

5 淡水塩水界面における内部波に関する研究

東北工学部 正員 岩崎敏夫
 " 学生員 日下 理
 " 学生員 宝田 登康

§ 1. まえがき

工業の発展に伴って、沿岸の工業排水や発電所の温水排水の拡散は、重要な問題となってきている。密度差を有する二層に相対的な速度差のある流れにおいて、この速度差がある大まかにこすれ、境界面に内部波が発生し、状況によっては波高の増大後碎波して、拡散混合の原因となる。従って内部波の波高変化について水理学的条件を明らかにすることは、拡散過程と研究する基礎として重要である。本論文では、河口附近をモデル化して淡水塩水界面に生ずる内部波について、まず実験によってその卓越周期、波長、波速、スペクトル等を求め内部波の性質を明らかにし、ついでこれを規則的な確定現象と仮定した場合の理論的な波高変化について、解析式の誘導を試みた。

§ 2. 不規則な内部波の解析

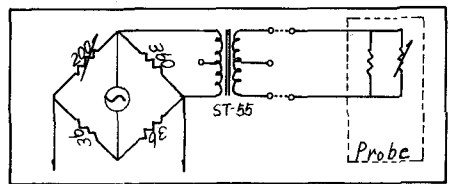
(1) 実験の概要、目的

実験水路は、長さ 380 cm 、深さ 30 cm 、巾 15 cm で観測区間はその中 100 cm の範囲である。1 回のトリップで計測し、実験環境のわずかな変化でも影響するので、実験の度にキャリブレーションを行った。不規則波を 2 分間以上記録し、相関函数、スペクトル等の解析によって、波動運動を規定する諸量を決定している。実験は、流量 $10\text{ cm}^3/\text{s}$ から $80\text{ cm}^3/\text{s}$ まで $5\text{ cm}^3/\text{s}$ 毎に計測し、流量を三種類変えたが、波高発達の顕著なグラフを解析例に載せてあり、その結果から次のようなことがいえる。

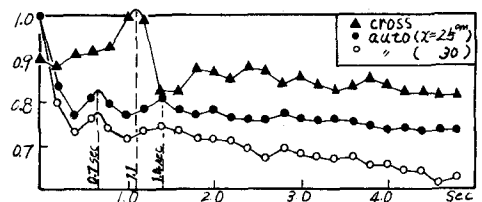
(2) 解析例

実験条件は、淡水塩水の深さ共に 10 cm 、密度それぞれ 1.0005 、 1.0205 、水温共に 16.5°C 、流量 $1.403\text{ cm}^3/\text{s}$ 、平均流速 4.68 cm/s 、内部フルード数 0.334 、レイノルズ数 4.216 、クーリカン数 0.13004 であった。

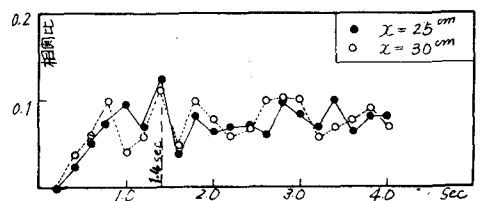
内部波の卓越周期は、スペクトル、自己相関、ペリオドグラムから約 0.7 秒であることがわかる。波速は、フロー間距離 (5 cm) と相互相関の delay time (約 1.1 秒) との比をとって、 4.55 cm/s となる。流量によって周期が若干変化するが、近似値で計



1 図 Bridge 回路



2 図 Correlogram



3 図 Periodogram

算すれば、卓越波長約3.18mが得られる。4図のスペクトル図をみると、流程に従ってエネルギー増加があり、しかもピークがほぼ対応していることから、内部波はこの区間において増大している傾向と思われる。尚0.2秒間隔600次のSamplingである。

§3. 規則的T₀内部波の波高変化に関する解析

(1) 基礎式

非圧縮性、非粘性、二次元運動、線型性の範囲内で問題を考えている。5.1図の場合、barをつけて平均量、変動量はbarなしの記号とするし、未知函数u, w, pの4コに対する線型化された式は、次の4式である。

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + w \frac{\partial \bar{u}}{\partial z} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (1)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\rho}{\bar{\rho}} g \quad (2)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{\rho} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) + w \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial z} + \bar{u} \frac{\partial \bar{\rho}}{\partial x} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \rho}{\partial x} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

次に定義される流函数 $\psi(x, z, t)$ を導入すること、函数を1コ少くして考える。

$$u = -\partial \psi / \partial z, \quad w = \partial \psi / \partial x \quad (5)$$

これらから p, ρ を消去すると

$$\bar{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi + \bar{u} \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi - \bar{u} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right] - \bar{\rho} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \bar{u} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t} - \bar{u} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right]$$

$$+ \bar{\rho} \bar{u} \left[\frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi + \bar{u} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \bar{u} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right] - \bar{\rho} \bar{u} \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial t} + \bar{u} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \bar{u} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right] + g \bar{\rho} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = 0 \quad (6)$$

Primeは $\partial/\partial t$ 。波動においては、運動がx, zについて周期的の場合が多いし、また線型式であることから、調和波の中Fourier成分の1つ $\psi = \psi(x) \exp[ik(x-ct)]$ を考えると次式になる。

$$(\bar{\rho} \psi)' - \left[k^2 \bar{\rho} + \frac{(\bar{\rho} \bar{u})'}{\bar{u} - c} + \frac{\bar{\rho}'}{(\bar{u} - c)^2} g \right] \psi = 0 \quad \text{or} \quad (\bar{\rho} \psi)' - \left[k^2 \bar{\rho} + \frac{(\bar{\rho} \bar{u})'}{\bar{u} - c} + \frac{\bar{\rho}'}{(\bar{u} - c)^2} g \right] w = 0 \quad (8)$$

境界面条件の式：境界面の上下の量にそれぞれu, wの添字をつける。運動学的条件は、近似的に、
$$[\partial \psi / \partial t + \bar{u} \cdot \partial \psi / \partial x]_u = [\partial \psi / \partial t + \bar{u} \cdot \partial \psi / \partial x]_e \quad (9)$$

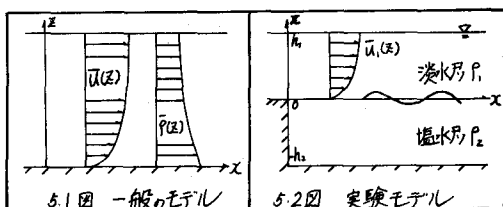
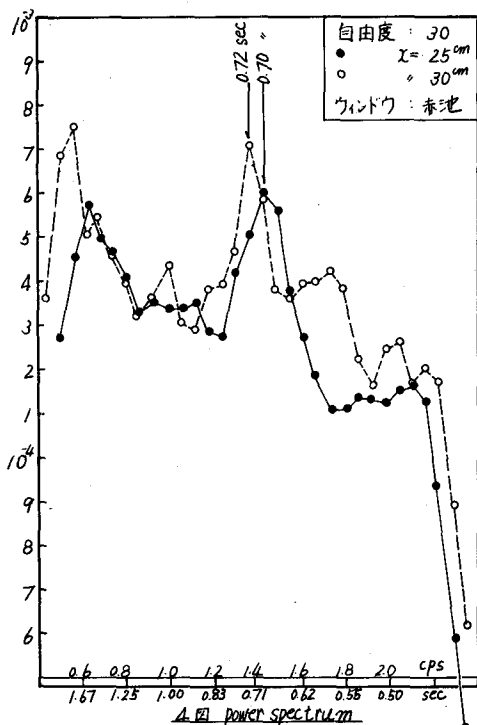
力学的条件は境界面で等圧力のことから $D(p_u - p_e) / Dt = 0$ を要直して、

$$[\bar{\rho}(c - \bar{u})^2 \psi' - \bar{\rho}(g - \bar{u}(c - \bar{u})) \psi]_u = [\bar{\rho}(c - \bar{u})^2 \psi' - \bar{\rho}(g - \bar{u}(c - \bar{u})) \psi]_e$$

$$\text{or} \quad [\bar{\rho}(c - \bar{u})^2 w' - \bar{\rho}(g - \bar{u}(c - \bar{u})) w]_u = [\bar{\rho}(c - \bar{u})^2 w' - \bar{\rho}(g - \bar{u}(c - \bar{u})) w]_e \quad (10)$$

但し、内部波形を、次のようにしている。

$$\eta = a \cdot e^{ik(x-ct)} \quad (11)$$



○実験モデルについて：前記は一般的な式であるが、5.2回はその特別の場合として、それぞれの流体を支配する式が得られる。1, 2の添字は、上, 下層の量。

$$\begin{cases} \psi_1'' - (k^2 + \frac{\bar{u}_1''}{\bar{u}_1 - c}) \psi_1 = 0 \\ \psi_2'' - k^2 \psi_2 = 0 \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} w_1'' - (k^2 + \frac{\bar{u}_1''}{\bar{u}_1 - c}) w_1 = 0 \\ w_2'' - k^2 w_2 = 0 \end{cases} \quad (12)$$

$$\text{水底条件:} \quad \psi_2(-h_2) = 0, \quad w_2(-h_2) = 0 \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \text{界面条件:} \quad \rho_1 c^2 \psi_1' + \rho_1 (\bar{u}_1' - g) \psi_1 &= \rho_2 c^2 \psi_2' - \rho_2 g \psi_2, \quad \psi_1 = \psi_2 \\ \rho_1 c^2 w_1' + \rho_1 (\bar{u}_1' - g) w_1 &= \rho_2 c^2 w_2' - \rho_2 g w_2, \quad w_1 = w_2 \end{aligned} \quad (15)$$

$$\text{表面条件:} \quad \psi_1(h_1) = 0, \quad w_1(h_1) = 0 \quad (16)$$

(16)は自由表面であるから、表面振が与えられた時は空気中の密度を極めて小さい ($\rho_a=0$) として、(10)を与えられる。ここでは表面振はないし、内部振による影響は次のオーダー比較でほとんどないものとして、固定境界に似た条件を与えている。淡水上に $\rho_0=0$ の層を想定し、 $\rho = \rho_0, \rho_1, \rho_2$ の3層について考えると、(10)は Sturm の振動理論とから、次のオーダーとなる。

$$w_{0-1} = 0 \left[\frac{\Delta \rho_{1-2}}{\Delta \rho_{0-1}} w_{1-2} \right]$$

実際目視によつては、表面の変動が観測されない程度である。これまで ψ と w についてまったく同様に、2つの2階微分方程式に対し、4つの境界条件が与えられた。 ψ と w の位相差に留意すれば、解析過程に便利な方を適宜選んで解いて良いことになる。(11)の内部振形の式において、 C 或いは k を複素数としてその虚部が振幅変化に関わる項を与えるから、以下では $C = C_r + iC_i$ の評価について解析が主である。

(2)で基礎教展開による方法

$$(13) \text{を解くと} \quad \psi_2(z) = -aC \sinh k(z+h_2) / \sinh kh_2. \quad (17)$$

(12)は、解の形を $\psi_1(z) = (\bar{u}_1 - c) \sum (k^n) \Phi_n(z)$ に展開できるものとして、(12)に代入する。

$$\{(\bar{u}_1 - c)^2 \Phi_n''\} = (\bar{u}_1 - c)^2 \Phi_{n-1} \quad (18)$$

境界条件を考慮して解くと、結局 $\psi_1(z)$ は次である。

$$\begin{aligned} \psi_1(z) &= a(\bar{u}_1 - c) \left\{ 1 + k^2 \int_0^z (\bar{u}_1 - c)^2 \int_0^z (\bar{u}_1 - c)^2 dz dz + \dots \right\} \\ &\quad - a(\bar{u}_1 - c) \frac{1}{F} \left\{ \int_0^z (\bar{u}_1 - c)^2 dz + k^2 \int_0^z (\bar{u}_1 - c)^2 \int_0^z (\bar{u}_1 - c)^2 dz dz + \dots \right\} \end{aligned} \quad (19)$$

$$\therefore \frac{1}{F} = \frac{1 + k^2 \int_0^{h_1} (\bar{u}_1(z) - c)^2 \int_0^z (\bar{u}_1(\xi) - c)^2 d\xi dz + \dots}{\int_0^{h_1} (\bar{u}_1 - c)^2 dz + k^2 \int_0^{h_1} (\bar{u}_1 - c)^2 \int_0^z (\bar{u}_1(\xi) - c)^2 d\xi dz + \dots} \quad (20)$$

よつて、(15)から C に関する超越方程式を得る。

$$C^2 \frac{\rho_2}{\rho_1} k \coth kh_2 + \left\{ \frac{1}{F} - \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} g \right\} = 0 \quad (21)$$

(3)固有値的考え方

neutral plane が発生するような密度流を考える場合には、固有値問題としての扱い方が、物理的な現象と良く説明できるので有効である。L は二階線型微分演算子としたとき、 $L[F] = \lambda G(\eta) F$ の固有値を決めるには、まず線型独立な函数 $\phi_n(\eta)$ を選んで、解とその線型結合 $F(\eta) = \sum D_n \phi_n(\eta)$ で近似する。 $\int F L[F] d\eta$ が D_n に対して停留的(stationary)であるには、 N の方程式が成立し、その結果 $F=0$ の自明解以外の解を持つためには、次の固有方程式が得られる。

$$\begin{vmatrix} A_{11}-\mu B_{11} & \cdots & A_{1N}-\mu B_{1N} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{N1}-\mu B_{N1} & \cdots & A_{NN}-\mu B_{NN} \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{aligned} &= \neq \quad \mu \text{ は } \lambda \text{ の近似値} \\ &A_{ns} = - \int \phi_s(\eta) L[\phi_s(\eta)] d\eta \\ &B_{ns} = - \int \phi_s(\eta) \phi_s(\eta) d\eta \end{aligned}$$

計算の簡単化と実際には 1 mode が最も現れやすいことから、1 mode について考えると (12) は、

$$-W_1 W_1' \Big|_0^h + \int_0^h (W_1')^2 dz + k^2 \int_0^h W_1^2 dz + \int_0^h \frac{\bar{u}_1''}{\bar{u}_1 - c} W_1^2 dz = 0 \quad (22)$$

平均流の自由端の場合の値 $W_1(z) = i k C A \exp[i k(x - ct)] \sinh k(z - h_1) / \sinh k h_1$ を近似値とすると次になる。

$$C^2 \left[k \coth k h_1 + \frac{\rho_1}{\rho_2} k \coth k h_2 \right] + \int_0^h \frac{\bar{u}_1''}{\bar{u}_1 - c} \left(\frac{\sinh k(z - h_1)}{\sinh k h_1} \right)^2 dz - C \bar{u}'(0) - \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1} g \quad (23)$$

(4) 積分方程式で解く試み

実際の現象の起り方とも関連して興味のひかれる数学的特異性について明確にさせるため、次のような試みをした結果最終的な解決には至っていないが、その考え方を述べてみる。(12), (15), (16) の system を解くと、2 種 Fredholm 型積分方程式が得られる。

$$W_1(z) = \frac{B}{k \coth k h_1 - A_{11} \sinh k h_1} \sinh k(z - h_1) + \int_0^h G(z, \xi; k) \frac{\bar{u}_1''(\xi)}{\bar{u}_1(\xi) - c} W_1(\xi) d\xi \quad (24)$$

$$= \neq \quad A_{11} = (\rho_1/\rho_2) \cdot (g/c^2) + \bar{u}'(0)/c, \quad B = \rho_2/\rho_1 \cdot W_2'(0)$$

$$G(z, \xi; k) = \begin{cases} \frac{A_{11} \sinh k \xi \sinh k(h_1 - z) - k \coth k \xi \sinh k(h_1 - z)}{A_{11} \sinh k h_1 - k \coth k h_1} \cdot \frac{1}{k} & 0 \leq z < \xi \\ \frac{A_{11} \sinh k \xi \sinh k(h_1 - z) - k \coth k \xi \sinh k(h_1 - z)}{A_{11} \sinh k h_1 - k \coth k h_1} \cdot \frac{1}{k} & \xi < z \leq h_1 \end{cases}$$

$G(z, \xi; k)$ は Helmholtz 型に対するグリーン函数である。逐次近似法によって

$$W_1(z) = \frac{B \sinh k(z - h_1)}{k \coth k h_1 - A_{11} \sinh k h_1} + \int_0^h G(z, \xi; k) \frac{\bar{u}_1''(\xi)}{\bar{u}_1(\xi) - c} \frac{B \sinh k(\xi - h_1)}{k \coth k h_1 - A_{11} \sinh k h_1} d\xi \\ + \cdots + \int_0^h G(z, \xi; k) \frac{\bar{u}_1''(\xi)}{\bar{u}_1(\xi) - c} \left(\int_0^h G(\xi, \eta; k) \frac{\bar{u}_1''(\eta)}{\bar{u}_1(\eta) - c} \frac{B \sinh k(\eta - h_1)}{k \coth k h_1 - A_{11} \sinh k h_1} d\eta \right) d\xi \quad (25)$$

これが一級収束であるために、

$$\max \left[G(z, \xi; k) \frac{\bar{u}_1''(\xi)}{\bar{u}_1(\xi) - c} \right] < \frac{1}{h_1} \quad (26)$$

(26) によって、 C の領域の評価とある程度行えるのではないかと考えているが、これ以上の進展については、特異核のこともあって残された問題である。

§4. あとがき

内部波の発生から碎波までの遷移現象である不規則波の水理学的性質について、周波数解析の方法によって若干明らかにした。また規則波の解析をいくつか試みたが、それぞれに特徴があり、これらと実験値との比較が、今後の検討課題である。

東北工大講師阿部至雄には、多くの適切な御教示を賜り、また相談にのって頂いた。実験に当っては防協工学、応用水理学講座の皆様の御助力を得た。なお本論文は、昭和 45 年度文部省科学研究費の補助を受けた。謝意をこめてここに記します。

参考文献 1. Yeh: Homogeneous Fluid. 1965

2. 浜田徳一: 第 15 回海講. 1968

3. Ince: Ordinary differential equs. 1926

3. 大井鉄郎: 偏微分 Eq. とその応用. 1966