

吊橋の最大の欠点の一つである「振動し易い」特性をなくするため、筆者等は吊橋にダンパーを取り付ける研究をここ数年続けてきている。

本文は、才23回土木学会年次学術講演会に於て発表した「ダンパーを有する深の横振動に関する三の考察」で導いた解法を単径間吊橋に応用したものである。深や吊橋等のフレキシブルな構造物にダンパー（粘性抵抗）を取り付けた場合、振動性状の変化、即ち振動モード、振動数の変化、位相ずれ等の生じることは周知であるが、これを定性的にも取り扱っている文献は少ない。本文では最も簡単な吊橋を考え、この補剛桁にダンパーを取り付けた場合の振動性状の変化を定性的に見ようとするものである。用いるダンパーは速度比例型であり、吊橋は次の仮定に基づいているものとする。(1) 補剛桁は、曲げ剛性 EI をもつ連続した棒であり、質量はない。(2) 吊桁は伸縮性及び曲げ剛性をもたない。(3) ケーブルはヤング率 E_c 、断面積 A_c をもち、形状は放物線とする。(4) ケーブル及び補剛桁の質量は、吊桁と補剛桁の連結部に集中的に作用するものとし、ケーブル及び補剛桁の振動時における変位は鉛直方向のみを考慮する。(5) ダンパーは前述の集中質量に作用する。

§1. 補剛桁の変形と施力の関係及びケーブルの変形と施力の関係

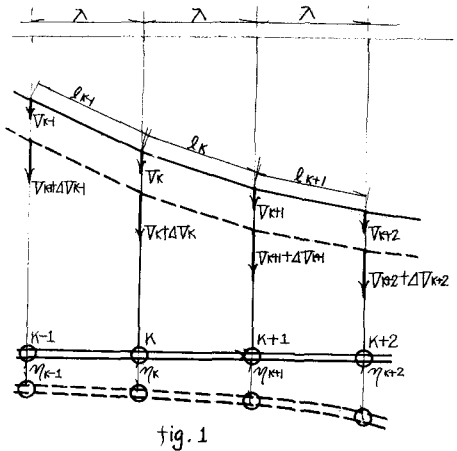


fig. 1

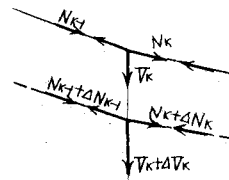


fig. 2

fig. 1 に於て、三連モーメントの定理より、補剛桁の下方面のたわみ η_K と格点モーメント M_K との間には次の関係がある。

$$(-\eta_{K-1} + 2\eta_K - \eta_{K+1}) = \frac{\lambda^2}{6EI} (M_{K-1} + 4M_K + M_{K+1}) \quad (1)$$

死荷重によりケーブルに付いていた張力による複

元力も考え、ケーブルの張力の鉛直方向の増加分を ΔV_K とすれば、fig. 2 より次の関係が得られる。

$$(N_{K+1} + \Delta N_{K+1}) \frac{(y_K + \eta_K) - (y_{K+1} + \eta_{K+1})}{l_{K+1}} - (N_K + \Delta N_K) \frac{(y_{K+1} + \eta_{K+1}) - (y_K + \eta_K)}{l_K} = V_K + \Delta V_K \quad (2)$$

$$\text{変形前の力の釣り合いより} \quad N_{K+1} \left(\frac{y_K - y_{K+1}}{l_{K+1}} \right) - N_K \left(\frac{y_{K+1} - y_K}{l_K} \right) = V_K \quad (3)$$

$$N_{K+1} \frac{\lambda}{l_{K+1}} = N_K \frac{\lambda}{l_K} = H \quad (4)$$

$$\text{変形後では} \quad \Delta N_{K+1} \frac{\lambda}{l_{K+1}} = \Delta N_K \frac{\lambda}{l_K} = \Delta H \quad (5)$$

これ等の式(2)~(5)を用いて $\Delta H \eta_K = 0$ とおけば

$$\Delta V_K = \frac{H}{\lambda} (-\eta_{K-1} + 2\eta_K - \eta_{K+1}) + \frac{\Delta H}{\lambda} (-y_{K+1} + 2y_K - y_{K+1}) \quad (6)$$

水平反力の増加分 ΔH はケーブルの伸び Δl_k と変形の関係より定められ、

$$\Delta l_k = (\eta_k - \eta_{k+1})(y_k - y_{k+1}) / l_k \quad (7)$$

$$\times \Delta l_k = \Delta N_k l_k / (E_c A_c) = (l_k)^2 \Delta H / (E_c A_c \lambda) \quad (8)$$

$$\text{故に式(7), (8)より} \quad \Delta H = E_c A_c \lambda (y_k - y_{k+1})(\eta_k - \eta_{k+1}) / (l_k)^3 \quad (9)$$

式(9)を用いて式(6)を表わすと

$$\Delta V_k = \frac{H}{\lambda} (-\eta_{k+1} + 2\eta_k - \eta_{k-1}) + \frac{E_c A_c}{(l_k)^3} (y_{k+1} + 2y_k - y_{k-1})(y_k - y_{k+1})(\eta_k - \eta_{k+1}) \quad (10)$$

§2. 運動方程式

運動(鉛直方向に振動)している補剛桁の格点の集中質量(ダンパー付)の運動方程式は

$$[m]\{\ddot{\eta}\} + [C]\{\dot{\eta}\} + K\{\eta\} = [P] \quad (11)$$

で表わされる。即ち、左辺第1項は質量 m (ここでは同一質量としているから $[m]$ は $m[I]$) による慣性力、第2項はダンパーによる粘性抵抗力、第3項は補剛桁の曲げ剛性による反力及びケーブルの水平反力の増加と伸びによる反力の増加分の鉛直方向の成分であり、右辺は外力の項である。因みに格点 K について運動方程式を立てみると次のようになる。

$$m\ddot{\eta}_k + C\dot{\eta}_k + \frac{1}{\lambda} (-M_{k+1} + 2M_k - M_{k-1}) + \frac{H}{\lambda} (-\eta_{k+1} + 2\eta_k - \eta_{k-1}) + \frac{E_c A_c}{(l_k)^3} (y_{k+1} + 2y_k - y_{k-1})(y_k - y_{k+1})(\eta_k - \eta_{k+1}) = P_k \quad (12)$$

$$\text{則式をラプラス変換して、複素行列で表示すれば} \quad [A]\{Y\} = \{P\} \quad (13)$$

$$\text{但し} \quad L\{\eta(x)\} = Y(s), \quad L\{\dot{\eta}(x)\} = sY(s) - \eta(x=0), \quad L\{\ddot{\eta}(x)\} = s^2 Y(s) - s\eta(x=0) - \dot{\eta}(x=0)$$

$$[A] = \begin{vmatrix} (a_{10}), & (S^2 + N_1 S + a_{11}), & (a_{12}), & (a_{13}), & 0, & \dots, & 0 \\ (a_{20}), & (a_{21}), & (S^2 + N_2 S + a_{22}), & (a_{23}), & (a_{24}), & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0, & \dots, & 0, & (a_{n-2}), & (a_{n-1}), & (S^2 + N_n S + a_{nn}), & (a_{nn+1}) \end{vmatrix} \quad (14)$$

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} q_1(s) + d_{01}(1 + N_1) + v_{01} \\ q_2(s) + d_{02}(1 + N_2) + v_{02} \\ \vdots \\ q_n(s) + d_{0n}(1 + N_n) + v_{0n} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} N_k &= \frac{C_k}{m} \\ d_{0k} &= \eta_k(x=0) \\ v_{0k} &= \left(\frac{d\eta_k}{dx} \right)_{x=0} \end{aligned}$$

$[A]=0$ といふ行列式は特性方程式であり、一般には次のような2次因子の積の形で表わされる。

$$(S^2 + a_1 S + \beta_1)(S^2 + a_2 S + \beta_2) \dots (S^2 + a_{m-1} S + \beta_{m-1})(S^2 + a_m S + \beta_m) = 0 \quad (16)$$

一方、外力の像関数 $q_k(s)$ は、一般に $q_{1k}(s)/q_{2k}(s)$ で表わされる。

式(13)~(16)より焦点の変位 η_k の像関数 Y_k は次のように書ける。

$$Y_k = \frac{q_k(s)}{q_k(s)} + \frac{A_n s + B_{k1}}{s^2 + \alpha_1 s + \beta_1} + \frac{A_2 s + B_{k2}}{s^2 + \alpha_2 s + \beta_2} + \dots + \frac{A_m s + B_{km}}{s^2 + \alpha_m s + \beta_m} \quad (17)$$

式 (17) において、 $q_k(s)$ 、 $A_{k1} \sim A_{km}$ 、 $B_{k1} \sim B_{km}$ は先に述べた吊橋の諸常数、 γ ンパーキャパシター、及び各復点の初期値（初期変位、初期速度）より与えられる。

しかし、 $\alpha_1 \sim \alpha_m$ 、 $\beta_1 \sim \beta_m$ は、各復点の初期値の如何にかかわらず、吊橋の諸常数のみより求め得るものであり、 γ ンパーキャパシターを単独にパラメーターとしてとり得る。

式 (17) の右辺の第 1 項は強制振動（狭義）の像関数であり、第 2 項以降は自由振動の像関数である。強制振動の実像は外力の関数により決定されるが、自由振動（粘性減衰振動）の円振動数 ω_r 及び対数減衰率 σ_r は次式より、 $\alpha_1 \sim \alpha_m$ 、 $\beta_1 \sim \beta_m$ のみを用いて求められる。

$$\omega_r = (\beta_r - \alpha_r^2/4)^{1/2} \quad (18)$$

$$\sigma_r = \pi \alpha_r / (\beta_r - \alpha_r^2/4)^{1/2} = \pi \alpha_r / \omega_r \quad (19)$$

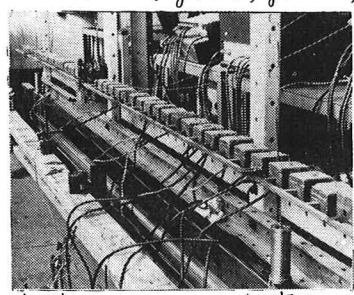
但し、式 (18)、(19) は、 $\beta_r - \alpha_r^2/4 > 0$ の場合であり、 $\beta_r - \alpha_r^2/4 \leq 0$ の場合には、粘性減衰振動を行なわないで過減衰の状態となる。

又、位相ずれ φ_r は

$$\varphi_r = \text{ARTGH} \{ [\beta_r - \alpha_r^2/4]^{1/2} / [-\alpha_r/2] \} \quad (20)$$

§3 数値計算例及び模型実験

写真 1 に示されるような単径向吊橋（径間 $l = 500 \text{ cm}$ ，補剛桁の曲げ剛性 $EI = 1.67 \times 10^8 \text{ g.cm}$ ，サグ比 $n = 1/10$ ， $E_c A_c = 3.8 \times 10^7 \text{ g}$ ，総重量 $W = 1.23 \times 10^5 \text{ g}$ ，水平反力 $H = 1.54 \times 10^5 \text{ g}$ ）に、写真 2 に示されるような速度比例型 γ ンパーを補剛桁の $l/8$ 点に対称に取りつけた場合の実験値の数列を fig.AS1, fig.S1 ~ fig.AS3, fig.S3 に示す。



↑ 写真 1

↓ 写真 2

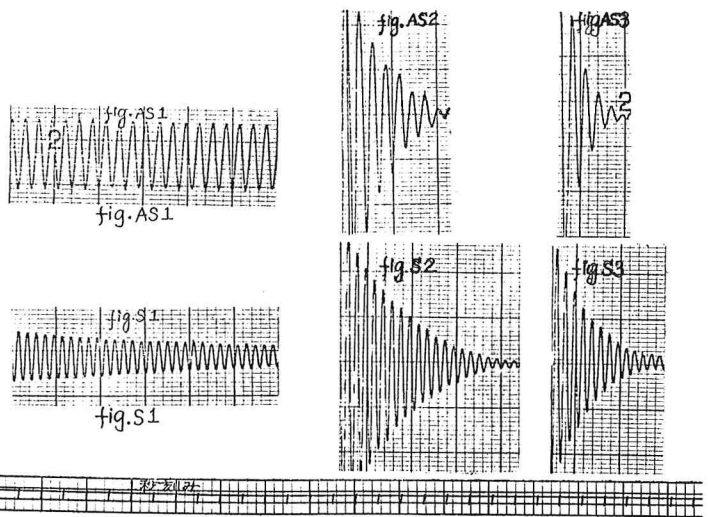
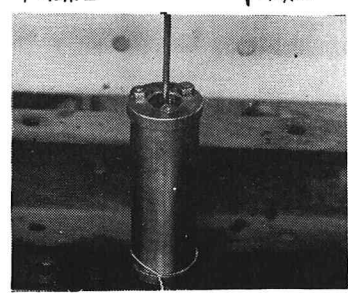


fig. S-1, fig. AS-1 はダンパーのない場合の逆対称一次, 対称一次の夫々の振動波形, fig. S2, fig AS2 はキャパシター, $C=40\text{ gS/cm}$ のダンパーをつけた場合, fig. S3, fig AS3 はキャパシター $C=120\text{ gS/cm}$ のダンパーをつけた場合の逆対称一次, 対称一次の夫々の粘性減衰振動波形を示す。これ等をまとめると次の表ようになる。

ダンパースイッチ	逆対称一次振動		対称一次振動	
	円振動数	対数減衰率	円振動数	対数減衰率
30 gS/cm	10.6	0.28	16.1	0.12
120 "	10.6	0.69	16.1	0.32
0	10.6	0.006	16.1	0.027

写真 1 に示される吊橋模型を次のような 8 - Segment の多復点系と考へて, 復点 1, 7 にダンパーを取りつけた場合と, 式 (1) ~ (17) を用いて解き, 式 (18), (19) の円振動数 ω_r , 対数減衰率 δ_r を求める。その結果を fig. 4, fig. 5 に夫々示す。

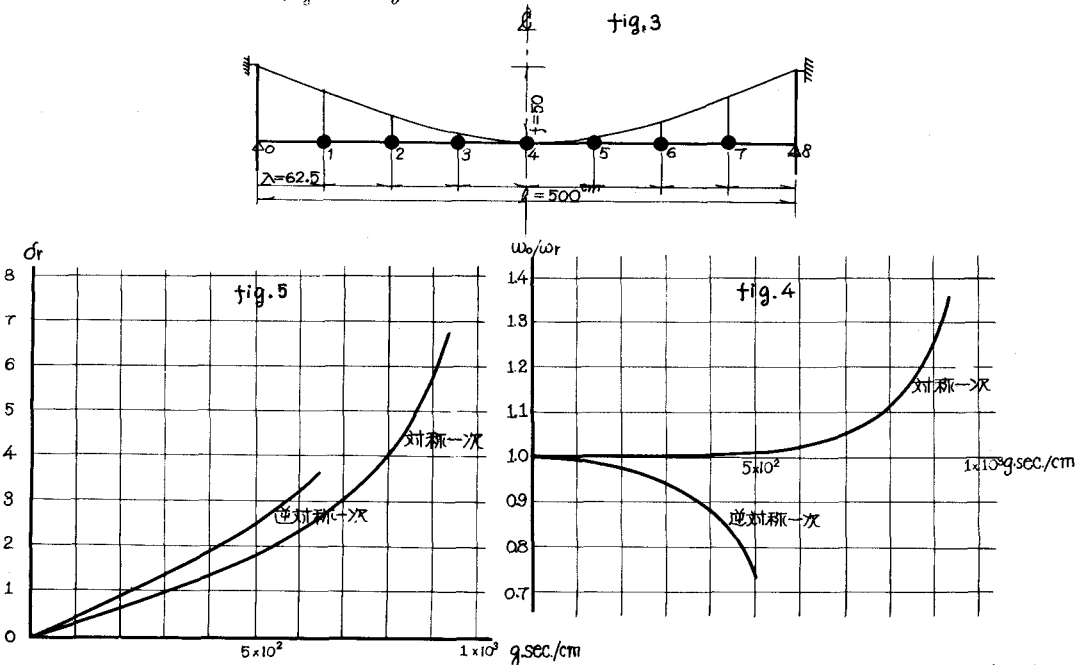


fig. 4 はダンパーのない場合の円振動数 ω_0 とダンパーをつけた場合の円振動数 ω_r との比を縦軸に, ダンパーキャパシターを横軸にと, てあり, fig. 5 は対数減衰率を縦軸, ダンパーキャパシターを横軸にとつてある。これ等の結果より解るように対数減衰率 δ_r が 1.5 ぐらいまでは円振動数も大きな変化をしていない。これは実験値からもうかづわれる。又この範囲では δ_r はキャパシターと一次の関係にあるとみてよい。吊橋の防振, 制振作用は $\delta_r \approx 1.5 \sim 2.0$ までを考慮すれば充分であるから, ダンパーの効果は顕著であると考えられる。困みにキャパシターと吊橋の総重量の比を $\delta_r \approx 1.0$ の場合に来めてみると逆対称一次振動では 1.8×10^3 , 対称一次振動では 2.5×10^3 である。

本文は主として自由振動について述べたが, 強制振動, さらに連続吊橋の振動等と同じ方法により考えられる。