

異方性を考慮した板の弾塑性解析

東北大学工学部 正 員 佐武正雄

東北大学大学院 学生員 〇阿部 寿

1. まえがき

従来、板の弾塑性解析は多くの研究があり、例えば差分法を用いたものには、Ang & Lopez¹⁾、山崎、太田、坂本²⁾、色部³⁾等があり、有限要素法を用いたものには小杉、板橋、堀井⁴⁾などの研究がある。又板の耐荷力を合理的に見積る解析法は降伏条件式や板の塑性域の定義の仕方により多様である。塑性域の振ガリを考慮する場合に板の表面が降伏応力に達した時、その点の断面全てが降伏するとする簡便な方法^{1), 3)}もあるが板の塑性状態を3次元的に扱って、板厚方向にも逐次塑性域を振ガてゆくという方法^{2), 4)}の方がより合理的であると考えられる。

本論文では後者の立場から次の様な解析を行う。応力増分と歪増分の間に線型関係を仮定する事により、微小変形理論に基づき板の方程式を増分形で一般的に表現し、それを弾塑性解析に適用するに当っては、Hillの降伏条件式を塑性ポテンシャルとして山田によって誘導された応力-歪マトリクス⁵⁾を用いる方法を使う。こうして塑性異方性^{注)}を考慮した場合についで、塑性域の振ガリを板厚方向にも追跡し解析を行う、ものである。最後にLopez等の結果と比較し、考察を行った。

2. 基礎方程式の誘導

応力増分と歪増分の間には弾性域、塑性域にガガわらず次の関係がある。

$$\begin{pmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\varepsilon_x \\ d\varepsilon_y \\ d\gamma_{xy} \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

ここで a_{ij} は一般に応力及歪の函数と考える。

また歪増分は曲率増分を用いて

$$d\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 dw}{\partial x^2}, \quad d\varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 dw}{\partial y^2}, \quad d\gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 dw}{\partial x \partial y} \quad (2.2)$$

となる。dwはたわみ増分である。

モーメント増分 dM_x, dM_y, dM_{xy} と曲率増分との関係は次式で与えられる。

$$\begin{pmatrix} dM_x \\ dM_y \\ -dM_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{12} & A_{22} & A_{23} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\frac{\partial^2 dw}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 dw}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 dw}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

ここで $A_{ij} = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} a_{ij} z^2 dz$ であり a_{ij} は x, y の函数である。

(2.3)式を(2.4)式で与えられる平衡方程式に代入して整理すると板の方程式として(2.5)式が得られる。

$$\frac{\partial^2 dM_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 dM_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 dM_y}{\partial y^2} = -d\delta \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} A_1 \frac{\partial^2 dW}{\partial x^2} + A_2 \frac{\partial^2 dW}{\partial x \partial y} + A_3 \frac{\partial^2 dW}{\partial y^2} + A_4 \frac{\partial^2 dW}{\partial x \partial y^2} + A_5 \frac{\partial^2 dW}{\partial y^3} \\ + B_1 \frac{\partial^3 dW}{\partial x^3} + B_2 \frac{\partial^3 dW}{\partial x^2 \partial y} + B_3 \frac{\partial^3 dW}{\partial x \partial y^2} + B_4 \frac{\partial^3 dW}{\partial y^3} \\ + C_1 \frac{\partial^3 dW}{\partial x^3} + C_2 \frac{\partial^3 dW}{\partial x^2 \partial y} + C_3 \frac{\partial^3 dW}{\partial x \partial y^2} = d\delta \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\therefore \text{ここで } A_1 = A_{11} \quad A_2 = 4A_{12} \quad A_3 = 2A_{22} + 4A_{33} \quad A_4 = 2A_{32} \quad A_5 = A_{22}$$

$$B_1 = 2 \frac{\partial A_{11}}{\partial x} + 2 \frac{\partial A_{12}}{\partial y} \quad B_2 = 6 \frac{\partial A_{12}}{\partial x} + 4 \frac{\partial A_{22}}{\partial y} + 2 \frac{\partial A_{12}}{\partial y} \quad B_3 = 6 \frac{\partial A_{22}}{\partial x} + 4 \frac{\partial A_{32}}{\partial x} + 2 \frac{\partial A_{12}}{\partial x} \quad B_4 = 2 \frac{\partial A_{22}}{\partial x} + 2 \frac{\partial A_{32}}{\partial y}$$

$$C_1 = \frac{\partial^2 A_{11}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 A_{12}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 A_{22}}{\partial y^2} \quad C_2 = 2 \frac{\partial^2 A_{12}}{\partial x^2} + 4 \frac{\partial^2 A_{22}}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 A_{32}}{\partial y^2} \quad C_3 = \frac{\partial^2 A_{22}}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 A_{32}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 A_{33}}{\partial y^2}$$

(2.5)式を弾塑性解析に用いる為には (2.5)式は降伏した点に対して (2.1)式の関係として山田による式を用いる事にする。

$$\begin{pmatrix} d\sigma_x \\ d\sigma_y \\ d\tau_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} - \frac{S_1^2}{S} & d_{12} - \frac{S_1 S_2}{S} & -\frac{S S_2}{S} \\ & d_{22} - \frac{S_2^2}{S} & -\frac{S_2 S_3}{S} \\ & & d_{33} - \frac{S_3^2}{S} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d\epsilon_x \\ d\epsilon_y \\ d\epsilon_{xy} \end{pmatrix} \quad (2.6)$$

$$S = \frac{4}{9} \sigma^2 H' + d_{11} \sigma_x'^2 + 2 d_{12} \sigma_x' \sigma_y' + d_{22} \sigma_y'^2 + 4 d_{33} \tau_{xy}'^2$$

$$S_1 = (d_{11} \sigma_x' + d_{12} \sigma_y') \quad S_2 = (d_{12} \sigma_x' + d_{22} \sigma_y') \quad S_3 = 2 d_{33} \tau_{xy}'$$

$$\sigma_x' = \frac{1}{H+G+H} (H(\sigma_x - \sigma_y) + G \sigma_x), \quad \sigma_y' = \frac{1}{H+G+H} (H \sigma_y + H(\sigma_y - \sigma_x)) \quad \tau_{xy}' = \frac{N}{H+G+H} \tau_{xy}$$

ここで H, G, H, N は Hill の異方性パラメーター^{注)}である。また $H = G = H = 3N$ の時は等方性の場合である。

3. 計算法

(2.5)式を解く為には (2.5)式は差分法を用いる。中央差分を用いて (2.5)式を差分化すると次の連立方程式が得られる。x方向, y方向の分割数をそれぞれ M, N とする。

$$A \cdot dW + B \cdot dW + C \cdot dW = d\delta \quad (3.1)$$

ここで A, B, C はそれぞれ $MN \times MN$ のマトリクスで $dW, d\delta$ は MN 次元ベクトルである。また A_{ij} の微分項が無視できる場合は (3.1)式の B, C マトリクスは省略できる。計算例ではこれを無視してある。

計算手順は次の様になる。

1. 初期状態として弾性解を求める。

2. $(n-2)$ 回目までの荷重増分に対する累積ためみ, 応力をそれぞれ $\bar{w}_{n-2}, \bar{\sigma}_{n-2}$ とし $(n-1)$ 回目の荷重 (注) (2.5) 式という異方性とは, 圧延を受けた板では圧延の方向と, それと直角な方向等とは, 引張試験による降伏応力が異なる事を意味し, そのちがいをパラメーターで示したものである。また厳密にはこのパラメーターの値はその後に受ける歪の函数に在るが変形が小さいければ, 変形中にその値は変化しないと考えられる。)

増分に対する左わみ増分 $d\omega_{n-1}$, 元増分 $d\omega_{n-1}$ をそれぞれ計算して $\omega_{n-2}, \sigma_{n-2}$ に加算する。

3. こうして求めた ω_{n-1} から降伏領域を求め、降伏領域に対しては (2.6) 式の関係を用いて (2.5) 式を導き、それを n 回目の荷重増分に対する方程式とする。

4. 以上の操作を板が塑性域の拡がりによって不安定となるまでくり返す。

4. 計算例

等分布荷重を受ける四辺単純支持正方形板について塑性異方性を考慮する場合としちい場合との二つの計算例を示す。なお分割は 5×5 である。また荷重増分(間隔)は等間隔に $0.1g_e$ ずつに増加させていく。

3. g_e は弾性限界荷重である。

i). 塑性等方性非硬化材料の場合 (図は板の $1/4$ を示す)。

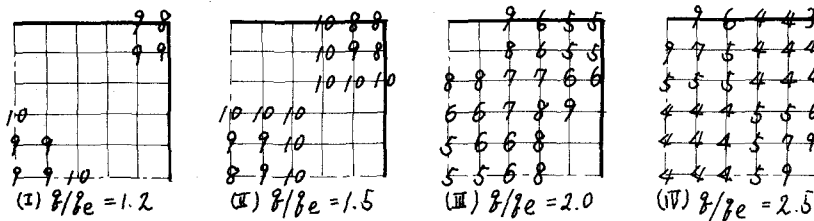


図 1

ii). 塑性異方性の場合。

この場合 Hill の異方性パラメーター及び硬化率 H' は次の値を与えた。

$F = 0.5$ $G = 0.4$ $H = 1.0$ $N = 1.35$ $H'/E = 0.001$

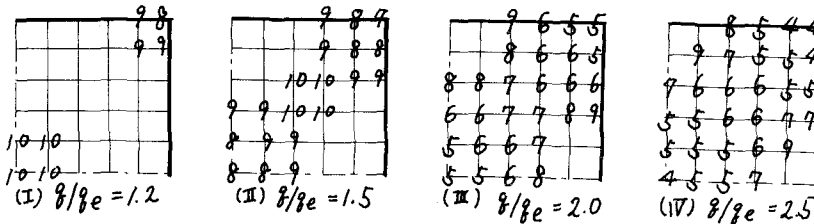


図 2

なお図の数字は図4で示した番号の深さまで塑性域が進行した事を示す。

また荷重-最大左わみ曲線は図3の様になる。 $\omega_{e \max}$ は弾性限界時の最大左わみである。

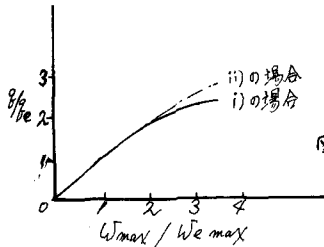


図 3

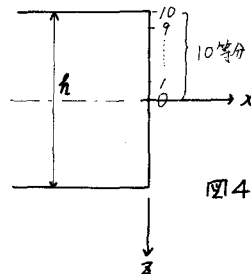
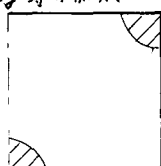


図 4

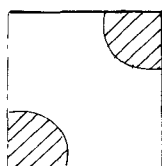
5. 考察

計算例に示した i) の場合について Lopez 等の結果と比較してみる。

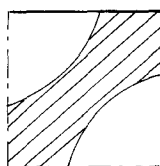
Lopez 等の結果



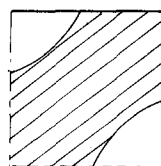
(I) $\bar{P}/P_e = 1.20$



(II) $\bar{P}/P_e = 1.31$



(III) $\bar{P}/P_e = 1.35$



(IV) $\bar{P}/P_e = 1.39$

図5

この場合  の部分は全断面降伏を示す。

図1と図5を比較してみると図1のⅢの状態は図5のⅡの状態に対応し、ⅣはⅡとⅢの両に対応すると言える事ができる。

本解法に従うと図1のⅣの状態でも板はまだ全断面降伏したとは言えず、更に荷重を増加させて得るこの様に塑性域の振ガリを板厚方向にも追跡した場合とそうではない場合とでは耐荷力に大きな差が生じる。しかし図1のⅣの状態から更に荷重を増加させると変形は非常に大きなものになってくる為、微小変形の仮定は適当でなくなる。是れ故終局的耐荷力を決定するには大変形理論によって計算する事が必要となる。

また図に示す様に塑性異方性を考慮すると塑性域の振ガリが、この例では余り明確ではないが対称でなくなる。更に P, G, H, N 板の形状、境界条件を変化させれば異なった様子が得られる。

b. あとがき

以上、応力増分と歪増分の間に(2.1)式の線型関係があり事を基礎として弾塑性問題を解析する方法を説明した。この方法では弾性、塑性の両者に対して同一の方法が適用できる利点もあるが、考察述べた様に最終的耐荷力までの解析を行う為には大変形理論を用いるなければならない。しかし板の塑性領域の進行してゆく過程を知る一つの方法として有効であると考えられる。

参考文献

- 1) A.H.S. Ang & A. Lopez "Discrete Model Analysis of Elasto-Plastic Plates" Proc of A.S.C.E., Vol 94, Feb 1968, P271~293.
- 2) 山崎健也、大田俊昭、坂本龍二 "板厚方向の塑性域の振ガリを考慮した板の弾塑性解析、第24回土木学会講演概要工、昭和44年、P63~66。
- 3) 色部 誠 "直交異方性長方形板の弾塑性応答、第24回土木学会講演概要工、昭和44年、P59~62。
- 4) 小形博孝、坂橋隆治、堀井健一郎 "弾塑性問題の解析法に関する一考察、第26回土木学会講演概要工、昭和46年、P437~439。
- 5) 山田嘉昭 "塑性力学、日刊工業新聞社、P57。
- 6) 山田嘉昭 "異方性材料の応力歪ストリクスとその応用、ストリクス構造解析" 読論文集、昭和44年、P371~376。
- 7) Garofalo, F & Low, J.R. Jr "J. Mech. Phys. Solid, 3-4 (1955), P275。