

空洞を有する地盤の粘弾性変形

秋田大学 (正会員) 色 部 誠

秋田大学 (学生員) 〇 赤 木 知 三

1. 緒 言

最近、秋田地方では、地下資源の採掘による地盤沈下が、しばしば問題とされている。実際の沈下は、きわめて緩慢、長期にわたるものであり、これの扱いには、粘弾性論的なアプローチが、必要であろうと思われるので、標題について、以下のような解法を試みてみた。

最近発表された線形粘弾性問題の有限要素による解は、文献(1)、(2)に見られるが、これらは、クリープコンプライアンスを用いて、応力-ひずみ関係式を導いている。本報告は、逆に緩和関数を用いて、応力-ひずみ関係を定め、微小時間内でのひずみ速度を一定として、応力-ひずみの増分関係式を導き、増分解法の基礎式を求めた。粘弾性定数を定める実験の難度を考えなければ、緩和関数を用いた方が、簡単な計算式になり、計算精度はあがる。

2. 構成方程式

2. 1 積分表示

粘弾性体の時刻 t における状態は、時間 τ だけ遡った $(t-\tau)$ の瞬間の状態に依存する。このような履歴現象は一般に汎関数を用いて

$$S(t) = F[f(\tau), t] \quad (1)$$

によってあらわすことができる。履歴効果が線形累加的であるときは

$$S(t) = \int_{-\infty}^t K(t, \tau) \cdot f(\tau) d\tau \quad (2)$$

線形粘弾性体の多軸応力状態における応力-ひずみ関係式は、(2) 式の履歴積分を用いて

$$\sigma_{ij}(t) = \delta_{ij} \int_{-\infty}^t K(t-\tau) \frac{d\varepsilon_{rr}}{d\tau} d\tau + 2 \int_{-\infty}^t G(t-\tau) \frac{d\varepsilon'_{ij}}{d\tau} d\tau \quad (3)$$

ここで、 $K(t)$ 、 $G(t)$ は、それぞれ、体積緩和関数、せん断緩和関数であり、 δ_{ij} 、 ε_{rr} 、 ε'_{ij} は、単位テンソル、体積ひずみ、偏差ひずみテンソルである。

又、fading memory の公理により、 $K(t)$ 、 $G(t)$ は Prony 級数で、次のように表わせる。

$$K(t) = K_{\infty} + \sum_{\alpha=1}^n K_{\alpha} e^{-t/\tau_{K,\alpha}}, \quad G(t) = G_{\infty} + \sum_{\alpha=1}^n G_{\alpha} e^{-t/\tau_{G,\alpha}} \quad (4)$$

従って、(3) 式にこれを代入し、積分下限を 0 にとって、初期のみだれの効果を考えれば

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(t) = & \delta_{ij} \left[K_{\infty} \varepsilon_{rr}(t) + \sum_{\alpha} K_{\alpha} \varepsilon_{rr}(0) e^{-t/\tau_{K,\alpha}} + \int_0^t \dot{\varepsilon}_{rr}(\tau) \sum_{\alpha} K_{\alpha} e^{-(t-\tau)/\tau_{K,\alpha}} d\tau \right] \\ & + 2 \left[G_{\infty} \varepsilon'_{ij}(t) + \sum_{\alpha} G_{\alpha} \varepsilon'_{ij}(0) e^{-t/\tau_{G,\alpha}} + \int_0^t \dot{\varepsilon}'_{ij}(\tau) \sum_{\alpha} G_{\alpha} e^{-(t-\tau)/\tau_{G,\alpha}} d\tau \right] \end{aligned} \quad (5)$$

2.2 微分表示

記憶積分とは別に、時間依存性を考え、線形粘弾性理論における応力-ひずみ関係式として、次のようなものも採用されている。

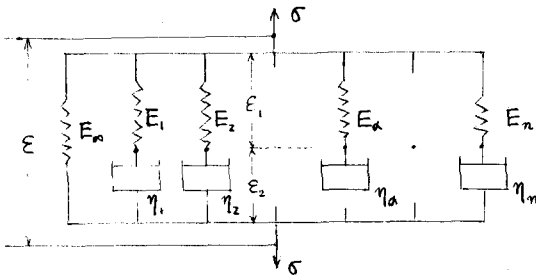
$$P_1(D) \sigma_{ij}' = Q_1(D) \varepsilon_{ij}' \quad , \quad P_2(D) \sigma_{rr} = Q_2(D) \varepsilon_{rr} \quad (6)$$

これらをまとめると

$$\sigma_{ij}(t) = \frac{1}{3} \delta_{ij} \left\{ \frac{Q_2(D)}{P_2(D)} - \frac{Q_1(D)}{P_1(D)} \right\} \varepsilon_{rr} + \frac{Q_1(D)}{P_1(D)} \varepsilon_{ij} \quad (7)$$

ここで、図-1 のような一般化Maxwellモデルを考え、(7)式を単軸応力状態について記述すれば、

$$\sigma(t) = \left(E_\infty + \sum_a \frac{E_a \eta_a D}{E_a + \eta_a D} \right) \varepsilon(t) \quad (8)-1$$



$$\sigma = \sigma_\infty + \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_n$$

$$\sigma_\infty = E_\infty \varepsilon$$

$$\sigma_1 = E_1 \varepsilon_1$$

$$\sigma_1 = \eta_1 D \varepsilon_2$$

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = \left(\frac{1}{E_1} + \frac{1}{\eta_1 D} \right) \sigma_1$$

図-1 一般化Maxwellモデル

(8)式の演算を実行すれば

$$\sigma(t) = E_\infty \varepsilon(t) + \int_0^t \dot{\varepsilon}(\tau) \sum_a E_a e^{-(t-\tau)/T_{a,a}} d\tau + \sum_a \sigma_a(0) e^{-t/T_{a,a}} \quad (8)-2$$

ここで、 $T_a = \eta_a / E_a$ で緩和時間をあらわす。これは(5)式と同形であり、結局積分表示でも、微分表示でも、同じ結果になるのは当然のことである。

2.3 増分形 応力-ひずみ関係式

(5)式において、積分下限を $t - \Delta t$ にとり、かつひずみ速度は Δt 時間内で一定とし

$$\dot{\varepsilon}_{rr}(t) = \Delta \varepsilon_{rr}(t) / \Delta t \quad , \quad \dot{\varepsilon}_{ij}'(t) = \Delta \varepsilon_{ij}'(t) / \Delta t$$

とあらわすと、積分が可能になり、(5)式は次のようにあらわせる。

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(t) = & \delta_{ij} \left[K_\infty \{ \varepsilon_{rr}(t - \Delta t) + \Delta \varepsilon(t) \} + \sum_a \sigma_{rr,a}(t - \Delta t) e^{-\Delta t / T_{K,a}} \right. \\ & + \frac{\Delta \varepsilon_{rr}(t)}{\Delta t} \sum_a K_a T_{K,a} (1 - e^{-\Delta t / T_{K,a}}) \left. + 2 \left[G_\infty \{ \varepsilon_{ij}'(t - \Delta t) + \Delta \varepsilon_{ij}'(t) \} \right. \right. \\ & \left. \left. + \sum_a \sigma_{ij,a}'(t - \Delta t) e^{-\Delta t / T_{G,a}} + \frac{\Delta \varepsilon_{ij}'(t)}{\Delta t} \sum_a K_a T_{G,a} (1 - e^{-\Delta t / T_{G,a}}) \right] \right] \quad (9) \end{aligned}$$

更に $\Delta \sigma_{ij}(t) = \sigma_{ij}(t) - \sigma_{ij}(t-\Delta t)$, $\Sigma \sigma_{ij,\alpha}(t-\Delta t) = \sigma_{ij}(t-\Delta t) - \sigma_{ij,\infty}(t-\Delta t)$ なる関係式を考慮すれば、次式のように増分形応力-ひずみ関係式を得る。

$$\Delta \sigma_{ij}(t) = \delta_{ij} \left[K_v \Delta \varepsilon_{rr}(t) - \Delta I_{K,rr}(t) \right] + 2 \left[G_v \Delta \varepsilon'_{ij}(t) - \Delta I_{G,ij}(t) \right] \quad (10)$$

ここで

$$K_v = K_\infty + \sum K_\alpha \frac{T_{K,\alpha}}{\Delta t} \{1 - e^{-\Delta t/T_{K,\alpha}}\}, \quad G_v = G_\infty + \sum G_\alpha \frac{T_{G,\alpha}}{\Delta t} \{1 - e^{-\Delta t/T_{G,\alpha}}\} \quad (11)$$

$$\Delta I_{K,rr} = \sum \{1 - e^{-\Delta t/T_{K,\alpha}}\} \{ \sigma_{rr}(t-\Delta t) - K_\infty \varepsilon_{rr}(t-\Delta t) \}$$

$$\Delta I_{G,rr} = \sum \{1 - e^{-\Delta t/T_{G,\alpha}}\} \{ \sigma_{rr}(t-\Delta t) - G_\infty \varepsilon_{rr}(t-\Delta t) \} \quad (12)$$

$$\Delta I_{G,ij} = \sum \{1 - e^{-\Delta t/T_{G,\alpha}}\} \{ \sigma'_{ij}(t-\Delta t) - G_\infty \varepsilon'_{ij}(t-\Delta t) \}$$

更に、一般ひずみテンソルを用いれば

$$\Delta \varepsilon'_{ij} = \Delta \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \Delta \varepsilon_{rr} \delta_{ij}, \quad \sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{rr} \delta_{ij} \quad (13)$$

の関係を、(10)式に用いて次式を得る。これをマトリックス表示したものが (15)式である。

$$\Delta \sigma_{ij}(t) = \delta_{ij} \left(K_v - \frac{2}{3} G_v \right) \Delta \varepsilon_{rr}(t) + 2 G_v \Delta \varepsilon_{ij}(t) - \delta_{ij} \left(\Delta I_{K,rr} - \frac{2}{3} \Delta I_{G,rr} \right) - 2 \Delta I_{G,ij} \quad (14)$$

$$\begin{Bmatrix} \Delta \sigma_{11} \\ \Delta \sigma_{22} \\ \Delta \sigma_{33} \\ \Delta \sigma_{12} \\ \Delta \sigma_{21} \\ \Delta \sigma_{13} \\ \Delta \sigma_{31} \\ \Delta \sigma_{23} \\ \Delta \sigma_{32} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} K_v + \frac{4}{3} G_v & & & & & & & & \\ K_v - \frac{2}{3} G_v & K_v + \frac{4}{3} G_v & & & & & & & \\ K_v - \frac{2}{3} G_v & K_v - \frac{2}{3} G_v & K_v + \frac{4}{3} G_v & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 2 G_v & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 G_v & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 G_v & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 G_v & & \\ & & & & & & & \text{SYM} & \\ & & & & & & & & \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \varepsilon_{11} \\ \Delta \varepsilon_{22} \\ \Delta \varepsilon_{33} \\ \Delta \varepsilon_{12} \\ \Delta \varepsilon_{13} \\ \Delta \varepsilon_{21} \\ \Delta \varepsilon_{23} \\ \Delta \varepsilon_{31} \\ \Delta \varepsilon_{32} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta I_{G,11} \\ \Delta I_{G,22} \\ \Delta I_{G,33} \\ \Delta I_{G,12} \\ \Delta I_{G,21} \\ \Delta I_{G,13} \\ \Delta I_{G,31} \\ \Delta I_{G,23} \\ \Delta I_{G,32} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

但し $\Delta I_G = \Delta I_{K,rr} - \frac{2}{3} \Delta I_{G,rr}$, (15)式を略記して

$$\{\Delta \sigma\} = [D_v] \{\Delta \varepsilon\} - \{\Delta \sigma_v\} \quad (16)$$

3. 剛性方程式

要素内のひずみ増分 $\{\Delta \varepsilon\}$ が節変位増分と次の関係で結ばれるとする。

$$\{\Delta \varepsilon\} = [B] \{\Delta \delta\} \quad (17)$$

(16), (17) 式を適用し仮想仕事の原理より、次の剛性方程式が得られる。

$$\{\Delta F\} = [K_v] \{\Delta \delta\} - \{\Delta F_v\} - \{\Delta F_r\} \quad (18)$$

ここで $[K_v] = \int_V [B]^T [D_v] [B] dV$, $\{ \Delta F_v \} = \int_V [B]^T \{ \Delta \sigma_v \} dV$, $\{ \Delta F_p \} = \int_V [N]^T \{ \Delta P \} dV$
等であり、それぞれ 剛性マトリックス、粘弾性変形によるみずけの節変力、および物体力による節
変力増分をあらわす。

全体の剛性方程式は(18)式に示した、要素の剛性方程式を組合わせて完成する。

4. 計算例

計算モデルは、図-2に示す。Y
外力は物体力のみが働き、空洞は
 $t=0$ の瞬間に生じたものとする。

使用した材料特性及び諸定数は
次のとおり。

$$G_{\infty} = 8. \times 10^4 \text{ kg/cm}^2$$

$$G_1 = 3.8 \times 10^4 \text{ "}$$

$$K_{\infty} = 1.0 \times 10^6 \text{ "}$$

$$K_1 = 4.9 \times 10^5 \text{ "}$$

$$T_{G,1} = 100 \text{ 日}$$

$$T_{K,1} = 100 \text{ 日}$$

$$\Delta t = 10 \text{ 日}$$

$$\rho = 0.002 \text{ kg/cm}^3$$

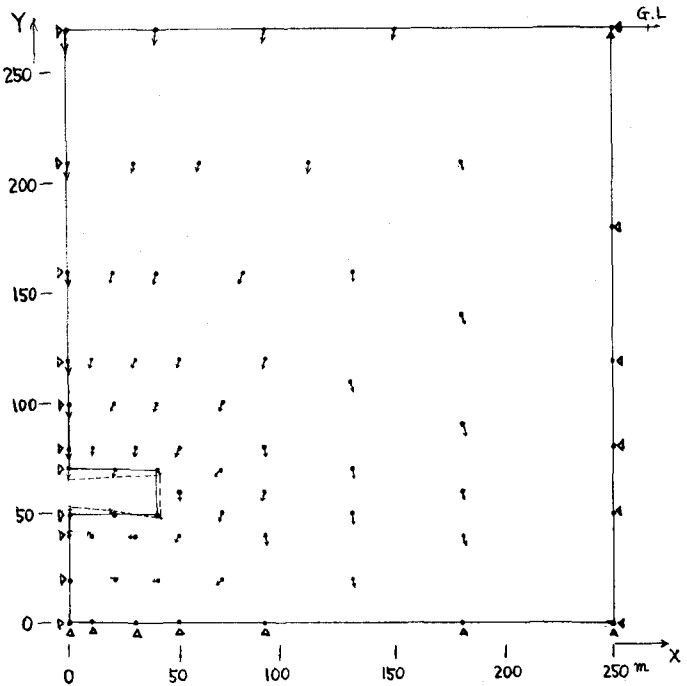


図-2 空洞の変形及び節変の変位

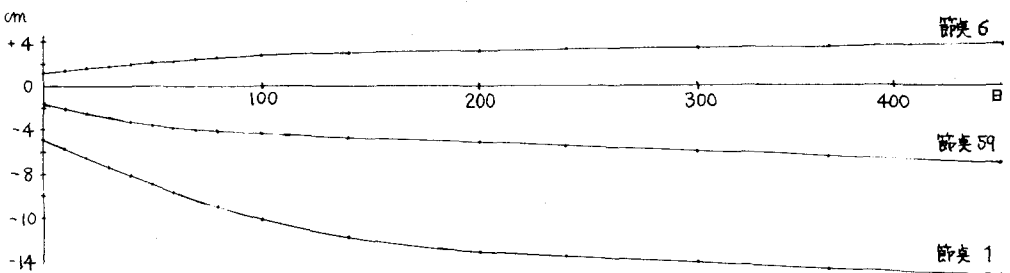


図-3 節変の計算経日変位

5. 文献

- 1). 山田, 岩田; 「熱粘弾性問題の有限要素法解析」オ5回マトリックス構造解析法研究発表論文集
- 2). D.M. Malone, J. Conner; "Finite Elements and Dynamic Viscoelasticity"
Jour. of the Engineering Mechanical Division, August, 1971