

補剛桁を有するアーチの座屈に関する研究

東北大学 正員 倉西 茂
東北大学 学生員 鈴木智巳

1. 概要

アーチと吊材、補剛桁で構成された系は、一般に補剛アーチと言われるが、この様な系の座屈を考える際には吊材間での局部座屈のみを考えるだけでは不十分である。本研究では図-1.の様な対称な補剛アーチを考え、特に系全体としての座屈のみを取扱うものとする。

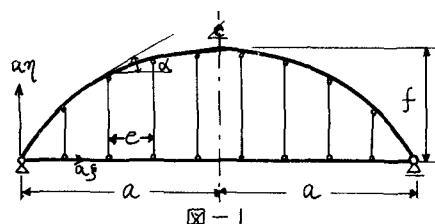


図-1

解析は先に発表されたPflügerの論文に従って行い、

Pflügerにより導かれた座屈値に対する式の一部を電子計算機を用いより精密に計算し、前者との比較を行ったものであるが、次の仮定が用いられている。

i) アーチ軸は放物線とする。 ii) 荷重は補剛桁に一樣に分布しているものとする、即ち座屈が起る迄の状態に於て、すべての吊材中の引張力は等しく、アーチに作用する際にはこれらの吊材力は一樣に分布している荷重として置き代へ得る。従って座屈が起る迄の状態に於て、アーチには軸力のみが生じ、如何なる剪断力も曲げモーメントも生じてない。 iii) 座屈が生じる迄の状態での全変位は無視する。 iv) 座屈の際に、アーチ及び補剛桁には伸びが起る。

尚、基礎式の詳細は論文を参照されたい。

2. 座屈条件式

座屈の際に、 η 軸方向に生じるアーチの変位を u , v , η 軸方向の補剛桁の変位を w とすると、座屈条件式は u , v , w なる変位を生じた状態に於る各種エネルギーの増加を計算する事により求まる。以下()は、 η について微分した事を示す。

アーチ、補剛桁に生じる曲げモーメントを M , M_r で表わすと

$$M = EI \cos \alpha \frac{d^2 u}{ds^2}, \quad M_r = EI_r \frac{d^2 w}{ds^2} \quad (1)$$

ただし、 EI ; アーチの曲げ剛性, EI_r ; 補剛桁の曲げ剛性, a ; $\frac{1}{2}$ span.

α ; 変形前のアーチの接線と η 軸とのなす角,

(1)式よりアーチ、補剛桁の曲げによりたわえられる歪エネルギー V_1 , V_2 は、

$$V_1 = \frac{1}{2} \int_0^a EI \cos \alpha \cdot \frac{d^2 u}{ds^2}^2 ds \quad (2) \quad V_2 = \frac{1}{2} \int_0^a EI_r \frac{d^2 w}{ds^2}^2 ds \quad (3)$$

最初から吊材に働いていた吊材力のなす仕事 V_3 は、

$$V_3 = \int_0^a p (v - w + \frac{1}{2} \frac{v^2}{a}) a ds \quad (4)$$

座屈の際に吊材に付加的に生じる軸力により生じるエネルギー V_4 は、

$$V_4 = \frac{1}{2} \int_0^a \frac{EA_h}{E} (v - w)^2 a^2 ds \quad (5)$$

ただし、 E_h ; 吊材のヤング係数, A_h ; 吊材の断面積 p ; 座屈の始まる際の平均分布荷重

1) Pflüger; Der Stahlbau, Heft 10, 1951.

補剛桁上に載荷されている荷重の得るポテンシャルエネルギーの増加 V_5 は

$$V_5 = \int_0^L p w a^2 d\xi \quad (6)$$

上記5つのエネルギーの合計を V として $\omega \alpha = \sqrt{\frac{1}{1+\eta^2}}$, 水平力 $H = \frac{p a}{4\mu}$ を代入し, アーチ crown に矢ける曲げ剛性 EI を除す事により次式を得る。

$$\frac{V}{EI} = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ \lambda \frac{w'^2}{1+\eta^2} + \lambda w w'' + \lambda_H \frac{(w-w')^2}{\eta} - k \pi^2 [(1+\eta^2)w^2 - w'^2 - 4\mu \frac{w^4}{\eta}] \right\} d\xi \quad (7)$$

$$\text{ここに } k, \mu = \frac{p a^3}{2EI}, \lambda = \frac{EI}{EI_s}, \lambda_H = \frac{EI_H}{EI_s}, \lambda_H = \frac{EI_H A_s}{EI_s} \frac{a^3}{e^3}, \quad k = \frac{H}{\pi \frac{EI_s}{a^3}}$$

座標変換は最小の V を与えるものであるから, V の変分は 0 であるなければならない。従って,

$$\delta V = \delta \int_0^L \left\{ \lambda \frac{w'^2}{1+\eta^2} + \lambda w w'' + \lambda_H \frac{(w-w')^2}{\eta} - k \pi^2 [(1+\eta^2)w^2 - w'^2 - 4\mu \frac{w^4}{\eta}] \right\} d\xi$$

又, u に対しては変形条件より $u = -\int_0^L \eta v' d\xi$ が成り立つ。

今, λ_H, λ_H を定数とし, $EI = \frac{1}{\cos \alpha} EI_s$, 即ち $\lambda = \frac{1}{\cos \alpha} = \sqrt{1+\eta^2}$ なる場合を考えると, w についての変分も 0 であるなければならないので $(\lambda w w'') - k \pi^2 w' - \lambda_H \frac{w-w'}{\eta} = 0$ (8)

を得る。 w として次の形の式を仮定する。 $w = C \sin \eta \pi \xi$, この w を(8)式に代入して

$$\eta = C \{ 1 + \frac{25}{16} (\lambda_H \eta^2 + k) \eta \} \sin \eta \pi \xi \text{ を得る。ただし, } \eta = 1, 2, \dots, C; \text{定数}$$

上記の w の値は両端での境界条件を満足し, η が整数である場合には仮定 (iv) よりの条件 $\int_0^L v' d\xi = 0$ を満足するが, $\eta = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$ の場合, 即ち対称座標の場合はこの条件を満足しない。

w, v を(7)式に代入し各項を計算すると,

$$\frac{J_1}{EI} = \frac{1}{2} \int_0^L \lambda \frac{w'^2}{1+\eta^2} d\xi = \frac{1}{2} \pi^2 \eta^2 (3 + 16\pi^2 \eta^2 + \frac{16}{5} \pi^4 \eta^4) + \frac{1}{2} \mu (\pi^2 \eta^2 + \frac{4}{3} \pi^4 \eta^4) + \frac{1}{2} \pi^4 \eta^4$$

$$\frac{J_2}{EI} = \frac{1}{2} \int_0^L w' d\xi = \frac{1}{2} \pi^2 \eta^4$$

$$\frac{J_3}{EI} = \frac{1}{2} \int_0^L \frac{(w-w')^2}{\eta} d\xi = \frac{1}{2} \mu (\frac{2}{3} + 2\pi^2 \eta^2)$$

$$\frac{J_4}{EI} = \frac{1}{2} \int_0^L (1+\eta^2) w d\xi = \frac{1}{2} \mu \left[\frac{16}{5} \pi^2 \eta^2 + \frac{8}{3} - \frac{1}{\pi \eta^2} + \mu \left(\frac{256}{105} \pi^2 \eta^2 + \frac{128}{5} - \frac{48}{\pi \eta^2} + \dots \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \mu \left(\frac{4}{3} \pi^2 \eta^2 + 1 + \mu \left(\frac{4}{3} \pi^2 \eta^2 + 16 \right) + \mu \left(\frac{8}{3} \pi^2 \eta^2 + 4 \right) + \frac{1}{2} \pi^2 \eta^2 \right) \right]$$

$$\frac{J_5}{EI} = \frac{1}{2} \int_0^L w'^2 d\xi = \frac{1}{2} \pi^2 \eta^2$$

$$\frac{J_6}{EI} = \frac{4\mu}{EI} \int_0^L \frac{w^4}{\eta} d\xi = A_1 \mu^3 \eta^4 + A_2 \mu^2 \eta^4 + A_3 \mu$$

$$\text{ただし } \frac{1}{2} \mu = \frac{\pi^2 \eta^2}{\lambda_H} (\lambda_H \eta^2 + k)$$

最後の項の積分に対し, Pfüger は近似式として

$$A_1 = 8(1 + \frac{2}{\eta^2}), A_2 = 16(1 + \frac{2}{\eta^2}), A_3 = 21.2$$

を与えているが, この項の k に対する影響はかなり大きいので, 電卓計算機を用い数値計算を行った。3つの係数 A_1, A_2, A_3 を両者について比較したものが 図-2 である。

座屈荷重においては, このような変形に対してポテンシャルエネルギーの変化は 0 であるから(7)式に於て, $V=0$ とおき k を求める事が出来る。

即ち

$$k = \frac{1}{\pi^2} \frac{J_1 + \lambda_H J_2 + \lambda_H J_3}{J_4 - J_5 - J_6} \quad (9)$$

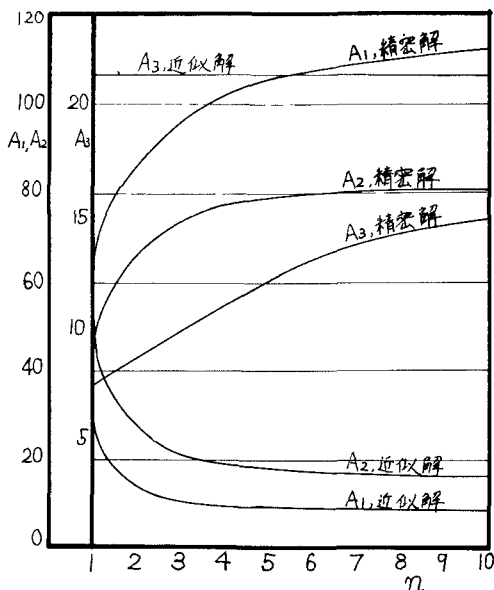


図-2

(9) 式は右辺にも k を含む陰函数故、逐次計算する事により正確な値を求める事が出来る。

3. 座標値の計算

図-3 は、 $t=1$ の場合に両者の係数を用いた時の $\sqrt{\lambda H}-k$ 曲線である。図-4~図-8 は、精密に求めた係数を用い、 $t=0.1, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ の各場合に μ をパラメーターとし、又 図-9~図-11 は $\mu=0.1, 0.15, 0.2$ の各場合について t をパラメーターとして電卓計算機を用いて計算した結果得られた $\sqrt{\lambda H}-k$ 曲線である。

$$\text{ただし、 } t = \frac{EI_s}{EI_s + EI_v}$$

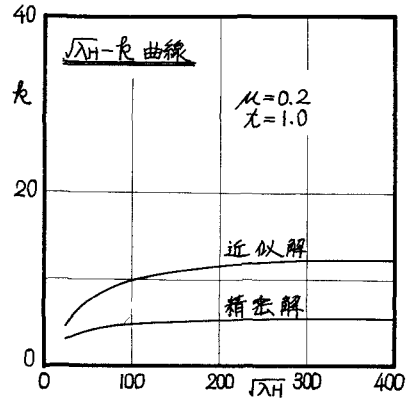


図-3

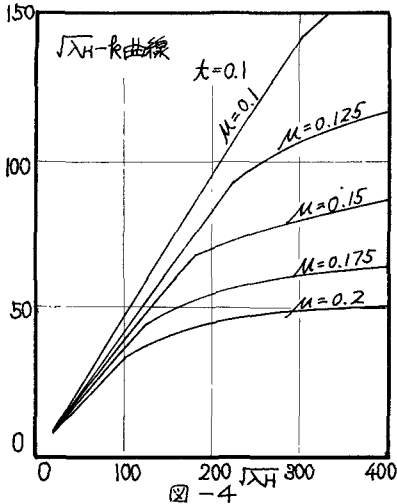


図-4

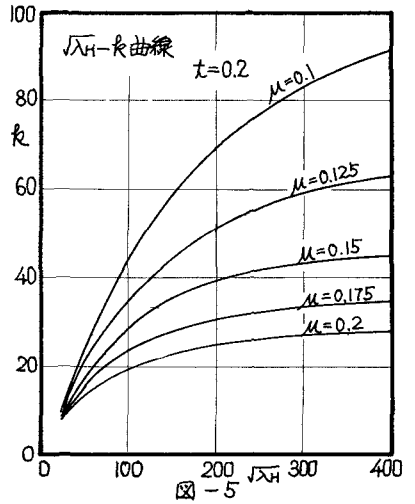


図-5

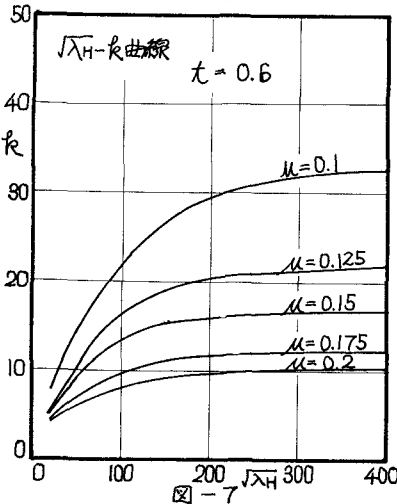


図-7

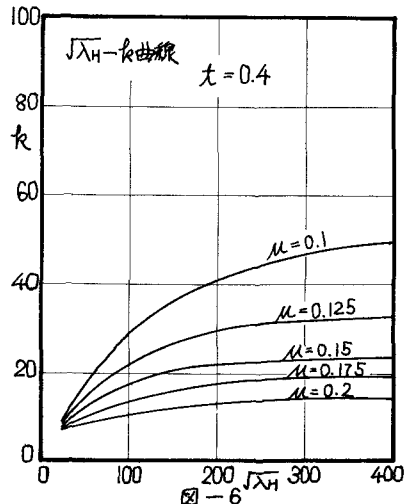


図-6

