.

$$\mathbb{P}_N = \left(I,\ I,\ I\right)\begin{pmatrix}\mathbb{P}_{2i}\\ \mathbb{P}_j\\ \mathbb{P}'_N\end{pmatrix} \qquad (2\text{-}9)$$

---

*) state vector を伝達させる鎖状に接続した要素列を主要素列,平衡条件及び適合条件によって主要列への影響が考慮される要素列を従要素列と呼ぶ。

ここにIは，単位 matrix 又 $P_N'=K_N U_N'$，K_NとU_N' は，境界Nの従要素列の stiffness matrix 及び変位 vectorである。同様に主要素列の境界Nでの適合条件は，

$$\begin{pmatrix} U_{2i} \\ U_{1j} \\ U_N' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I \\ I \\ I \end{pmatrix} U_N \qquad (2\text{-}10)$$

(2-9)，(2-10)式は，まとめて matrix で表わせば

$$\begin{pmatrix} U_{1j} \\ P_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -K_N & -I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_{2i} \\ P_{2i} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ P_N \end{pmatrix} \qquad (2\text{-}11)$$

となり，これを更に

$$S_{1j} = G_N S_{2i} + t_N \qquad (2\text{-}12)$$

と表現する。(2-8)式及び(2-12)式を鎖状の主要素列に沿って用いることにより，例えば，図-2の固定板の解析を行うことができる。主要素列の境界Aにおける反力を S_{A-} とすれば，

境界 A　　$S_{1a} = -S_{A-}$

Field a　　$S_{2a} = -F_a S_{A-}$

境界 B　　$S_{1b} = -G_B F_a S_{A-} + t_B$

同様な手順をくりかえし，境界Dにおける主要素列の反力を S_{D+} とおけば，

境界 D　　$$S_{D+} = F_c G_c F_b G_B F_a S_{A-} - F_c G_c F_b t_B - F_c t_c \qquad (2\text{-}13)$$

ここで t_B，t_C は既知であるから，(2-13)式においてこれらの vector に関する項を加え合せて一つの既知 vector を作ることができ，それを C とおいて(2-13)式を次のように書き換える。

$$S_{D+} = F S_{A-} + C \qquad (2\text{-}14)$$

境界条件を考慮し，matrix Fを4つの部分に分割すれば

$$\begin{pmatrix} 0 \\ P_{D+} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ P_{A-} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \qquad (2\text{-}15)$$

すなわち

$$\mathbb{O} = F_{12}\mathbb{P}_{A-} + \mathbb{C}_1 \tag{2-16}$$

$$\mathbb{O} = F_{22}\mathbb{P}_{A-} + \mathbb{C}_2 \tag{2-17}$$

(2-16)式より未知反力 $\mathbb{P}_{A-}$ を求めることができれば、主要素列に沿って演算を進めて中間の境界における state vector を次々に求めることができる。

3. 考察

(2-16)式の field matrix の中で逆 matrix K_{21}^{-1} を使用する必要があるので 主要素列の有限要素が偶数個の nodal point をもち それらが field i の左右に2等分されなければならないという拘束を与えているが、主要素列の有限要素が必ずしも1個の要素でなく、3角形の要素2つを組み合せたような部分構造の場合でも同様な方法が用いられる。本文の単純な例題では、主要素列が1列だけであるが 複数個であったり 板の中間が支柱で支えられているような場合への拡張も容易であると思われる。(2-4)式において Suffix 1 及び 2 のついている力学量をそれぞれ 部分構造の境界とその内部の nodal point に関する力学量に対応させて考えれば、部分構造の内部の nodal point に関する力学量を消去することもできるので (2-4)式のこのような性質を上記の解析に応用することによって 更に複雑な構造の解析も容易になるものと思われる。

4. あとがき

連続体の有限要素解析を network 的に考察することにより transfer matrix method 的に取り扱うことが可能であることを説明した。骨組構造あるいは連続体の matrix 構造解析において構造物を有限個の要素の集合と考え、分布荷重を集中荷重列に置き換えて取り扱う場合には、stiffness method, flexibility method あるいは、transfer matrix method というような区分よりもその要素の集合の構成する topology 的構造のどのような性質に注目して解析するかということの方が本質的であり、その注目する性質により通常の消去法になったり、あるいは、transfer matrix method になったりするものと思われる。transfer matrix method では、field matrix に stiffness matrix と flexiblity matrix を同時に含んでいるために stiffness method と flexibility method の両者に対して 密接な関係をもつものと考えられる[3]。このようにして有限要素の集合を topology 的に考察することにより、有限要素法による matrix 構造解析に対して一つの統一した立場からの考察ができるように考えられるので、このような立場からの研究を更に進めて行きたいと思う。

参考文献

1) 新関，佐武 ： 節点の接続をトポロジー的に考慮した有限要素法
土木学会才26回年次学術講演会概要 (1971) I 139－142

2) Kron, G. : Diacopties, Macdnald (1963)

3) Rivesley, R. K. : Matrix Methods of Structural Analysis, Pergamon Press (1964)

4) Kersten, R. : Das Reduktionsverfahren der Baustatik, Springer-Verlag (1962)