

立体ラーメンの振動解析

東北大学 正員 佐武 正雄
東北大学 学生員 ○広田 嘉宵

(1) まえがき

立体ラーメンの振動解析は一般には非常に複雑な問題であるが 本文は単純な例として単層対称立体ラーメンをとりあげ その一次固有振動数を計算と実験とによって求め比較を行ったものである。なお最後にトランスファー・マトリックスによる解法の概略についても説明する。

(2) エネルギー法による固有振動数の計算

図-1に示すような単層立体ラーメンを考える 単層立体ラーメンの一次振動形の近似として 図-2に示すように 点A, 点Bに水平集中荷重Pが加わった場合のタワミ形をとる。この時の柱及び梁のタワミ曲線をそれぞれ y_1, y_2, y_3 とすれば

$$y_1 = \frac{P x^2}{EI} \left\{ \frac{3+k}{4(6+k)} h - \frac{1}{12} x \right\} \quad (2.1)$$

$$y_2 = \frac{P}{4EI} \frac{x}{k(6+k)} (2x - kh)(x - kh) \quad (2.2)$$

$$y_3 = \frac{P h^3}{4EI} \left\{ \frac{3+k}{6+k} - \frac{1}{3} \right\} \quad (2.3)$$

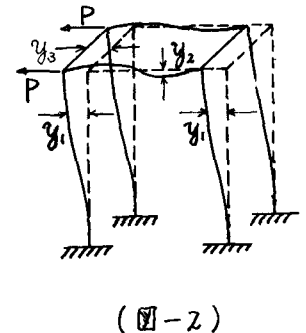
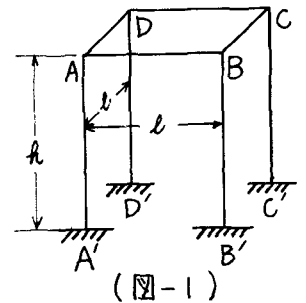
$$\text{但し } k = \frac{I_h}{I_l}$$

歪エネルギー U_0 は荷重がなした仕事に等しいから

$$U_0 = \frac{1}{2} \times 2P \times y_3 \quad (2.4)$$

運動エネルギー T_0 は次の様に表わされる

$$T_0 = 2\omega^2 \left[\frac{m}{2g} \left\{ 2 \int_0^h y_1^2 dx + \int_0^l y_2^2 dx + 2 \int_0^l y_3^2 dx \right\} \right] \quad (2.5)$$



(但し ω は固有円振動数 m は部材の単位長あたりの重量)

$U_0 = T_0$ の条件より固有振動数を得ることが出来る。

実験を行った模型 ($l = 39 \text{ cm}$, $h = 39, 44, 49 \text{ cm}$, 断面 $1 \text{ cm} \times 1 \text{ cm}$, $m = 8.55 \text{ g/cm}$, $E = 1.03 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ の黄銅製単層立体ラーメン) について上記の計算を行えば、表-1の結果を得る。

(3) 動力学的四連モーメント定理による固有振動数の計算

立体ラーメンの振動は静的問題におけると同しく、平衡条件式、部材回転角方程式及び動力学的四連モーメント式の3個の条件を併立することによって解く事が出来る。(ここでは動力学的三連モーメント式でよい)

動力学的三連モーメントの定理は次式であらわされる

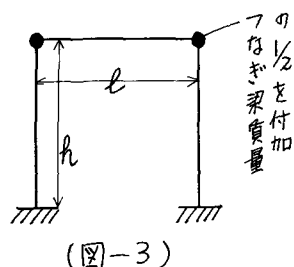
$$\begin{aligned} M_{k-1}^r l_k' (1 + f_{8,k}) + M_k \{ l_k' (2 + f_{7,k}) + l_{k+1}' (2 + f_{7,k+1}) \} \\ + M_{k+1}^l l_{k+1}' (1 + f_{8,k+1}) + 6EJ \left\{ \frac{y_k^l}{l_k} (1 + f_{5,k}) + \frac{y_k^r}{l_k} (f_{6,k} - 1) \right. \\ \left. + \frac{y_{k+1}^l}{l_{k+1}} (f_{6,k+1} - 1) + \frac{y_{k+1}^r}{l_{k+1}} (1 + f_{5,k+1}) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (3.1)$$

平衡条件式は節点方程式と層方程式である。

回転角方程式は

$$\sum (\theta l \sin \alpha) = 0 \quad (3.2)$$

$$\sum (\theta l \cos \alpha) = 0 \quad (3.3)$$



となる 与えられた立体ラーメンを 図-3 のような平面ラーメンにおきかえ上記の3つの条件を適用すると次の振動判別式が得られる

$$\begin{vmatrix} 1 + f_{5,1} & f_{6,1} - 1 & \frac{1}{6} \{ f_{4,1} + (\frac{1}{2} + k) \frac{l^2}{2} f_{0,2} \} \\ 2 + f_{7,1} & 1 + f_{8,1} & 1 + f_{5,1} \\ 1 + f_{8,1} & 2 + f_{7,1} + 2' (1 + f_{7,2} - f_{8,2}) & f_{6,1} - 1 \end{vmatrix} = 0 \quad (3.4)$$

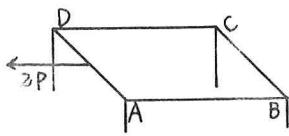
記号は参考文献1を参照されたい。前と同様に模型の数値を用いて計算すれば表-1の結果を得る。

(4) 強制振動実験による固有振動数測定

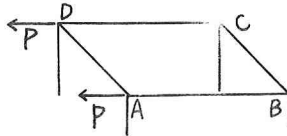
立体ラーメンの模型及び実験装置を 写真-1 に示す。強制振動は支承を振動させる方法をとって測定し、立体ラーメン最上部の変位記録により応答曲線を描き、これから共振点を求めた結果は表-1に示す。

(5) 自由振動実験による固有振動数測定

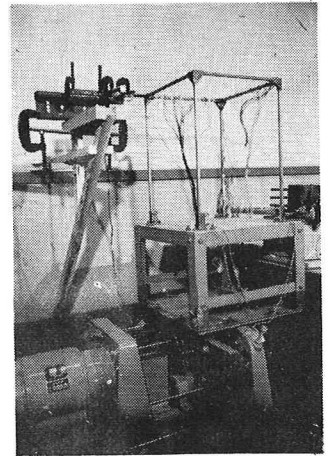
自由振動実験は梁中央点けい引(図-4)と梁の両端けい引(図-5)の二種類について行い正を測定した。これから固有振動数を計算した結果は表-1に示す



(図-4)



(図-5)



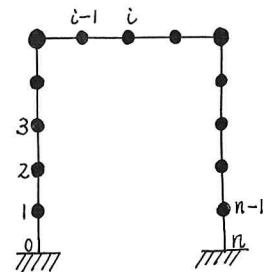
(写真-1)

(6) トランスファーマトリックスによる固有振動数の求め方

ここでは簡単に内型平面ラーメンについて解法の概略を述べる。内型ラーメンを図-6のような多質点系におきかえ、質量は各質点のみに集中し梁は質量を持たないとする。

今ラーメンが ω で振動しているとする。図-6の任意の梁をとり出し(図-7) 力の釣合を考えると次式になる

$$\begin{pmatrix} -x \\ -y \\ y \\ M \\ V \\ H \end{pmatrix}_i^L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & l & \frac{l^2}{2EI} & \frac{l^3}{6EI} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{l}{EI} & \frac{l^2}{2EI} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ y \\ M \\ V \\ H \end{pmatrix}_{i-1}^R \quad (6.1)$$



(図-6)

これを次の様にあらわす

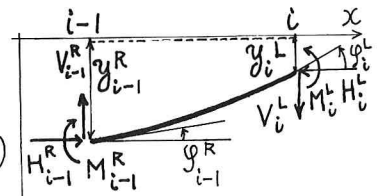
$$Z_i^L = [F]_i Z_{i-1}^R \quad (6.2)$$

質点部についても同様に振動による慣性力を加え力の釣合を考えると

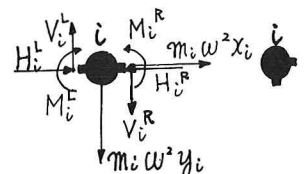
$$Z_i^R = [P]_i Z_i^L \quad (6.3)$$

(6.2), (6.3) 式をラーメンに適用すれば

$$Z_n^L = [F]_n [P]_{n-1} [F]_{n-1} \cdots [P]_1 [F]_1 Z_0^R \quad (6.4)$$



(図-7)



(図-8)

となる。これに次の境界条件を用いれば振動判別式が求まり固有振動数を求めることが出来る。現在この方法によっても計算を行っている。(境界条件 0点, n点で $x=y=z=0$)

(7) 考察および結語

計算と実験による一次固有振動数の比較は表-1 に示した

単位 c/s		$h=39\text{ cm}$	$h=44\text{ cm}$	$h=49\text{ cm}$	
計 算	エネルギー法	22.5	18.9	16.0	
	動力学的三連モーメントによる	22.7	19.1	16.2	
実 験	強制振動	22.0~22.7	17.6~18.5	15.6~16.5	
	自由振動	中央点 けい引	22.8~23.0	18.7~18.8	16.1~16.2
		両端 けい引	22.8~23.0	18.7~18.8	16.1~16.3

表-1 (一次固有振動数の比較表)

自由振動において、中央点けい引と両端けい引との差はほとんど生じていない。この事から梁部だけの横方向振動は立体ラーメン全体の系の固有振動数にほとんど影響しないと考えられる。しかし梁部が余り剛でない場合には影響が大きく変わってくるであろう。

一次固有振動の計算は上記の方法で十分近似が得られると思う。その他、減衰、高次振動、ねじりについても考察の必要があり、今後検討して行きたいと思っている。

参考文献

- 1) 岡本 舜三 振動学 オーム社
- 2) 山田 善一 けた橋の固有振動周期とその固有関数を求めるプログラムについて 土木学会誌 Vol 52 1967 P50~56
- 小堀 為雄