60　ウェイト・マトリックスの有限要素法への応用

東北大学工学部　正　員　佐武正雄
東北大学大学院　学生員　○新関　茂

1. まえがき

連続量を適当な力学条件の考慮のもとに，力学的に等価な有限個の離散量の集合に置き換えて取り扱う方法は，非常にその応用範囲の広いことから、構造力学における有力な解析手段となっている。著者等は，このような等価置換において，その基礎となるウェイト・マトリックスについて考察して来た。[1)2)] 本文では，有限要素法による固定板の解析において求められた周辺の集中モーメント反力を分布モーメント反力へ等価置換する問題を例としてウェイト・マトリックスの有限要素法への応用を説明する。

2. 単純支持板周辺の集中モーメント荷重列を分布モーメントに置換するウェイト・マトリックスについて

この場合のウェイト・マトリックスは，単純支持板の周辺上に作用する集中モーメント荷重列による各分割点の撓み角が，分布モーメントによる撓み角に等しいという条件でつくることができる。すなわち集中モーメント荷重列Mによる各分割点の撓み角 Θ_1 は，単純支持板周辺のモーメントと撓み角に関するGreen 関数 K_1 を用いて

$$\Theta_1 = K_1 M \tag{2.1}$$

一方，一辺（長さ a）上の分布モーメントを有限Fourier級数で表せば，分割数を N として各分割点では

$$m_i = \sum_{n=1}^{N-1} E_n \sin\frac{n\pi}{a} ih \quad (h = a/N) \tag{2.2}$$

が成り立ち，これは次の直交関係

$$\sum_{k=1}^{N-1} \sin\frac{i\pi}{a}kh \sin\frac{j\pi}{a}kh = \frac{N}{2}\delta_{ij} \tag{2.3}$$

を利用して

$$E_n = \sum_{j=1}^{N-1} m_i \sin\frac{n\pi}{a} jh \tag{2.4}$$

となり，文献(4)の(176)式を用いれば分布モーメントに対しては，

$$\Theta_2 = K_2 \mathfrak{M} \tag{2.5}$$

と記すことができる。ここに $\mathfrak{M}$ は各分割点の分布モーメントをベクトルで表示したものである。(2.1)式の Θ_1 と (2.5)式の Θ_2 を等しいとおくことにより

$$\mathfrak{M} = \frac{1}{h} W^{-1} M \tag{2.6}$$

$$W^{-1} = K_2^{-1} K_1 \tag{2.7}$$

を得る。ここに求められた W^{-1} は，荷重状態とは無関係に撓み角に関して等価な置換を行うウェイト・マトリックスである。なお K_1 の対角成分は，有限値となるよう考慮する必要がある。（後に詳述する）

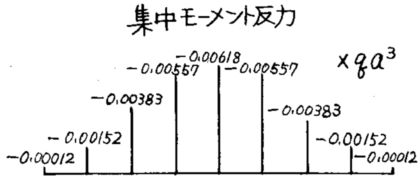
3. ウェイト・マトリックスの有限要素法への応用

有限要素法では，連続体を nodal point で接合された要素の集合体と考え，外力は全てこの nodal point に作用する集中力として取扱われ，要素間の力及び変位の伝達は全てこの nodal point を通じて行なわれる。したがって有限要素の集合体に置き換えられた固定板は，その周辺の nodal point では，境

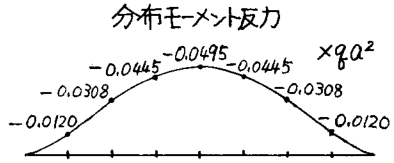
界条件を満たすために，その撓み角をゼロにするような集中モーメント反力Mをそれぞれ受けている。この集中モーメント反力Mを（2.6）式に代入すれば，ウェイト・マトリックスW^{-1}によって分布モーメント反力mに置換される。有限要素法の詳細については，文献(3)を参照されたい。等分布荷重qを受ける正方形固定板$(a\times a)$の有限要素法(8×8)によって求められた集中モーメント反力及びウェイト・マトリックスによって等価置換された分布モーメント反力を，それぞれ一辺について図-1及び図-2に示す。使用した要素は矩形要素である。

4．変位関数の導関数による値との比較及び考察

従来，有限要素法では，一要素内の変位関数の2次導関数を用いて変位量から分布モーメント反力を求めているが，この方法と本文の方法との比較及び検討を示す。有限要素法によって求められた集中モーメント反力をウェイト・マトリックスによって分布モーメント反力に等価置換する方法は，従来の変位関数の導関数を利用して分布モーメント反力を求めるよりも高次の関数で近似することになるので一般には，高い精度で分布モーメント反力を求めることができると考えられる。計算値の誤差は表-1の厳密解と比較して3.6％であり，これは有限要素法によって求められた撓みの精度と同程度である。有限要素法で矩形要素を用いた場合の要素内の撓みは，x及びy方向にそれぞれ3次関数で仮定するので分布モーメントは，その2次導関数，すなわち1次関数である。したがって精度は変位量に比較して一般に劣るものと考えられる。（この場合は，2％の誤差となっており　むしろ精度がよいが，一般に本文の方法より高精度となるかどうかは疑問である。）　K_1の対角線成分は，そのままでは，無限大となるので　この項に限って集中モーメントMの代りに　一般に分割点を中心とした分布巾hの分布モーメント$m(hm=M)$を用いる(図-3)。しかし更に精度を高めるため　本文では，単純支持板周辺に作用する分布モーメントによる撓みと　これと等価な集中モーメント荷重列による撓みとが　板の中央線上の13個の点において一致するような分布巾（本文の場合は，$M=(a/9.15)\cdot m$）を採用して計算を行った。このような関係にある分布モーメントと集中モーメント荷重列は，互いに単純支持板内部の歪エネルギーをほぼ等しくするので，より妥当な置換と考えられる。



図—1

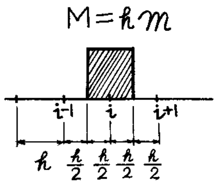


図—2

正方形固定板の負最大曲げモーメントと最大撓み

	本文の方法 (8×8)	有限要素法 (8×8)	Timoshenko
負最大曲げモーメント ×qa^2	−0.0495	−0.0503	−0.0513
最大撓み ×qa^4/D		0.00130	0.00126

表—1



図—3

（参考文献）

1）佐武，新関：分布量と離散量との等価置換に関する考察，土木学会東北支部講演概要(1970)，83−86

2）佐武，新関：構造解析におけるウェイト・マトリックスに関する研究，土木学会才25回年次学術講演会概要(1970) 339−342

3）Zienkiewicz, O.C.& Cheung, Y.K：Finite Element Metheod for Analysis of Elastic Isotropic and Orthotropic Slabs, Proc. Inst. Civil Engrs. 28(1964), 471−488

4）Timoshenko, S：Theory of Plate and Shell, McGraw-Hill (1959), 180−202