

弾性床上の梁の極限解析

東北大学工学部 正 員 佐 武 正 雄

東北大学工学部 学生員 ○岸 野 佑 次

1. まがき

弾性床上の梁が 図-1 に示すような漸増等分布荷重を受ける場合の極限解析について研究した結果について述べる。従来、梁や板の極限解析について多くの研究があるが、弾性床の上に置かれている場合は、その床(地盤)が破壊されない限り崩壊することはなく、極限荷重は地盤の耐荷力によって定まると考えられるが、弾性限度を越えた後の梁の塑性域の範囲や、たわみ曲線の性状などについて調べる必要がある。なお、ここに行った解析はケーソン堤の基礎に用いられるH型地床の設計計算に関連して行ったもので、計算例で用いた数値は、その設計の数値を用いている。

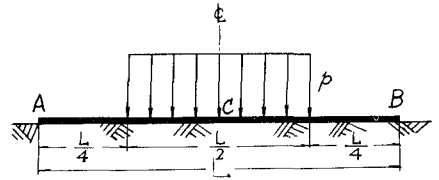


図 - 1

2. 解析方法

この解析では、梁の曲率と曲げモーメントの関係が 図-2 の如く全塑性モーメントに至るまでは理想的に直線関係にあるとし、後にその断面で応力が緩和されると、ある残留の曲率 ρ_r を残して、モーメントが減少し始めるが、この解析では この残留の曲率の影響については無視する。

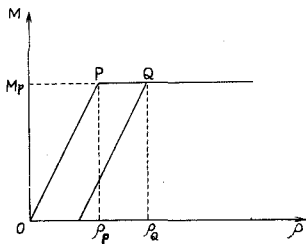


図 - 2

図-1 の載荷状態に於て、荷重 p が徐々に増加すると、正の最大曲げモーメントを受ける梁の中央 C が最初に塑性ヒンジとなる。更に荷重が増加すると、正の最大曲げモーメントは C の隣接点で生じ、以下荷重の増加と共に塑性ヒンジが外方に移動し、塑性域が左右に広がって行くと考えられる。(図-3)

塑性域の外側の弾性体の部分 (AF, BG) についてのたわみを求めるには、塑性ヒンジに接する部分で、次の三つの境界条件式

を考える。

(1) 沈下量 = 塑性域側の沈下量, (2) 曲げモーメント = 全塑性モーメント (M_p), (3) セン断力 = 0
最後の条件式は塑性域との隣接点では曲げモーメントが極値をとっていると考えられるからである。
条件式 (1) にあるように、塑性域での沈下量を算定する必要がある。

次に塑性域では、その領域全てが M_p に達し、曲率が全て ρ_p であるとする、沈下量 y は (原点を梁の中央にとれば)

$$y = -\frac{M_p}{2EI} x^2 + C \quad (2.1)$$

で与えられる。この式から明らかな様に、 $y'' = 0$ 即ちせん断力は零であり、梁に作用する荷重(載荷荷重と地盤反力の合計)は等分布でなければならぬ。 p は等分布荷重であるから、地盤反力も等分布でなければならず、一様な沈下 ($y = \text{一定}$) が要求されるから (2.1) 式と矛盾することになる。

実際には、以上の考察によりFGの内部では曲率が P より小さく、再び弾性に戻されると考えられる。この解析では塑性ヒンジが両端F, Gにあり、FG間には残留ひずみがなく、塑性ヒンジ経験前の弾性状態にあるとして計算することにする。

3. 理論解

地盤反力を受ける梁の基本微分方程式は

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{P - k y}{EI} \quad (3.1)$$

ただし、 P : 荷重

k : 地盤反力係数

E : 梁のヤング率

I : 梁の断面二次モーメント

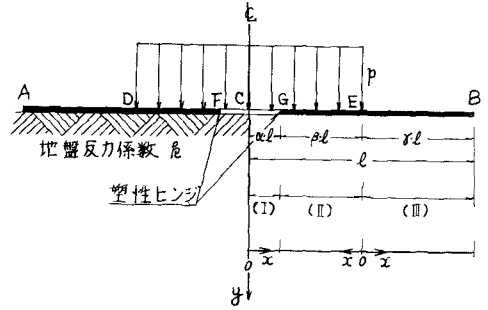


図 - 3

今、図-3の如く、等分布荷重を受ける梁に於て、塑性ヒンジが中央より αl にあるとする。計算は梁を3つの部分に分けて行う。

領域(I), (II), (III) 各部について(3.1)式の一般解は

$$\left. \begin{aligned} y_I &= C_1 \sin Ax \cdot \sinh Ax + C_2 \sin Ax \cdot \cosh Ax + C_3 \cos Ax \cdot \sinh Ax + C_4 \cos Ax \cdot \cosh Ax + P/k \\ y_{II} &= C_5 \sin Ax \cdot \sinh Ax + C_6 \sin Ax \cdot \cosh Ax + C_7 \cos Ax \cdot \sinh Ax + C_8 \cos Ax \cdot \cosh Ax + P/k \\ y_{III} &= C_9 \sin Ax \cdot \sinh Ax + C_{10} \sin Ax \cdot \cosh Ax + C_{11} \cos Ax \cdot \sinh Ax + C_{12} \cos Ax \cdot \cosh Ax \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

で与えられる。ここに $A = \sqrt{\frac{k}{4EI}}$, また 原点は 図-3の如く各区域別に定める。

未定係数 $C_1 \sim C_{12}$ 、及び P を決定するための境界条件は 次の13ことになる。

○ C点で

$$y_I'(0) = 0 \quad (3.4)$$

$$y_{II}''(0) = 0 \quad (3.5)$$

○ G点で

$$y_I(\alpha l) = y_{II}(\beta l) \quad (3.6)$$

$$y_I''(\alpha l) = y_{II}''(\beta l) = -M_p/EI \quad (3.7)$$

$$y_I'''(\alpha l) = y_{II}'''(\beta l) = 0 \quad (3.8)$$

○ E点で

$$y_{II}(0) = y_{III}(0) \quad (3.9)$$

$$y_{II}'(0) = y_{III}'(0) \quad (3.10)$$

$$y_{II}''(0) = y_{III}''(0) \quad (3.11)$$

$$y_{II}'''(0) = y_{III}'''(0) \quad (3.12)$$

○ B点で

$$y_{III}''(\delta l) = 0 \quad (3.13)$$

$$y_{III}'''(\delta l) = 0 \quad (3.14)$$

以上の境界条件より

$$C_2 = C_3 = 0 \quad (3.15)$$

$$C_1 = -\frac{M_p}{\sqrt{kEI}} \cdot \frac{\sin A\alpha l \cdot \cosh A\alpha l + \cos A\alpha l \cdot \sinh A\alpha l}{\sin A\alpha l \cdot \cos A\alpha l + \sinh A\alpha l \cdot \cosh A\alpha l} \quad (3.16)$$

$$C_4 = \frac{M_p}{\sqrt{kEI}} \cdot \frac{\sin A\alpha l \cdot \cosh A\alpha l - \cos A\alpha l \cdot \sinh A\alpha l}{\sin A\alpha l \cdot \cos A\alpha l + \sinh A\alpha l \cdot \cosh A\alpha l} \quad (3.17)$$

$$C_9 = C_5, \quad C_{10} = -C_6, \quad C_{11} = -C_7, \quad C_{12} = C_8 + P/k \quad (3.18)$$

等が得られる。残りの未定係数 C_5, C_6, C_7, C_8, P を求める連立方程式は次のようになり、計算例では電子計算機を用いて数値的に計算を行った。

表 - 1

C_5	C_6	C_7	C_8	P	定数項
$\operatorname{snsh}(A\beta l)$	$\operatorname{snch}(A\beta l)$	$\operatorname{cssh}(A\beta l)$	$\operatorname{csch}(A\beta l)$	0	Y_0
$\operatorname{csch}(A\beta l)$	$\operatorname{cssh}(A\beta l)$	$-\operatorname{snch}(A\beta l)$	$-\operatorname{snsh}(A\beta l)$	0	$-\frac{M_p}{\sqrt{kEI}}$
$-\operatorname{snch}(A\beta l) + \operatorname{cssh}(A\beta l)$	$-\operatorname{snsh}(A\beta l) + \operatorname{csch}(A\beta l)$	$-\operatorname{snsh}(A\beta l) - \operatorname{csch}(A\beta l)$	$-\operatorname{snch}(A\beta l) - \operatorname{cssh}(A\beta l)$	0	0
$\operatorname{csch}(A\beta l)$	$-\operatorname{cssh}(A\beta l)$	$\operatorname{snch}(A\beta l)$	$-\operatorname{snsh}(A\beta l)$	$-\operatorname{snsh}(A\beta l)/k$	0
$-\operatorname{snch}(A\beta l) + \operatorname{cssh}(A\beta l)$	$\operatorname{snsh}(A\beta l) - \operatorname{csch}(A\beta l)$	$\operatorname{snsh}(A\beta l) + \operatorname{csch}(A\beta l)$	$-\operatorname{snch}(A\beta l) - \operatorname{cssh}(A\beta l)$	$-\operatorname{snch}(A\beta l)/k$ $-\operatorname{cssh}(A\beta l)/k$	0

$$\begin{aligned} \operatorname{snsh}(X) &= \sin X \cdot \sinh X & \operatorname{cssh}(X) &= \cos X \cdot \sinh X \\ \operatorname{snch}(X) &= \sin X \cdot \cosh X & \operatorname{csch}(X) &= \cos X \cdot \cosh X \end{aligned}$$

$$Y_0 = \frac{M_p}{\sqrt{kEI}} \frac{\sin A\alpha l \cdot \cos A\alpha l - \sinh A\alpha l \cdot \cosh A\alpha l}{\sin A\alpha l \cdot \cos A\alpha l + \sinh A\alpha l \cdot \cosh A\alpha l}$$

4. 数値計算例

石巻工業港の防波堤沈床の設計に考慮されたH形鋼を例にとって、計算例を示す。
三種の断面諸量、および M_p を示せば、表-2の通り。また、地盤反力係数は実測された 6.6 kg/cm^2 の他、 13.2 kg/cm^2 の2種類を考える。(梁の長さはいずれも25m, 鋼の降伏応力は 2400 kg/cm^2)

表 - 2

H形鋼	A	B	C
$I(\text{cm}^4)$	5.09×10^4	9.13×10^4	14.7×10^4
$\alpha(\text{cm})$	30.0	40.0	30.0
$h(\text{cm})$	41.3	51.1	60.0
$t_1(\text{cm})$	1.1	1.1	1.2
$t_2(\text{cm})$	1.9	2.2	2.5
$M_p(\text{kg}\cdot\text{cm})$	7.45×10^6	11.10×10^6	14.93×10^6

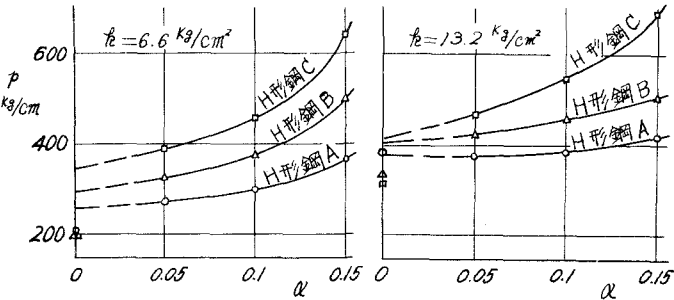
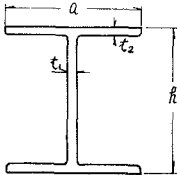


図 - 4

計算結果について述べれば、次の通りである。
塑性ヒンジの位置 α と p との関係は 図-4 のようになる。同図で $\alpha = 0$ に対応する p の値は 最初にC 梁で $M = M_p$ ならしめる p の値である。 p がその値より増加すると、まず $\alpha = 0$ の軸上に移動し (即ち塑性ヒンジがC 梁に生じた状態のまま荷重が増大し) その後

塑性ヒンジの位置が移動を始め、図-4のカーブに沿って η が増大すると考えられる。

たわみと曲げモーメントの代表的な例について、それぞれ、図-5、図-6に示す。図-5に示すように、たわみ曲線は、塑性ヒンジの位置でその接線の傾きが不連続となっている。

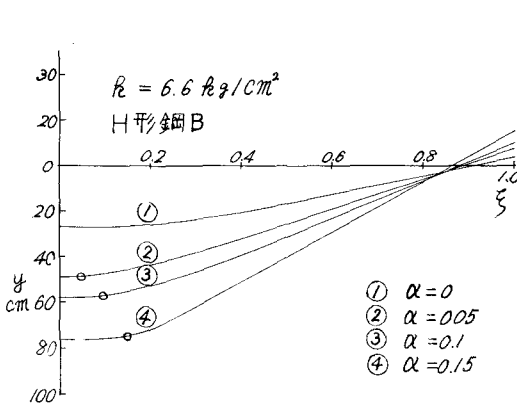


図 - 5

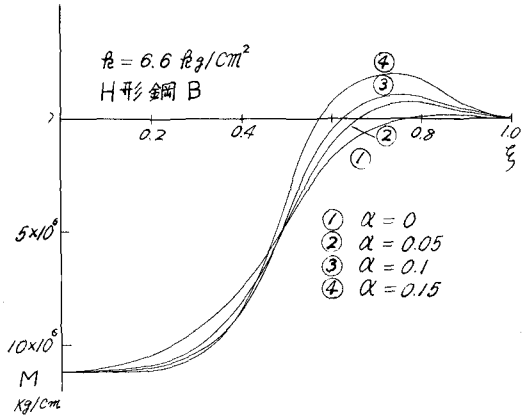


図 - 6

荷重 P と C 点のたわみ y_c の関係は図-7に示す。塑性ヒンジが生じた後のカーブは $\alpha \rightarrow 0$ の時、 P/R に漸近する。($y_c = C_4 + P/R$ で $\alpha \rightarrow 0$ のとき、 $C_4 \rightarrow 0$ なるため。)

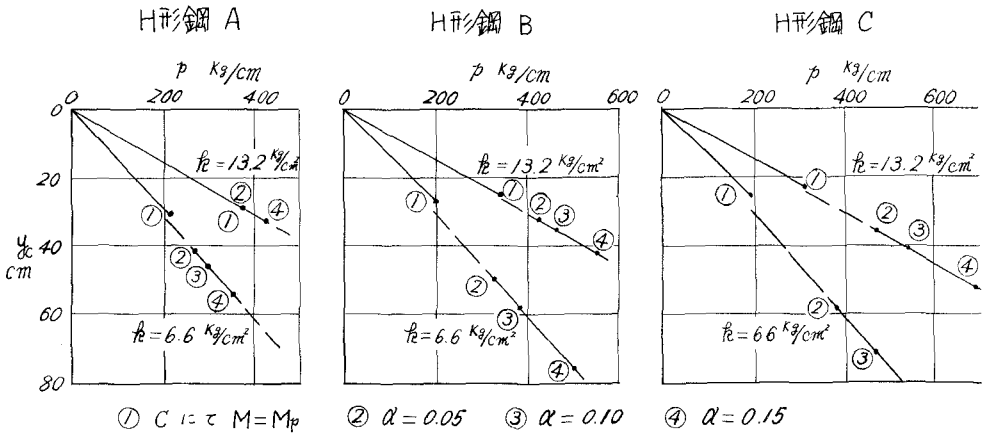


図 - 7

図-6から分かるように、塑性ヒンジの位置が移動するに従って、 $\xi = 0.7$ 付近に負の最大曲げモーメントを生じ、その値が次第に増大する。従って、負の最大曲げモーメントが M_p に達すれば、この付近にも、 α の塑性ヒンジが発生すると考えられる。しかし、図-7に示されているように、たわみ y_c が急速に増大するので、その以前に $P_c = R y_c$ が 地耐力の限界に達し、地盤が破壊されると考えられる。安全率は 地盤から定まるこの極限荷重によって、計算されることになる。

5. むすび

以上 中央部に等分布荷重をうける弾性床上の梁の極限解析について行った理論解、数値計算について述べた。ここに得られた諸性質は 荷重分布、載荷範囲によって変化するものである。また、更に、実験によって、この解析を調べたい考えである。