6 流れを遡る波の境界層

東北大学工学部　正　員　　岩崎敏夫
東北大学大学院　学生員　○佐藤道郎

1. まえがき

表面波が底の影響を受けるような浅海域では　底面の極く近傍に粘性の効果の卓越する境界層が形成される。波の減衰，砂の移動といった問題は　この波の境界層の性質に深く関連しており，1896年のHough の研究以来今日に至るまで　多くの研究者によって成果が蓄積されてきている。ところがこれらの研究は　殆んど静水における波の境界層に関するもので　波と流れが共存する場合の研究は浜田博士[1]による　流れが放物線型の鉛直流速分布をもつ場合についておこなった計算以外には見当たらないようである。

本研究では，簡単化した基本式をもとに　対数則にしたがうような流れを波が遡る場合について計算をおこなってみた。

2. 理　論

i）基礎方程式

境界層の厚さが小さく　層内では水平運動として考察できる場合には　x軸を底面にとり，y軸を底面から垂直上向きにとって　層内の流れの速度成分Uが波速Cに較べて小さいものとすると　境界層内での運動方程式は　次の式で近似される。

$$\frac{\partial u}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\tau}{\rho}\right) \tag{1}$$

ただし，uは境界層内の波の速度成分，Pは圧力，τは摩擦応力，ρは流体の密度，tは時間である。又，境界層外縁では，波の速度成分をu_0とすれば　次の式が与えられる。

$$\frac{\partial u_0}{\partial t}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{2}$$

層内での圧力は殆んど変化がなく　層外の運動から定まる圧力に等しいと考えることができるので，(1)，(2)式から　Pを消去して次の式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial t}(u-u_0)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\tau}{\rho}\right) \tag{3}$$

境界条件は　次のように表わされる。

$$u=0 \qquad \text{at} \qquad y=0 \tag{4}$$

$$u=u_0 \qquad \text{as} \qquad y\to 0 \tag{5}$$

滑面上の流れで，次式で表わされるような分布をもつ場合について計算をおこなう。

$$U/U_* = \begin{cases} 5.5+(1/\kappa)\cdot \ln(U_* y/\nu) & (y_s \le y \le h) \quad (6)\\ U_* y/\nu & (0 \le y \le y_s) \quad (7)\end{cases}$$

ここに、U_*は摩擦速度、κ はKarman 定数($=0.4$)、νは動粘性係数、y_sは粘性底層の厚さ($=11.6\,\nu/U_*$)である。

境界層外縁流速U_0は次のように与える。

$$U_0 = U_{00}\cdot e^{i\sigma t} \qquad \sigma = 2\pi/T \quad (T:\text{波の周期}) \tag{8}$$

$$U_{00} = \frac{H}{2}\cdot\frac{m(C-U)}{\sinh mh}F_1(0) \qquad m = 2\pi/L \tag{9}$$

$$F_1(0) = \frac{1}{1+\dfrac{U_*}{\kappa m}\displaystyle\int_{y_s}^{h}\frac{\sinh m(h-t)\cdot\sinh mt}{\{C-U_1-(U_*/\kappa)\ln(t/h)\}t^2\sinh mh}dt} \tag{10}$$ [2]

ここに、Hは波高，Lは波長，U_1は流れの表面流速，hは水深である。

τに関しては 次のようにおく。

$$\tau = \rho N\frac{\partial(u+U)}{\partial y} \tag{11}$$

ii) Nの仮定

境界層内の流れが 層流の場合にはNは流体の動粘性係数νと一致するが、乱流の場合にはその関数形を定めなければならない。流れの無い場合に関しては、梶浦やJohnsが、それぞれ三層モデルを提案しているが、波と流れが重った場合に関しては 何も研究はないようである。

流れの存在によって、層内が既に乱流状態となっている場合に、波の作用で、その状態がどのように変化するか といった点については、それ自体、解決すべき重要な課題の一つと考えられるが、ここでは、層内の乱れが主に流れによって支配されるという仮定のもとに、Nが流れに対するものと一致する場合について計算をおこなう。

流れが(6),(7)で表わされるような分布をもつと考えているから、層内では$y/h \ll 1$より、Nは次のように表わされる。

$$N = \begin{cases} \kappa h U_*(1-y/h)\cdot(y/h) \fallingdotseq \kappa U_* y & (y_s \leq y) \quad (12) \\ \nu(1-y/h) \fallingdotseq \nu & (0 \leq y \leq y_s) \quad (13) \end{cases}$$

このNを(11)に代入して

$$\tau = \begin{cases} \rho\kappa U_* y(\partial u/\partial y) + \rho U_*^2 & (y_s \leq y) \quad (14) \\ \rho\nu(\partial u/\partial y) + \rho U_*^2 & (0 \leq y \leq y_s) \quad (15) \end{cases}$$

このτを(3)に代入して

$$\frac{\partial}{\partial t}(u-U_0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\nu\frac{\partial u}{\partial y}\right) \qquad (0 \leq y \leq y_s) \tag{16}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(u-U_0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\kappa U_* y\frac{\partial u}{\partial y}\right) \qquad (y_s \leq y) \tag{17}$$

上の二式を解くことになるが、その際、(4),(5)の条件に、さらに次の条件が付加される。

「 $y = y_s$ で u, $\partial u/\partial y$ が連続 」 (18)

iii) (16), (17) の解

$$V = U_0 - U = v(y)e^{i\sigma t} \tag{19}$$

として変数変換をおこなうと (16), (17) は 次のようになる。

$$\frac{d^2 v}{dy^2} - \beta_L^2 v = 0 \qquad (0 \leq y \leq y_s) \tag{20}$$

$$\text{ただし} \quad \beta_L = \sqrt{\frac{\sigma}{\nu}}\, e^{i\frac{\pi}{4}} \tag{21}$$

$$\frac{d^2 v}{dy^2} + \frac{1}{y}\frac{dv}{dy} - \frac{\beta^2}{y} v = 0 \qquad (y_s \leq y) \tag{22}$$

$$\text{ただし} \quad \beta = \sqrt{\frac{\sigma}{\kappa U_*}}\, e^{i\frac{\pi}{4}} \tag{23}$$

境界条件 (4), (5) は次のようになる。

$$v = U_{00} \qquad at \qquad y = 0 \tag{24}$$

$$v = 0 \qquad as \qquad y \to \infty \tag{25}$$

(イ) $0 \leq y \leq y_s$ の解

(20)式から、C_1, C_2 を積分定数として、ただちに次式が得られる。

$$v = C_1 \cosh \beta_L y + C_2 \sinh \beta_L y$$

(24)式から $C_1 = U_{00}$ となり、 $v = U_{00} \cosh \beta_L y + C_2 \sinh \beta_L y$ (26)

(ロ) $y_s \leq y$ における解

(22)式において、$Z^2 = 4\beta^2 y$ なる変数変換をおこない 次のように 0 次の変形 Bessel の微分方程式を得る。

$$\frac{d^2 v}{dZ^2} + \frac{1}{Z}\frac{dv}{dZ} - v = 0 \tag{27}$$

(25)の条件を満たす解は D を積分定数として $v = D \cdot K_0(Z)$ (28)

ここに、$K_0(Z)$ は、0 次の第二種変形 Bessel 関数である。

(26), (28) の積分定数 C_2, D は (18) の条件から得られて次のようになる。

$$C_2 = -\frac{K_0(2\beta\sqrt{y_s})\cdot \sinh \beta_L y_s + \frac{\beta}{\beta_L\sqrt{y_s}}\cdot K_1(2\beta\sqrt{y_s})\cdot \cosh \beta_L y_s}{K_0(2\beta\sqrt{y_s})\cdot \cosh \beta_L y_s + \frac{\beta}{\beta_L\sqrt{y_s}}\cdot K_1(2\beta\sqrt{y_s})\cdot \sinh \beta_L y_s}\cdot U_{00} \tag{29}$$

$$D = \frac{1}{K_0(2\beta\sqrt{y_s})\cdot \cosh \beta_L y_s + \frac{\beta}{\beta_L\sqrt{y_s}}\cdot K_1(2\beta\sqrt{y_s})\cdot \sinh \beta_L y_s}\cdot U_{00} \tag{30}$$

ただし、$K_1(Z)$ は、1 次の第二種変形 Bessel 関数である。

iv) 境界層内の流速分布

(26), (28) に C_2, D を代入して、v は次のようになる。

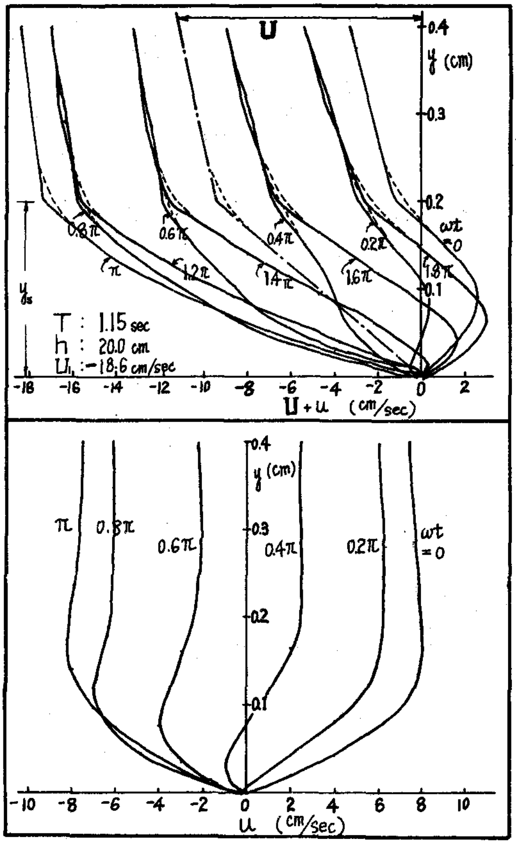
$$v = \begin{cases} \dfrac{K_0(2\beta\sqrt{y_s})\cosh \beta_L (y_s - y) + \frac{\beta}{\beta_L\sqrt{y_s}}\cdot K_1(2\beta\sqrt{y_s})\sinh \beta_L (y_s - y)}{K_0(2\beta\sqrt{y_s})\cosh \beta_L y_s + \frac{\beta}{\beta_L\sqrt{y_s}}\cdot K_1(2\beta\sqrt{y_s})\sinh \beta_L y_s} U_{00} & (0 \leq y \leq y_s) \\ \dfrac{K_0(2\beta\sqrt{y})}{K_0(2\beta\sqrt{y_s})\cosh \beta_L y_s + \frac{\beta}{\beta_L\sqrt{y_s}}\cdot K_1(2\beta\sqrt{y_s})\sinh \beta_L y_s} U_{00} & (y_s \leq y) \end{cases}$$

したがって、境界層内における波の流速 U は次のように表わされる。

$$u=\begin{cases}\mathrm{Re}\left\{U_{00}\left(1-\dfrac{K_0(2\beta\sqrt{y_s})\cosh\beta_L(y_s-y)+\frac{\beta}{\beta_L\sqrt{y_s}}\cdot K_1(2\beta\sqrt{y_s})\sinh\beta_L(y_s-y)}{K_0(2\beta\sqrt{y_s})\cosh\beta_L y_s+\frac{\beta}{\beta_L\sqrt{y_s}}\cdot K_1(2\beta\sqrt{y_s})\sinh\beta_L y_s}\right)e^{i\sigma t}\right\} & (0\leq y\leq y_s) \quad (31)\\ \mathrm{Re}\left\{U_{00}\left(1-\dfrac{K_0(2\beta\sqrt{y})}{K_0(2\beta\sqrt{y_s})\cosh\beta_L y_s+\frac{\beta}{\beta_L\sqrt{y_s}}\cdot K_1(2\beta\sqrt{y_s})\sinh\beta_L y_s}\right)e^{i\sigma t}\right\} & (y_s\leq y) \quad (32)\end{cases}$$

3. 計算例

流速分布の計算結果の一例を右図に示した。$y=y_s$ のところで分布形が折れているのは、流れの流速分布を(6),(7)のように与えたことによる。実際には点線に示すような形になると思われる。



4. あとがき

流れを遡上する波の境界層について、非常に簡単化して計算をおこなってみた。粗面の場合も含めて、流れの場での波の境界層の挙動を明らかにしていくことは、特に砂の移動の機構を理解する上で望まれる。その際、理論的な扱いにおいて問題なのは、渦動粘性係数をどのように見積るかという点であろう。波は、浅いところでは周期や波高が大きくなると、境界層は乱流となる。流れの乱れとそれとのInteractionによって、層内の乱流構造がどうなるかを実験的に明らかにしていくことが必要であろうが、実験の困難さから、これまで研究はなされていないようである。しかし、近年の乱流計測技術の発達から可能ならしめる条件はあると思われる。

ここでの扱いは、第一次近似的なものにすぎないが、上述の点を追求すると共に、さらに発展させていきたいと考えている。

参考文献

(1) 浜田徳一： 流れの中の有限振巾波 ― 追補 ―　第11回海岸工学講演会講演集　1964.

(2) 岩崎敏夫，佐藤道郎： 流れを遡る波のエネルギーの減衰について　第17回海岸工学講演会論文集　1970.