

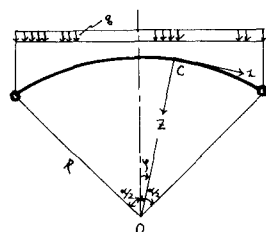
要旨

ここでは 両端ヒンジの円弧軸を持つアーチ梁が 等分布荷重をうけたときの初期曲げモーメントを考慮したねじれ座屈について論じている。 $\sigma_{cr} = E \cdot \alpha_k (i/\alpha R)^2$ の形で座屈応力を与え初期曲げモーメントを考慮した場合と考慮しない場合の α_k を種々のねじり剛性, 曲げねじり剛性, 輻射軸まわりの曲げ剛性 及び中心角のものについて求めたものである。

1. 序論

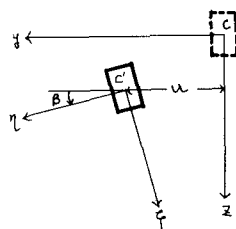
ここで取り扱っている問題は 2 ヒンジ円弧アーチ梁が等分布荷重を受けて 側方への曲げとねじりが連成した形で面外座屈を起すような場合である。このようなアーチの面外座屈を考える場合、従来は最初から仮定していたアーチ軸を含む面内曲げモーメント(初期曲げモーメント)を省略していたが 本論文ではアーチの剛性を種々変化させた場合について初期曲げモーメントが予測した面外座屈の限界値にどの程度の影響を与えるかについて調べている。

アーチ梁のねじり中心を連ねて得られる軸をアーチ軸と呼び
アーチ梁はこのアーチ軸により代表させるものとする。



2. 基礎微分方程式の誘導

アーチ軸のねじり角 β 及び各軸方向の変位は 図-1 に示した方向に変位するものを正とする。荷重は鉛直荷重とし 変位後もアーチ軸を含む面内に平行な状態を保つものとする。従ってアーチ軸は 等分布荷重 q を受けて次式で与えられる水平反力と初期曲げモーメントを受けている。



$$H = \frac{\frac{3}{2} \sin \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} (\cos \frac{\alpha}{2} + \cos \frac{3\alpha}{2}) - \frac{7}{8} \sin \frac{\alpha}{2}}{2 (\frac{\alpha}{2} - \frac{3}{4} \sin \alpha + \frac{\alpha}{4} \cos \alpha)} \cdot R q$$

$$M = -\left(\frac{8R^2}{4} \cos \alpha + HR \cos \frac{\alpha}{2}\right) + \left(\frac{8R^2}{4} \cos 2\varphi + HR \cos \varphi\right)$$

(図 - 1)

———— (1), (2)

==2 本論文の主旨となることは この荷重状態でのアーク軸の変形は無視するが この内力状態を考慮して α_k を求めることである。今アーク軸に働く曲げまわりの曲げモーメントを M_φ 、 φ 軸まわりのねじりモーメントを M_T とし それぞれ変形を増大させるようなモーメントを正とすれば M_φ , M_T はそれぞれ次式で与えられる。

$$M_\varphi = -EJ_z \left(\frac{d^2 u}{ds^2} + \frac{1}{R} \cdot \beta \right) \quad M_T = -EC_{bd} \left(\frac{d^3 \beta}{ds^3} - \frac{1}{R} \cdot \frac{d^2 u}{ds^2} \right) + GJ_T \left(\frac{d\beta}{ds} - \frac{1}{R} \cdot \frac{du}{ds} \right) \quad (3), (4)$$

==2 $s = \alpha \varphi$, EJ_z は梁の z 軸まわりの曲げ剛性 GJ_T はねじり剛性 EC_{bd} は曲げねじり剛性である。次にアーク軸の微小部分を取り出して作用する力の平衡を見ると 図-2 で示したようになる。今2次以上の微小量を省略して力の釣合を考えると結局次の関係が得られる。

$$\frac{d^2}{ds^2}(M_\varphi) - \frac{d}{ds} \left(\frac{M_\varphi}{R} \right) + \frac{d}{ds} \left(\frac{M}{R} \cdot \frac{du}{ds} \right) - N \frac{d^2 u}{ds^2} = 0 \quad (5)$$

$$\frac{d}{ds}(M_\varphi) + \frac{M_\varphi}{R} + \frac{M \cdot \beta}{R} + \alpha \beta \cos \varphi = 0 \quad (6)$$

(5), (6) 式に (3), (4) 式の関係を挿入すると u, β についての基礎微分方程式が得られる。

$$-\frac{1}{R^2} \left(G_T + \frac{C_w}{R^2} \right) \cdot u^{(iv)} + \left(\frac{G_T}{R^2} - \frac{H}{R} \right) \cdot u'' + \frac{1}{R^2} (M \cdot u') + \frac{C_w}{R^4} \beta - \frac{1}{R^2} (G_T + G_T) \beta'' = 0$$

$$\frac{C_w}{R^5} u - \frac{1}{R^2} (G_T + G_T) u'' - \frac{C_w}{R^4} \beta^{(iv)} + \frac{G_T}{R^2} \beta'' - \frac{G_T}{R^2} \beta + \left(\alpha \cos \varphi + \frac{M}{R} \right) \cdot \beta = 0$$

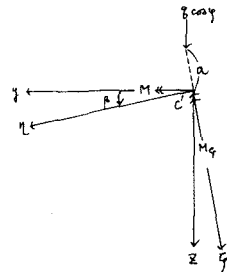
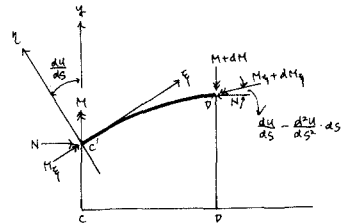
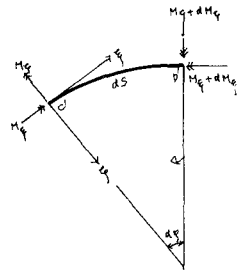
$$(7), (8)$$

==2' は φ について微分したことを表わし $G_T = EJ_z$

$C_T = GJ_T$, $C_w = EC_{bd}$ である。

3. 座屈荷重の算出

(7), (8) 式に示したような変数 u, β の係数が非定数であるような連立微分方程式を解くのは一般に容易でない。従って ==2' は $u = RT \sum_{i=1}^n A_i \cdot v_i$, $\beta = T \sum_{i=1}^n B_i \cdot \chi_i$ としさらに v_i, χ_i は i) u と β に加えられている境界条件はすべて満足すること。 ii) 互に線型独立であること。なる条件を満足するように座屈形を仮定して解くのが得策であろうと思われる。今 u, β について最初の2項をとって (7), (8) 式に代入すれば横荷重とねじりモーメントの変化に対して $\delta \delta y, \delta M_T$



(図-2)

を得る。仮想変位として $\delta u_i = v_i(\varphi)$, $\delta \beta_i = \alpha_i(\varphi)$ ($i=1, 2$) を選べば v_i, α_i は u, β と同等の境界条件を満足している。結局次に示すような力及び仮想変位に対する Lagrang の方程式が得られる。

$$\begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & E_{14} \\ & E_{22} & E_{23} & E_{24} \\ & & E_{33} & E_{34} \\ & & & E_{44} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = 0 \quad (9)$$

== 係数行列の各エレメントを示す。

$$E_{11} = -\frac{1}{R^2} \left(C_J + \frac{C_W}{R^2} \right) \int (v_1'')^2 d\varphi - \left(\frac{C_T}{R^2} - H \right) \int (v_1')^2 d\varphi - \frac{1}{R} \int M (v_1')^2 d\varphi$$

$$E_{22} = -\frac{1}{R^2} \left(C_J + \frac{C_W}{R^2} \right) \int (v_2'')^2 d\varphi - \left(\frac{C_T}{R^2} - H \right) \int (v_2')^2 d\varphi - \frac{1}{R} \int M (v_2')^2 d\varphi$$

$$E_{33} = -\frac{C_W}{R^4} \int (\alpha_1'')^2 d\varphi - \frac{C_T}{R^2} \int (\alpha_1')^2 d\varphi + a_g \int \alpha_1^2 \cos \varphi d\varphi + \frac{1}{R} \int M \alpha_1^2 d\varphi - \frac{C_T}{R^2} \int \alpha_1^2 d\varphi$$

$$E_{44} = -\frac{C_W}{R^4} \int (\alpha_2'')^2 d\varphi - \frac{C_T}{R^2} \int (\alpha_2')^2 d\varphi + a_g \int \alpha_2^2 \cos \varphi d\varphi + \frac{1}{R} \int M \alpha_2^2 d\varphi - \frac{C_T}{R^2} \int \alpha_2^2 d\varphi$$

$$E_{12} = -\frac{1}{R^2} \left(C_J + \frac{C_W}{R^2} \right) \int (v_1'')^2 d\varphi - \left(\frac{C_T}{R^2} - H \right) \int (v_1')^2 d\varphi - \frac{1}{R} \int M (v_1')^2 d\varphi$$

$$E_{13} = \frac{C_W}{R^4} \int \alpha_1'' v_1'' d\varphi + \frac{1}{R^2} (C_J + C_T) \int \alpha_1' v_1' d\varphi$$

$$E_{14} = \frac{C_W}{R^4} \int \alpha_2'' v_1'' d\varphi + \frac{1}{R^2} (C_J + C_T) \int \alpha_2' v_1' d\varphi$$

$$E_{23} = \frac{C_W}{R^4} \int \alpha_1'' v_2'' d\varphi + \frac{1}{R^2} (C_J + C_T) \int \alpha_1' v_2' d\varphi$$

$$E_{24} = \frac{C_W}{R^4} \int \alpha_2'' v_2'' d\varphi + \frac{1}{R^2} (C_J + C_T) \int \alpha_2' v_2' d\varphi$$

$$E_{17} = -\frac{C_W}{R^4} \int \alpha_1'' \alpha_2'' d\varphi - \frac{C_T}{R^2} \int \alpha_1' \alpha_2' d\varphi + a_g \int \alpha_1 \alpha_2 \cos \varphi d\varphi + \frac{1}{R} \int M \alpha_1 \alpha_2 d\varphi - \frac{C_T}{R^2} \int \alpha_1 \alpha_2 d\varphi$$

尚 == 各エレメントの積分は $-\alpha/2$ から $\alpha/2$ までの定積分である。

従って (9) 式より得られる係数行列式を 0 とする様な 水平反力 H 及び 座屈の限界値に存在しなければならないが 各エレメントの M を含む項を省略すれば 従来より解が得られる初期曲げモーメントを考慮しない場合の座屈限界値を与えることになる。

3. 数値計算及びその考察

境界条件を満足するような対称変形を表わす座屈型を次式のように選んで種々のねじり剛性曲げ剛性について α_K を計算した結果が図-3, 4, 5 である。

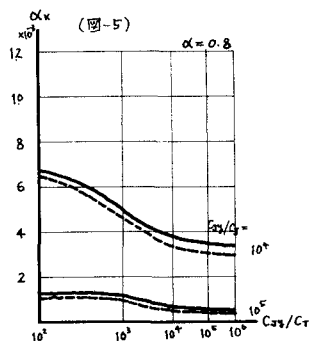
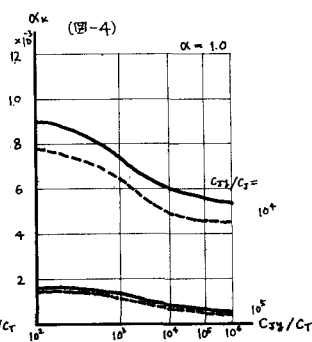
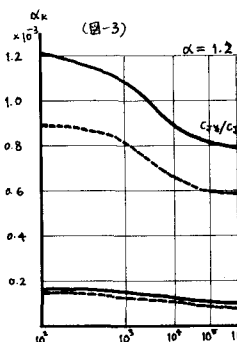
$$u = RT \left(\cos \frac{\pi}{\alpha} y + \frac{1}{3} \cos \frac{3\pi}{\alpha} y \right), \quad \beta = T \left(B_1 \cos \frac{\pi}{\alpha} y + B_2 \cos \frac{3\pi}{\alpha} y \right)$$

図-3, 4, 5 に於いて実線は初期曲げモーメントを考慮しない場合の $\alpha_K - G_y/C_T$ 曲線を示し、点線は初期曲げモーメントを考慮した場合の $\alpha_K - G_y/C_T$ 曲線を示している。すなわち G_y はアール梁の面内曲げ剛性を表わす。

一般に $\alpha_K - G_y/C_T$ 曲線は $G_y/C_T = 10^3$ 程度までは比較的变化が少なく $10^3 \sim 10^5$ の間に急な変化がみられるが 10^5 以上には又変化が少くなり、これらが図-3, 4, 5 からうかがえる。この傾向は $G_y/C_T = 10^5$ の方が 10^4 の場合より著しく、 $G_y/C_T = 10^4$ の場合は $G_y/C_T = 10^3$ 程度に至るまでの間もかなりの変化がみられる。このことはねじり剛性が大きく、かつ側方への曲げ剛性が小さい場合にはねじり座屈よりも他の座屈形状、例えば横倒し座屈とか、面内座屈の方が起りやすいことを示しているものと思われる。従ってアール梁のねじり座屈を防止する為にはねじり剛性 C_T は G_y/C_T の値にして 10^3 以下であることが望ましい。又一般に α が大きい程換算すればアール梁が高い程度座屈荷重は低下すると思われる。

次に初期曲げモーメントを考慮した場合としない場合の α_K の計算結果を比較してみよう。 $G_y/C_T = 10^4, 10^5$ 共に $\alpha = 0.8$ で約12% $\alpha = 1.0$ で約10% $\alpha = 1.2$ で約7% α_K の値が減少している。中心角 α が大きい程両者の差が揃っていき、(2)式から中心角 α ($\alpha = 0.8 \sim 1.2$ の範囲では) が大きい程初期曲げモーメントも大きくなることから説明される。

(尚、数値計算には東北大学計算センターのNEAC-2200を使用)



参考文献

- 1) Timoshenko, S: "Theory of Elastic Stability"
- 2) 倉田正嗣: "応用弾性学"
- 3) 倉田 茂: "アール橋のねじり座屈について" 土木学会論文集 第95号