

ダンパーを有する多自由度系の強制振動について

東北大学工学部 正会員 倉面 茂・高橋 龍史

多自由度系の強制振動については、数多くの書物に書かれている。しかし、本文後半で扱うような問題、即ち、ハリを有限個の支点と考へ、特定の支点に減衰器(ダンパー)を取りつけた場合の強制振動についてはあまり書かれていない。実際の構造物の振動モデルとしては稀であり、そのため、必要性を欠いたとも考えられる。

著者は、数年来、長大橋、特に吊橋にダンパーを取りつけ、吊橋の制動力を増し、その欠点である「振動しやすい」特性を軽減するための研究と続けているが、本文は、この研究のための基礎研究の一部である。

構造物の振動は fig.1 に示されるような1自由度系の振動に置き換えられる場合があり、定性的に当てはまることもある。しかし、場合によっては、これだけでは不充てであり、多自由度系の振動を考へなければならぬことも多い。本文前半では1自由度系、2自由度系、3自由度系(いずれも粘性抵抗を有する)強制振動の比較を行い、後半では、実例として、ハリを有限個の多自由度系とみれば、特定の支点にダンパーを取りつけた場合の強制振動を扱う。外力としては周期的な力を考へる。

1 自由度系の強制振動

fig.1 の系の運動方程式は $M \frac{d^2y}{dt^2} + C \frac{dy}{dt} + Ky = F \sin \omega t$ (1)

で表わされる。この解は一般に良く知られているように、自由振動の項と強制振動の項の和として表わされ、強制振動の項 $[y]_1$ (以後 $[y]$ は強制振動の項と表わし、添字は上の自由度の数が自由度の番号と表わす) は次のようになる。

$$[y]_1 = \frac{f}{[(p^2 - \omega^2)^2 + 4m^2\omega^2]^{\frac{1}{2}}} \sin(\omega t + \varphi_1), \quad (2), \quad \varphi_1 = \tan^{-1} \left(\frac{-2m\omega}{p^2 - \omega^2} \right) \quad \dots (3)$$

但し、 $p^2 = \frac{K}{M}, \quad 2m = \frac{C}{M}, \quad f = \frac{F}{M}$

2 自由度系の強制振動

fig.2 の系の運動方程式は、 $M_1 \ddot{y}_1 + (C_1 + C_2) \dot{y}_1 + (K_1 + K_2) y_1 - C_2 \dot{y}_2 - K_2 y_2 = F \sin \omega t,$

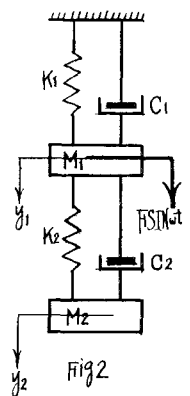
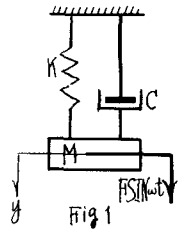
$$M_2 \ddot{y}_2 + C_2 \dot{y}_2 + K_2 y_2 - C_1 \dot{y}_1 - K_1 y_1 = 0,$$

となり、 $[y]_1^2, [y]_2^2$ は夫々次のようになる。但し、 $M_1 = M, M_2 = \beta M, K_1 = K, K_2 = \beta K, C_1 = C, C_2 = \beta C, \gamma = \frac{C}{M}, N = \frac{C}{M}, f = \frac{F}{M}, a = \frac{C^2}{MK}, b = \frac{M}{K} \omega^2$ である。

$$[y]_1^2 = \frac{f \{ [ab(\phi_1 - \gamma^2 ab)^2 + (\phi_2 + \gamma ab \phi_2')^2]^{\frac{1}{2}} }{N \{ (D_1 - \gamma ab)^2 + (D_2)^2 ab \}} \sin(\omega t + \varphi_1^2) \quad \dots (4)$$

$$[y]_2^2 = \frac{f \{ [ab(\phi_3 - \gamma^2 ab)^2 + (\phi_4 - \gamma ab \phi_4')^2]^{\frac{1}{2}} }{N \{ (D_1 - \gamma ab)^2 + ab(D_2)^2 \}} \sin(\omega t + \varphi_2^2) \quad \dots (5)$$

$$\varphi_1^2 = \tan^{-1} \frac{\gamma ab (\phi_1 - \gamma^2 ab)}{\phi_2 + \gamma ab \phi_2'} \quad \dots (6), \quad \varphi_2^2 = \tan^{-1} \frac{\gamma ab (\phi_3 - \gamma^2 ab)}{\phi_4 - \gamma ab \phi_4'} \quad \dots (7)$$



8 昭和42年度土木学会大会
に於て一部発表

但し, $\phi_1 = a^2(1+\delta)b^2 - 2\alpha\beta b + \beta^2$, $\phi_2 = (ab-\beta)\{ab^2-(\alpha+\alpha\beta)b+\beta\}$, $\phi_2' = (\alpha+\delta)b - (\beta+\delta-\alpha\delta)$,
 $\phi_3 = \alpha\delta b^2 + \alpha(\beta-\delta)b - \beta^2$, $\phi_4 = \beta\{ab^2-(\alpha+\alpha\beta)b+\beta\}$, $\phi_4' = (\alpha+\delta+\alpha\delta)b - (\beta+\delta)$,
 今, $\alpha = \beta = \delta = 1$ の場合, $[y]_1^2, [y]_2^2$ の一部を図示すれば fig.3, fig.4 のようになる。

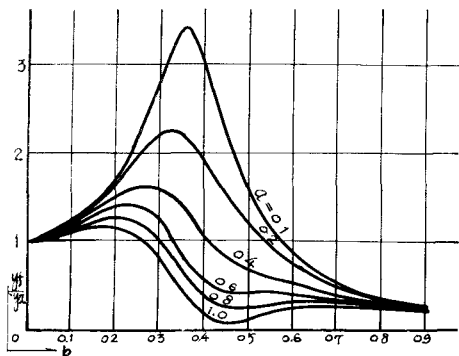


fig.3

fig.3,4において縦軸には振幅と静たわみの比
 横軸には $b = \frac{M}{K} \omega^2$ のパラメータをとっている。

復点 M_1 の振幅応答は1復点系のとれによく似て
 いふべからず。復点 M_2 はかなり遠くを開きとなる。

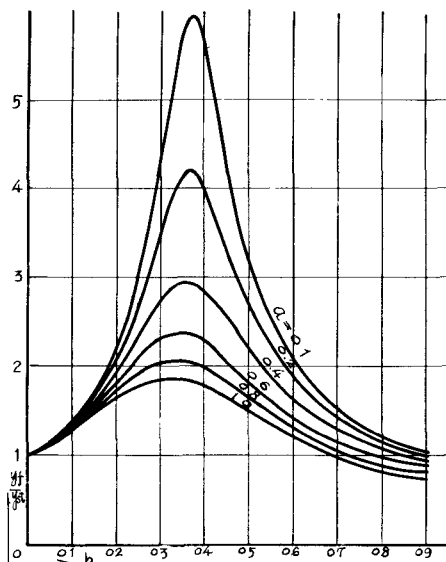


fig.4

3 復点系の強制振動

fig.5 に示される系の運動方程式は,

$$\begin{aligned} M_1 \ddot{y}_1 + (C_1 + C_2) \dot{y}_1 + (K_1 + K_2) y_1 - C_2 \dot{y}_2 - K_2 y_2 &= F \sin \omega t \\ M_2 \ddot{y}_2 + (C_2 + C_3) \dot{y}_2 + (K_2 + K_3) y_2 - C_2 \dot{y}_1 - C_3 \dot{y}_3 - K_2 y_1 - K_3 y_3 &= 0 \\ M_3 \ddot{y}_3 + C_3 \dot{y}_3 + K_3 y_3 - C_2 \dot{y}_2 - K_3 y_2 &= 0 \end{aligned} \quad \dots (8)$$

これより $[y]_1^3, [y]_2^3, [y]_3^3$ は次のようになる。

$$[y]_1^3 = \frac{1}{N} \frac{[ab(\phi_1 - ab\phi_1')H_1 - (\phi_2 - ab\phi_2')H_1' - abH]^2 + \{(\phi_1 - ab\phi_1')H_1' + ab(\phi_2 - ab\phi_2')H_1\}^2}{(\phi_1 - ab\phi_1')^2 + ab(\phi_2 - ab\phi_2')^2} \sin(\omega t + \varphi_1^3) \quad \dots (9)$$

$$[y]_2^3 = \frac{1}{N} \frac{[ab(\phi_1 - ab\phi_1')H_2 + (\phi_2 - ab\phi_2')H_2' + abH]^2 + \{(\phi_1 - ab\phi_1')H_2' - ab(\phi_2 - ab\phi_2')H_2\}^2}{(\phi_1 - ab\phi_1')^2 + ab(\phi_2 - ab\phi_2')^2} \sin(\omega t + \varphi_2^3) \quad \dots (10)$$

$$[y]_3^3 = \frac{1}{N} \frac{[ab(\phi_1 - ab\phi_1')H_3 + (\phi_2 - ab\phi_2')H_3' - abH]^2 + \{(\phi_1 - ab\phi_1')H_3' - ab(\phi_2 - ab\phi_2')H_3\}^2}{(\phi_1 - ab\phi_1')^2 + ab(\phi_2 - ab\phi_2')^2} \sin(\omega t + \varphi_3^3) \quad \dots (11)$$

$$\varphi_1^3 = \tan^{-1} \frac{\sqrt{ab} [(\phi_1 - ab\phi_1')H_1 - (\phi_2 - ab\phi_2')H_1' - abH]}{(\phi_1 - ab\phi_1')(H_1' - abH) + \alpha b(\phi_2 - ab\phi_2')H_1} \quad \dots (12)$$

$$\varphi_2^3 = \tan^{-1} \frac{\sqrt{ab} [(\phi_1 - ab\phi_1')H_2 + (\phi_2 - ab\phi_2')H_2' + abH]}{(\phi_1 - ab\phi_1')(H_2' + abH) - ab(\phi_2 - ab\phi_2')H_2} \quad \dots (13)$$

$$\varphi_3^3 = \tan^{-1} \frac{\sqrt{ab} [(\phi_1 - ab\phi_1')H_3 + (\phi_2 - ab\phi_2')H_3' - abH]}{(\phi_1 - ab\phi_1')(H_3' - abH) - ab(\phi_2 - ab\phi_2')H_3} \quad \dots (14)$$

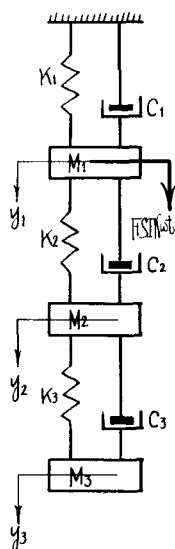


fig.5

有限個の多頂点と考える場合のハリの強制振動

fig. 6 に示されるようにハリを有限個の多頂点に通き換えて考える。ハリは値量の無い、一様に曲げ剛性EIを有する棒とし、値量は各間隔にとりつけられる集中値量と考える。

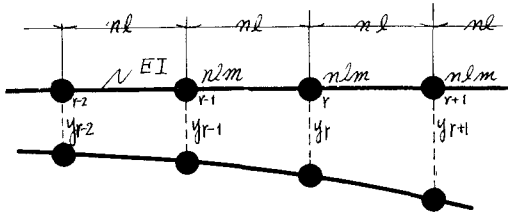


fig. 6

≡連モーメントの定理より

$$(Mr_l + 4Mr + Mr_{r+1}) + \frac{6EI}{(nl)^2} y_r = 0, \dots (15)$$

鉛直方向の力の釣合いより

$$\frac{1}{nl} (Mr_l - 2Mr + Mr_{r+1}) + nlm \ddot{y}_r = 0, \dots (16)$$

もし 頂点に外力が働く場合には、後の式の中に その外力の鉛直方向の力と与えてやるばよい。

一例として fig. 7 で示される系の場合の強制振動を考える。

モーメントの釣合いより

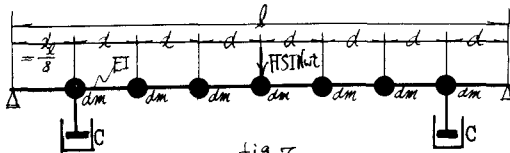


fig. 7

$$\begin{bmatrix} 4, & 1, & 0, & 0 \\ 1, & 4, & 1, & 0 \\ 0, & 1, & 4, & 1 \\ 0, & 1, & 2, & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ M_4 \end{bmatrix} = -\frac{EI}{l^2} \begin{bmatrix} 2, & 1, & 0, & 0 \\ 1, & 2, & 1, & 0 \\ 0, & 1, & 2, & 1 \\ 0, & 0, & 2, & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\text{但し } y_1 = y_r, y_2 = y_b, y_3 = y_5,$$

鉛直方向の力の釣合いより、

$$\ddot{y}_1 + D\dot{y}_1 + S[160y_1 - 155y_2 + 72y_3 - 18y_4] = 0, \quad \ddot{y}_2 + S[-155y_1 + 232y_2 - 191y_3 + 72y_4] = 0$$

$$\ddot{y}_3 + S[72y_1 - 191y_2 + 304y_3 - 173y_4] = 0, \quad \ddot{y}_4 + S[-36y_1 + 144y_2 - 346y_3 + 232y_4] = f \sin \omega t \dots (18)$$

$$18C, D = \frac{C}{md}, \quad S = \frac{6}{97} \frac{EI}{md^3}, \quad f = \frac{F}{md},$$

この系の式より $[y_1]^T, [y_2]^T, [y_3]^T, [y_4]^T$ を求めれば次の様になる。

$$[y_1]^T = \frac{f}{N} \frac{(18b^2 + 13968b + 442223)}{[\phi_1^2 + ab\phi_2^2]} \sin(\omega t + \varphi_1) \dots (19),$$

$$[y_2]^T = \frac{f}{N} \frac{[\phi_1(72b + 11155) + \phi_2(72b^2 + 2425b - 827992)]^2 + [\phi_1(72b^2 + 2425b - 827992) + \phi_2(72b + 11155)]^2}{[\phi_1^2 + ab\phi_2^2]} \sin(\omega t + \varphi_2) \dots (20)$$

$$[y_3]^T = \frac{f}{N} \frac{[ab\phi_1(173b - 40136) + \phi_2(173b^2 - 52768b + 1100853)]^2 + [\phi_1(173b^2 - 52768b + 1100853) + ab\phi_2(173b - 40136)]^2}{[\phi_1^2 + ab\phi_2^2]} \sin(\omega t + \varphi_3) \dots (21)$$

$$[y_4]^T = \frac{f}{N} \frac{[ab\phi_1(b^2 - 536b + 34047) - \phi_2(b^3 - 696b^2 + 90598b - 1204352)]^2 + [\phi_1(b^3 - 696b^2 + 90598b - 1204352) + ab\phi_2(b^2 - 536b + 34047)]^2}{[\phi_1^2 + ab\phi_2^2]} \sin(\omega t + \varphi_4) \dots (22)$$

$$\varphi_1^? = \tan^{-1} \frac{-\sqrt{ab} [\phi_2]}{\phi_1}, \quad \varphi_2^? = \tan^{-1} \frac{-\sqrt{ab} [\phi_1(72b + 11155) + \phi_2(72b^2 + 2425b - 827992)]}{\phi_1(72b^2 + 2425b - 827992) + ab\phi_2(72b + 11155)} \dots (24)$$

$$\varphi_3^? = \tan^{-1} \frac{-\sqrt{ab} [\phi_1(173b - 40136) + \phi_2(173b^2 - 52768b + 1100853)]}{\phi_1(173b^2 - 52768b + 1100853) + ab\phi_2(173b - 40136)}, \quad \varphi_4^? = \tan^{-1} \frac{-\sqrt{ab} [\phi_1(b^2 - 536b + 34047) - \phi_2(b^3 - 696b^2 + 90598b - 1204352)]}{\phi_1(b^3 - 696b^2 + 90598b - 1204352) + ab\phi_2(b^2 - 536b + 34047)} \dots (26)$$

$$\text{但し } \phi_1 = b^4 - 928b^3 + 181196b^2 - 4817408b + 1825346, \quad \phi_2 = b^3 - 768b^2 + 88173b - 376360,$$

次のページに $[y_1]^T, [y_2]^T, [y_3]^T, \varphi_1^?, \varphi_2^?, \varphi_3^?, \varphi_4^?$ の一部を掲げる。縦軸に時々、振巾、角度、横軸に

パラメータ $\omega, \gamma, b = \frac{\omega^2}{97} \frac{6EI}{md}$ をとてある。

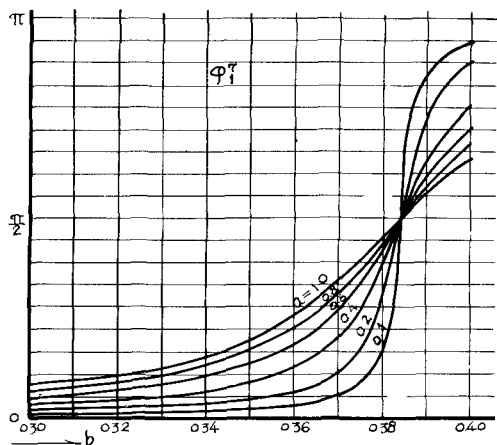
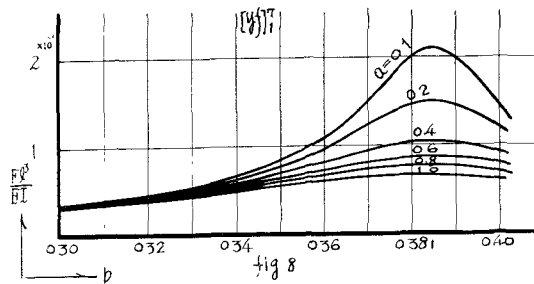


fig 11

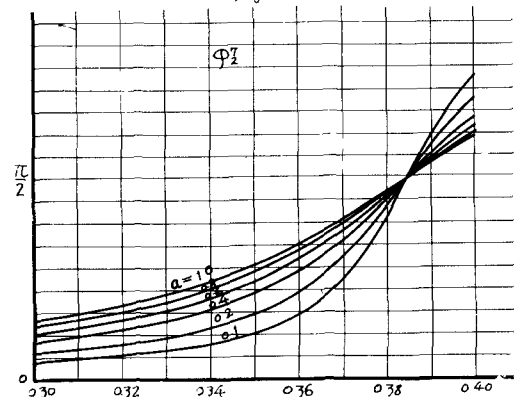


fig 12

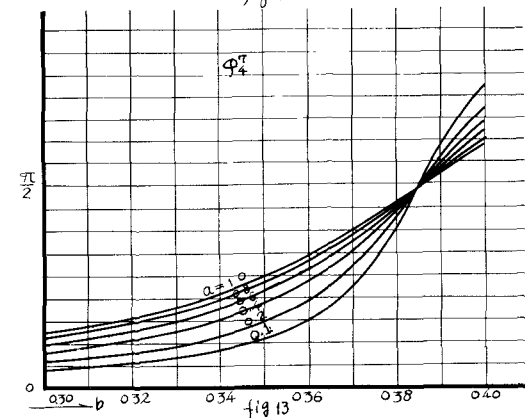


fig 13

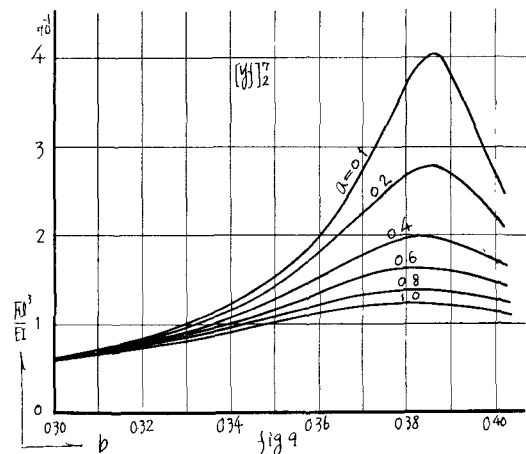


fig 9

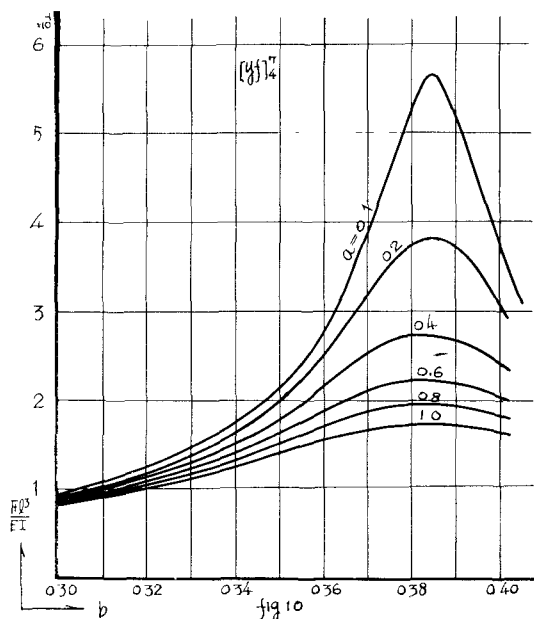


fig 10

周期的に外力を受けるハリに、ダンパーをつけた場合、ハリはかたりの制動力をうけ、ダンパーキャパシターにより、振動モードにも変化をきたし、各復元の位相のズレも遷ったものになる。特にダンパーのつけてある復元の違いが大である。今回は一次振動のみを扱った。