

不連続荷重にも適用できる梁の高精度差分式について

東北大学 正員 佐武正雄

1. まえがき

梁の微分方程式

$$\frac{d^4}{dx^4} y(x) = \frac{1}{EI} p(x) \quad (1.1)$$

を差分化し、

$$\Delta^4 y_x = y_{x-2} - 4y_{x-1} + 6y_x - 4y_{x+1} + y_{x+2} = \frac{h^4}{EI} p_x \quad (1.2)$$

(ただし、 h は分割長)として数値的に解くことは広く行われているが、この際

- i). 不連続な分布荷重や集中荷重列 ($P_x = P_x/h$ とする) に対しても (1.2) 式を適用する。
- ii). 境界条件式に対して、 $\frac{dy}{dx}$ 、 $\frac{d^2y}{dx^2}$ 等を差分化した式を用いる。従って、中央差分を用いるために、境界条件を越え、架空の分点を設定する。

等のことが行われている。しかし、差分式は元来、関数の Taylor 展開を基礎としているので、撓み $y(x)$ の高次の微係数(すなわち、せん断力、分布荷重等)が不連続となるような場合に、連続な範囲を越えて適用することは、根拠がなく、従って誤差も大きくなる。

本文は、すでに板の問題などに用いられている考え方 (Mehrstellenverfahren²⁾) を取り入れ、図-1に示すような各区間で区分的に連続な分布荷重と、分点に集中荷重をうける場合に適用できる差分式を導いたものである。 y の 7 次導関数以上を省略しているので、分布荷重が 2 次以下の関数であれば、この差分式で正解が得られる。また、 y の代りに y' 、 y'' 等の微係数を含む式も導いているが、これらにより、境界条件の適用や、モーメント値の計算を容易に正確に(同一精度で)行うことができる。同様の考え方で、振動解析に利用できる差分式を導くこともできるが、ここでは省略する。

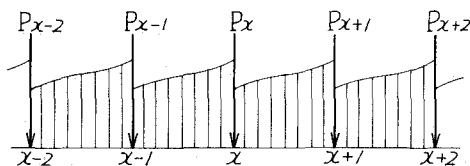


図 - 1

2. 式の誘導

図-2に示すように分割長を h とすれば、分点 0 の両隣点 1, -1 の撓みは、Taylor 展開を用い、それぞれ、

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= e^{hD} y_0 = y_0 + h y_0' + \frac{h^2}{2} y_0'' + \frac{h^3}{6} y_0''' + \frac{h^4}{24} y_0^{(4)} + \frac{h^5}{120} y_0^{(5)} + \frac{h^6}{720} y_0^{(6)} + o(h^7) \\ y_{-1} &= e^{-hD} y_0 = y_0 - h y_0' + \frac{h^2}{2} y_0'' - \frac{h^3}{6} y_0''' + \frac{h^4}{24} y_0^{(4)} - \frac{h^5}{120} y_0^{(5)} + \frac{h^6}{720} y_0^{(6)} + o(h^7) \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

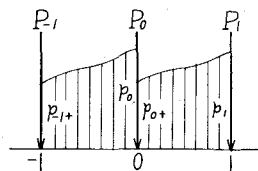


図 - 2

とかくことが出来る。ここに、 y_0'' 以上について特に subscript "0" と "0+" を用い分点 0 の左右の値を区別したのは、 $y_0 \sim y_0''$ は 0 点の両側で相等しい値をもつが、 y_0'' 以上は 0 点の両側で、荷重状態によって異なった値をもつからである。

図示の荷重に対して明らかに

$$y_{0+}''' = y_0''' + \frac{P_0}{EI}, \quad (2.2)$$

$$\left. \begin{aligned} y_{0+}^{IV} &= \frac{1}{EI} P_{0+}, & y_0^{IV} &= \frac{1}{EI} P_0 \\ y_{0+}^V &= \frac{1}{EI} P_{0+}', & y_0^V &= \frac{1}{EI} P_0' \\ y_{0+}^{VI} &= \frac{1}{EI} P_{0+}'', & y_0^{VI} &= \frac{1}{EI} P_0'' \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

である。pに関するTaylor展開

$$\left. \begin{aligned} P_1 &= P_{0+} + h P_{0+}' + \frac{h^2}{2} P_{0+}'' + O(h^3) \\ P_{-1} &= P_0 - h P_0' + \frac{h^2}{2} P_0'' + O(h^3) \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

を用い、 $O(h^3)$ の誤差を無視すれば、

$$\left. \begin{aligned} h^2 P_{0+}'' &= 2(P_1 - P_{0+} - h P_{0+}') \\ h^2 P_0'' &= 2(P_{-1} - P_0 + h P_0') \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

とかけると、(2.1)式は結局

$$y_1 = y_0 + h y_0' + \frac{h^2}{2} y_0'' + \frac{h^3}{6} y_0''' + \frac{h^4}{360EI} (P_1 + 14 P_{0+} + 2 h P_{0+}') + \frac{h^2}{6EI} P_0 \quad (2.6)$$

$$y_{-1} = y_0 - h y_0' + \frac{h^2}{2} y_0'' - \frac{h^3}{6} y_0''' + \frac{h^4}{360EI} (P_{-1} + 14 P_0 - 2 h P_0') \quad (2.7)$$

と変形される。(2.4)式で $O(h^3)$ を無視したことは、(2.6)、(2.7)式において $O(h^3)$ の誤差を無視したことに相当し、pが2次以下(yが6次以下)の関数であれば誤差を生じないことになる。

yの微係数に関するTaylor展開を用いれば、同様にして

$$h y_1' = h y_0' + h^2 y_0'' + \frac{h^3}{2} y_0''' + \frac{h^4}{120EI} (2 P_1 + 18 P_{0+} + 3 h P_{0+}') + \frac{h^2}{2EI} P_0 \quad (2.8)$$

$$h^2 y_1'' = h^2 y_0'' + h^3 y_0''' + \frac{h^4}{12EI} (P_1 + 5 P_{0+} + h P_{0+}') + \frac{h^2}{EI} P_0 \quad (2.9)$$

$$h y_{-1}' = h y_0' - h^2 y_0'' + \frac{h^3}{2} y_0''' - \frac{h^4}{120EI} (2 P_{-1} + 18 P_0 - 3 h P_0') \quad (2.10)$$

$$h^2 y_{-1}'' = h^2 y_0'' - h^3 y_0''' + \frac{h^4}{12EI} (P_{-1} + 5 P_0 - h P_0') \quad (2.11)$$

等が得られる。

(2.6)~(2.11)式の中4式を組み合わせ、 y_0' , y_0'' , y_0''' の消去を行なえば、表-1の結果を得、また y_0' の消去から表-2の結果を得る。これらの表の意味は、たとえば

$$\begin{aligned} h^2 y_{-1}'' - 2 y_{-1} + 4 y_0 - 2 y_1 + h^2 y_1'' \\ = \frac{h^4}{180EI} (14 P_{-1} + 61 P_0 + 61 P_{0+} + 14 P_1 - 13 h P_0' + 13 h P_{0+}') + \frac{2 h^3}{3EI} P_0 \end{aligned} \quad (A-1)$$

$R^2 y_{-1}, R y_{-1}, y_{-1}, y_0, y_1, R y_1, R^2 y_1$	R^4 $EI(P_{-1+}, P_0, P_{0+}, P_1, R P_0', R P_{0+}') \frac{R^3}{EI} P$	式番号
1 -2 4 -2 1	$\frac{14}{180} \frac{61}{180} \frac{61}{180} \frac{14}{180} \frac{13}{180} \frac{13}{180} \frac{2}{3}$	(A-1)
-6 -11 16 -5 2	$\frac{5}{72} \frac{34}{72} \frac{46}{72} \frac{11}{72} \frac{16}{180} \frac{25}{180} \frac{7}{6}$	(A-2)
-1 -2 4 -2 1	$\frac{2}{180} \frac{13}{180} \frac{13}{180} \frac{2}{180} \frac{5}{360} \frac{5}{360} \frac{1}{6}$	(A-3)
2 6 7 -8 1	$\frac{31}{360} \frac{74}{360} \frac{14}{360} \frac{1}{360} \frac{10}{180} \frac{1}{180} \frac{1}{6}$	(A-4)

表-1

$y_{-1}, R^3 y_0'', R^2 y_0'', y_0, y_1, R y_1, R^2 y_1$	R^4 $EI(P_{-1+}, P_0, P_{0+}, P_1, R P_0', R P_{0+}') \frac{R^3}{EI} P$	式番号
1 -1 -2 1	$\frac{1}{360} \frac{14}{360} \frac{14}{360} \frac{1}{360} \frac{1}{180} \frac{1}{180} \frac{1}{6}$	(A-5)
-1 -1 1	$\frac{5}{12} \frac{1}{12} \frac{1}{12} 1$	(A-6)
-2 -3 6 -6 6	$\frac{8}{12} \frac{1}{12} \frac{7}{60} 2$	(A-7)

表-2

等である。更に、(A-1)、(A-2)、(A-6)式と(A-5)式(ただし、分点を一つ右又は左にずらしたものの)とを組合わせて、 y_1'' 又は y_{-1} を消去すれば、表-3に示す諸式が得られる。表-3において、分布荷重が考えられる区間で一つの2次式で表わされるような場合には、 P_{-1} と P_{-1+} 等を区別する必要がなく、また

$$\left. \begin{aligned} P_2 - 4P_{-1} + 6P_0 - 4P_1 + P_2 &= 0 \\ P_{-1} - 3P_0 + 3P_1 - P_2 &= 0 \\ P_{-1} - P_1 + 2R P_0' &= 0 \\ 3P_0 - 4P_1 + P_2 + 2R P_0' &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

$y_{-2}, R^2 y_{-1}, R y_{-1}, y_{-1}, R^3 y_0'', R^2 y_0'', y_0, y_1, y_2$	R^4 $360EI(P_{-2+}, P_{-1}, P_{1+}, P_0, P_{0+}, P_1, P_{1+}, P_2)$	R^5 $180EI(P_{-1}', P_{1+}', P_0', P_{0+}', P_1', P_{1+}') \frac{R^3}{EI} P$	R^3 $6EI(P_{-1}, P_0, P_1)$	式番号
1 -4 6 -4 1	14 42 23 23 42 14 1	-1 1 -13 13 -1 1	1 4 1	(A-8)
	(60 240 60)		(1 4 1)	(A-8')
1 -2 5 -4 1	28 122 23 42 14 1	-13 13 -1 1	4 1	(A-9)
	(29 242 59)		(4 1)	(A-9')
-6 -11 18 -9 2	25 170 232 83 28 2	-16 25 -2 2	7 2	(A-10)
	(18 396 126)		(7 2)	(A-10')
-1 -1 1 -2 1	15 44 14 1	15 -1 1	6 1	(A-11)
	(106 118 -14)		(6 1)	(A-11')

表-3

等の関係があるから、式の右辺は表中()で示したように簡略化することができる。

ここに得られた差分式は、例題にも示すように境界条件をそのまま入れて用いることができるので便利である。また、撓みかゝモーメントを求める場合には、中間分点に対して(A-5)、また、固定端に対して(A-4)式を用いなければならない。これらの諸式を左右入れ替えて用いようとする場合には、奇数次の微係数の符号を変えることに注意する。

3. 例題

図-3に示す固定梁

$$y_0 = y_4 = 0$$

$$y_3 = y_1$$

であるから、(A-10)、(A-8)式により

$$\begin{pmatrix} 18+2, & -9 \\ -4-4, & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{p h^4}{360 E I} \begin{pmatrix} 170+232+83+28+2 \\ 14+42+123+123+42+14 \end{pmatrix} + \frac{p h^4}{180 E I} \begin{pmatrix} -16 \\ -1-1 \end{pmatrix}$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} 20, & -9 \\ -8, & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{p h^4}{360 E I} \begin{pmatrix} 483 \\ 354 \end{pmatrix}$$

$$\therefore y_1 = \frac{169}{480} \frac{p h^4}{E I} = \frac{169}{122880} \frac{p l^4}{E I}$$

$$y_2 = \frac{19}{30} \frac{p h^4}{E I} = \frac{19}{7680} \frac{p l^4}{E I}$$

また、(A-4)、(A-5)式より

$$2 h^2 y_0'' = 8 y_1 - y_2 + \frac{p h^4}{360 E I} (74+14+1-20) = \frac{19}{8} \frac{p h^4}{E I}$$

$$h^2 y_0'' = (1+1) y_1 - 2 y_2 - \frac{p h^4}{360 E I} (1+14+14+1) = -\frac{31}{48} \frac{p h^4}{E I}$$

$$\therefore \left. \begin{aligned} M_0 &= -E I y_0'' = -\frac{19}{16} p h^2 = -\frac{19}{256} p l^2 \\ M_2 &= -E I y_2'' = \frac{31}{48} p h^2 = \frac{31}{768} p l^2 \end{aligned} \right\}$$

を得る。荷重が区分的線形荷重(2次関数以下)であるから、これらの値は当然正解値である。

4. あとがき

Taylor 展開の適用範囲を考慮して、梁の解析に応用できる精度の高い差分式を導いた。詳細については、土木学会論文集(投稿中)を参照されたい。

参考文献

- 1) Zurmühl, R. : Behandlung der Plattenauflage nach dem verbesserten Differenzenverfahren, Z. angew. Math. Mech. 37 (1957), 1-16
- 2) Collatz, L. : Das Mehrstellenverfahren bei Plattenaufgaben, Z. angew. Math. Mech. 30 (1950), 385-388.
- 3) Collatz, L. : Numerische Behandlung von Differentialgleichungen, Springer-Verlag (1951)