

弾性アーチの大きな変形についての二、三の考察

東北大学 正会員 工博 樋浦 大三

東北大学 学生員 古宮 伸 怡

1. まえがき

従来、アーチリブの軸力、せん断力、曲げモーメント、撓み等を計算するのに用いられている所以、弾性理論は、アーチ軸の座標の変化がない、という仮定、言い換えればアーチ軸の水平及び鉛直方向の変位を無視する、という立場に立った理論である。しかしながら、ここで取り扱うように、アーチの変形が大きな場合には、その変位の影響を考えないわけにはゆがなくなる。この影響を考慮に入れたものが変形理論と呼ばれるもので、鉛直変位のみを考える場合には、これを一次理論といい、さらに水平変位も考慮に入れたものを二次理論と呼んでいる。

アーチ橋(鋼橋)において、中位のスパンや比較的大きいスパンの場合、特にライズの大きいアーチ等においては変形理論を用いて計算すると、弾性理論によるよりもかなり大きな曲げモーメントを与えると言われている。

ここでは、ある適当なアーチの模型を作製し、変形を大なるものにし、そのときの曲げモーメント、鉛直及び水平方向の変位を測定し、一次変形理論と比較し、次に弾性理論と一次変形理論との比較を試みた。

2. 模型実験

i) 概要

模型材料としては、大きな変形をしてなおかつアーチ部材が塑性変形を起さないようにするため幅34.08mm、厚さ1.514mmなる横断面を有する帯状のバネ鋼を使用した。

模型寸法

前述したバネ鋼を長さ180cmに切断し、回転端を、固定端を用いて、それぞれ2鉸アーチ、無鉸アーチとなし[図1-a,b]に示すような形状のアーチを組立てた。

測定方法

変位の測定にはトランシットを用い、曲げモーメントは電気抵抗線歪計を使用して求めた。

ii) 測定結果

[図2]は2鉸アーチ、無鉸アーチの拱頂Cに集中荷重Pが載った場合のC点及びK₄点の[鉛直変位-荷重]曲線を示したものである。無鉸アーチの場合

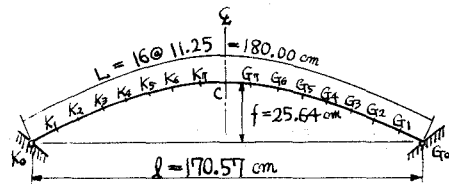


図1-a 2鉸アーチ

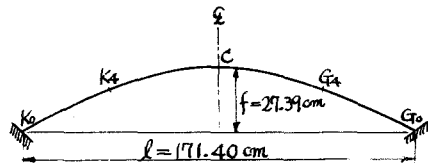


図1-b 無鉸アーチ

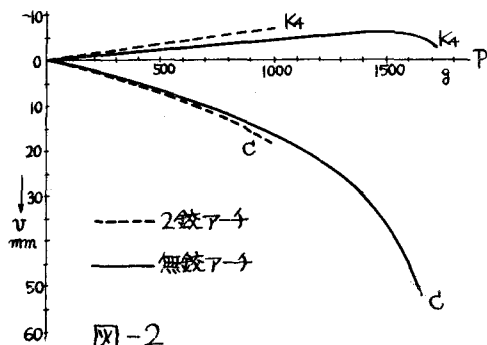


図2

合は 1000g を越えると変位が急激に増加し、1800g 附近で座屈を起す様子がうかがえる。

(図-3) は拱頂に P が載ったときの K₄, G₄ の挙動を示したもので、無鉸アーチでは 1600g 附近を頂点とした loop 状の曲線を描くことが分る、又 K₄, G₄ はアーチ自体が若干、不対称であったため対称でないのはやむおえないと言える。

曲げモーメントの測定結果は理論値と一纏に後で述べる。

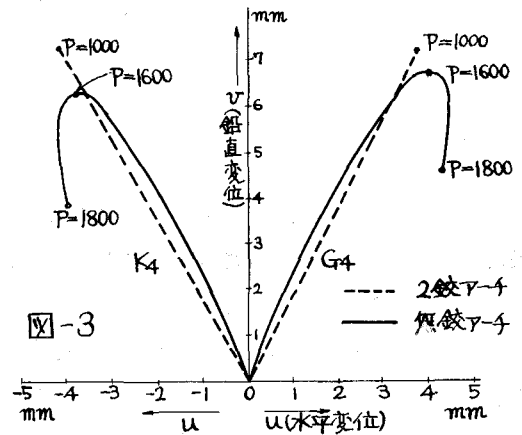


図-3

3. 理論計算

理論計算は 2 鉸アーチについてのみ行った。

変形理論の基本式は、この模型について考える場合、

$$EI \cos \varphi \frac{d^2 v}{dx^2} + (H_0 + H_g + H_p) \cdot \frac{d^2 v}{dx^2} = g + (H_g + H_p) \cdot \frac{d^2 y}{dx^2}$$

で表わされる、ここに E: ヤング係数

H₀: 真直ぐな棒(パイプ)をアーチにするときの水平力

I: 断面 2 次モーメント

v: 鉛直方向変位

H_g: 死荷重 g による水平反力

y: 活荷重載荷前のアーチ軸の原形

H_p: 活荷重による水平反力

g: 死荷重

上式を用いるためには、y が x の関数として表わされる必要がある。実験に使用した模型アーチの形状は C を拱頂とし K₀, G₀ を起拱とする放物線 $y = \frac{4f}{l^2} x(l-x)$ と正弦曲線 $y = f \sin \frac{\pi x}{l}$ の間にあることが実験されている。そこで、この二つの曲線がアーチ軸の原形であると考え、両者を理論的に計算し、その中間に実験したアーチの理論値が存在すると考える。荷重条件、境界条件を考慮し、 $\cos \varphi = 1$ として両者について上の微分方程式を解くと

i) 放物線 ($y = \frac{4f}{l^2} x(l-x)$) の場合

集中荷重 P が拱頂に載荷されるとき

$$v = \frac{H_p}{H} \cdot 8f \cdot \left[\frac{1}{2} \left(\frac{x}{l} - \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right) + \frac{1}{(vl)^2} \left\{ 1 - \frac{\cos v \left(\frac{l}{2} - x \right)}{\cos \frac{vl}{2}} \right\} \right] - \frac{P}{H} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[x - \frac{\sin vx}{v \cos \frac{vl}{2}} \right]$$

$$M = EI \cdot \left[\frac{H_p}{H} \cdot \frac{8f}{l^2} \cdot \left\{ 1 - \frac{\cos v \left(\frac{l}{2} - x \right)}{\cos \frac{vl}{2}} \right\} + \frac{P}{H} \left\{ \frac{v \sin vx}{2 \cos \frac{vl}{2}} \right\} \right]$$

$$H_p = P \cdot \left\{ \frac{l^2}{8} + \frac{1}{v^2} \cdot \left(1 - \frac{1}{\cos \frac{vl}{2}} \right) \right\} / \left[- \frac{Hl^3}{8fEI} + 8f \cdot \left\{ \frac{l}{12} + \frac{1}{v^3 l^2} \cdot (vl - 2 \tan \frac{vl}{2}) \right\} \right]$$

ii) 正弦曲線 ($y = f \sin \frac{\pi x}{l}$) の場合

集中荷重 P が拱頂に載荷されるとき、近似的に、

$$v = \frac{H_p}{H} \cdot \left\{ \frac{f \times v^2}{v^2 - \left(\frac{\pi}{l}\right)^2} \right\} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{l}\right)x - \frac{P}{H} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[x - \frac{\sin v x}{v \cos \frac{v l}{2}} \right]$$

$$M = EI \cdot \left[\frac{H_p}{H} \cdot \left\{ \frac{f \times v^2 \times \left(\frac{\pi}{l}\right)^2}{v^2 - \left(\frac{\pi}{l}\right)^2} \right\} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{l}\right)x + \frac{P}{H} \cdot \frac{v \sin v x}{2 \cos \frac{v l}{2}} \right]$$

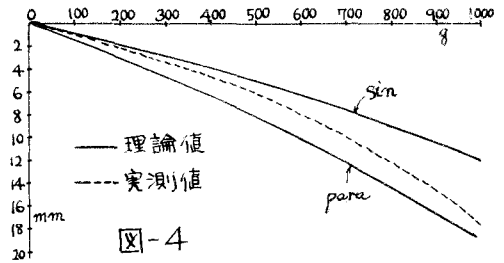
$$H_p = P \cdot \left[\frac{1}{v^2 - \left(\frac{\pi}{l}\right)^2} + \frac{1}{v^2} \right] \div \left[-\frac{H l^3}{E F_c} \cdot \frac{1}{\pi^2 f} + \frac{f \times l \times v^2}{2 \{ v^2 - \left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \}} \right]$$

$$\text{但し, } H = H_0 + H_g + H_p, \quad v = \sqrt{H/EI}$$

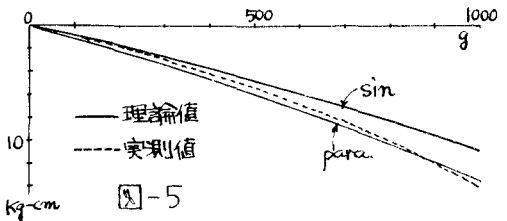
これらの式に諸数値を代入し、電子計算機によって v 及び M を計算した。その一部を〔図-4〕, 〔図-5〕, 〔図-6〕, 〔図-7〕, に示す。これらの図を見ると実測値はある程度までの荷重以下では放物線及び正弦曲線アーチとしたときの理論値の図に入ることが分る。

〔図-4〕はC臭の鉛直変位を示したものである。

縦軸に変位量、横軸に荷重をとったもので、実測値は600g 附近までは正弦曲線寄りであり、それを越すと放物線寄りであることがうかがえる。アーチ原形が正弦曲線寄りであることを考え合すると400g 附近までは実測値と理論値とは一致するであろうと思われる。

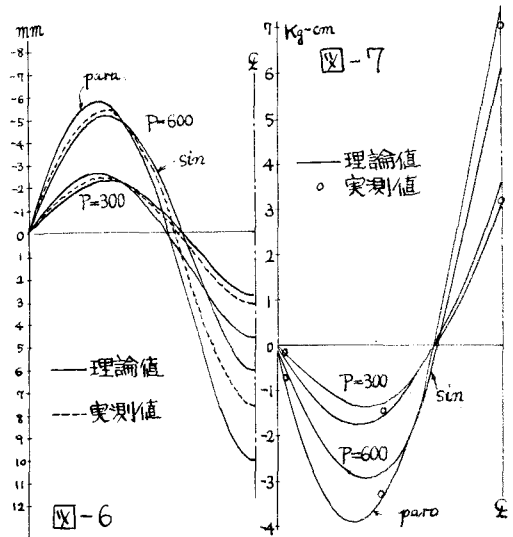


〔図-5〕はC臭の曲げモーメントを示したものである。鉛直変位と同様に荷重が小さい場合に正弦曲線寄り、大きい場合に放物線寄りとなっている。



〔図-6〕はC臭の変位のみでなく、他の臭の鉛直変位についても考察するもので、 $P=600g, 300g$ における各臭の変位状態を示したものである。

〔図-7〕は〔図-6〕と同様な目的で、曲げモーメントが各臭でどのようにになっているかを示したもので $P=600g, 300g$ について示した。測定臭が少なかったが〔図-6〕と同様な事が言えると思われる。



4. 弾性理論値と変形理論値との比較

実験結果を考察すると、 y が確定すれば、ある程度の荷重までは変形理論による計算値と実測値とは一致すると見なしてもよいと思われる。

今、かりに $y = \frac{f}{2} x(l-x)$ なる放物線がアーチ軸の原形であると仮定し、弾性理論による計算値と変形理論による計算値とを求め、鉛直変位と曲げモーメントについて両者を比較してみる。〔図-8〕,

〔図-9〕,〔図-10〕,〔図-11〕にそれを示す。

〔図-8〕はC点の鉛直変位を示したものである。言うまでもなく、弾性理論による計算値は荷重 P に比例する。言い換えれば一直線で表わされるが、変形理論では曲線で表わされる。 $P=100g$ で25.6%, $200g$ で29.5%, $300g$ で33.0%, $400g$ で36.8%弾性理論に対し変形理論による方が大きな値をとることになる。

〔図-9〕はC点の曲げモーメントを示したものである。鉛直変位と同様のことが言えるが、 $P=100g$ で17.2%, $200g$ で19.4%, $300g$ で21.7%, $400g$ で24.1%変形理論による方が大きな値をとることになる。

〔図-10〕は $P=200g, 400g$ の場合の鉛直変位図を示す。符号は下向きの変位を正,上向の変位を負とした。

〔図-11〕は $P=200g, 400g$ の場合の曲げモーメント図を示す。符号は下に凸になる場合を正,上に凸になる場合を負とした。

5. あとがき

以上の実験によると、実験したアーチのように I が小さく、 $f/l=1/8$ 程度の扁平なアーチで、撓みが $1/600$ 程度以下であれば、鉛直方向変位のみを考えた弾性理論による計算で十分に合うものと思われる。又さらに大きな変形を取り扱う場合には、水平方向の変位を考慮し、さらに $\{1+(\frac{\Delta y}{l})^2\} = 1$ としないで、 $\frac{\Delta y}{l}$ を考慮して理論式を導くか、あるいは多角形アーチと考え、逐次変形を追求してゆく方法等が考えられるが、最近の電子計算機の発達に鑑みれば、後者を利用する方が賢明であると思われる。

参考文献

O. シュタインハルト 著「鋼橋の理論と計算」
A. ハウラネック

