

# 成層密度流の境界面附近の乱れに関する研究

東北大学教授 正員工博 岩崎 敏夫

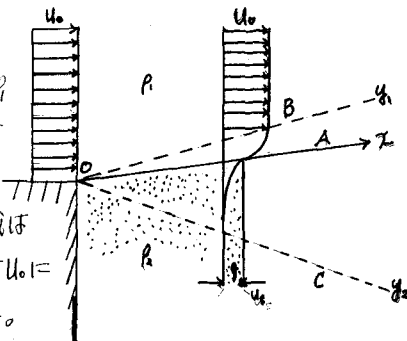
東北大学大学院学生員 ○宮野 一彦

## I. まえがき

この研究は混合する二つの流体、淡水と塩水（食塩を溶解したもの）の間の接触領域近くでの流れに関するものである。最初静止している塩水の上を一定流速をもって淡水を流し、平衡状態に達した場合には二層は明瞭な接触面を生じる。この接触面には剪断応力が発生する。岩崎教授は剪断抵抗係数として  $k_t$  なる量を規定し、 $k_t = \tau / \rho u^2$  と置いた。ここで  $\rho$  は上層の密度であり、 $u$  は上層の平均流速である。ここで又  $\psi = (\rho_2 / \rho_1) k_t$  なる量を規定した。内部剪断応力はエネルギー損失を引き起こすものであるから、 $\psi$  とある関係がなければならない。この二者の間の関係式を岩崎教授は  $k_t = 3.940 \psi^{-0.8356}$  とした。この式の妥当性を実験的に立証する事がこの研究の一つの目的であり、さらに流速分布、濃度分布について報告する。

## 2. 理論

密度が  $\rho_1$  である淡水が静止している。密度が  $\rho_2$  である塩水の上を流れる時には淡水と塩水中の乱れ拡散のために運動量の交換が起る。右図において影響領域は  $OB$  と  $OC$  と仮定する。 $OB$  線上の本平速度は  $u_0$  に等しい。又  $OC$  線上の本平速度は零である。



$OB$  と  $OC$  の間の領域中で速度は漸次変化する。

密度は  $OA$  と  $OB$  の間の領域中で大体一定である。 $OA$  と  $OC$  の間の領域中で密度は漸次変化する。そこで剪断応力  $\tau$  として  $\tau = \rho_1 l^2 \frac{d^2 u}{dy^2}$  — ① とする。ここで  $l$  はプラントルの混合距離であり、接触面鉛直点  $O$  からの本平距離に比例すると仮定する。即ち  $l = c x$  ( $c$  は実験定数) とする。

### ① $AOB$ 領域中の乱流

$$\text{運動方程式は } u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} \text{ — ②}$$

$$\text{ここで } U = \frac{u}{u_0} = f\left(\frac{y}{x}\right) = f(\eta) = F(\eta) \text{ — ③ とおく。}$$

$$\eta \text{ は接触面 } OA \text{ に垂直にとった。流れ関数 } \psi = \int_0^{\eta} f(\eta) d\eta = x F(\eta) \text{ — ④ を導入すると}$$

$$\text{② の方程式は } F + 2\eta F' = 0 \text{ — ⑤}$$

$$\text{境界条件は } \left. \begin{array}{l} \eta = \eta_0 \text{ のとき } F(\eta_0) = \eta_0, F'(\eta_0) = 1, F''(\eta_0) = 0 \\ \eta = 0 \text{ のとき } F(0) = \frac{u_0}{c} = U_0, F'(0) = \frac{\sqrt{K_1}}{c} \end{array} \right\} \text{ — ⑥}$$

ここで  $u_0$  は  $OA$  線上の速度である。⑤ の方程式において  $\eta^* = \frac{\eta}{\sqrt{x}}$  と置きその一般解を求めると、

$$F = A \cdot e^{\eta^*} + B \cdot e^{\frac{1}{2} \eta^* \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \eta^*} + C \cdot e^{\frac{1}{2} \eta^* \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \eta^*} \text{ — ⑦}$$

$$U = \frac{u}{u_0} = -A \cdot e^{\eta^*} + \frac{1}{2} (B + \sqrt{3}C) e^{\frac{1}{2} \eta^* \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \eta^*} - \frac{1}{2} (\sqrt{3}B - C) e^{\frac{1}{2} \eta^* \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \eta^*} \text{ — ⑧}$$

$$\text{ここで } A = \alpha e^{\eta_0^*} (F_1'), B = \alpha e^{\eta_0^*} [(1 + 2\eta_0^*) E_1 - \sqrt{3} E_2], C = \alpha e^{\eta_0^*} [\sqrt{3} E_1 + (1 + 2\eta_0^*) E_2] \quad E_1 = e^{\frac{1}{2} \eta_0^* \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \eta_0^*}, F_1 = e^{\frac{1}{2} \eta_0^* \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \eta_0^*}$$

$$\gamma^* = \gamma / \sqrt{2}c^2, \quad \alpha = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{2}c^2$$

④ AOC領域中の自由拡散

AOC領域中では密度は漸次変化するから②の方程式中の  $\rho$  は変数である。そうすると①の方程式から  $\frac{1}{u} \frac{dF}{d\gamma} = \frac{c^2 F}{2} (F\rho + 2F\rho^2) - ①$ ,  $\rho' = \frac{d\rho}{d\gamma}$  である。②の式より,  $F + 2c^2 F + c^2 \rho' \cdot F = 0 - ⑩$

境界条件は  $\gamma=0$  で  $F(0)=U_s$ ,  $F(0)=\sqrt{K}/C$ ,  $\gamma=\gamma_2$  で  $F(\gamma_2)=0$ ,  $F'(\gamma_2)=0$  である。  $\gamma_2$  は下層境界  $OC$  を示す。

次に二次元拡散方程式は  $u \frac{\partial F}{\partial t} + v \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - ⑪$   $S$ : 塩分濃度,  $E_y = E_y \cdot c^2 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ ,  $E_x$ : 横方向

の移動拡散係数,  $E_y$ : 鉛直方向の移動拡散係数である。密度  $\rho$  と塩分濃度  $S$  の関係は  $\rho = \rho_0(1 + \alpha S) - ⑫$

①の式より,  $\frac{\rho'}{\rho} = -\frac{1}{F} \left( F' + \frac{1}{2} \frac{\gamma}{c^2} \frac{\partial F}{\partial \gamma} F' + \frac{\gamma}{c^2} \frac{\partial F}{\partial \gamma} F' \right) - ⑬$  ⑩の式から  $\rho = -\frac{F}{c^2 F} (F + 2c^2 F) - ⑭$   $\rho = \frac{F}{c^2} = \rho'$  である。

⑭の式を  $\rho$  に微分すれば  $\frac{d\rho}{d\gamma} = -\frac{1}{c^2} (F + 2c^2 F) - ⑮$  ⑬, ⑮の両式より  $c^2 F' - \frac{c^2}{c^2} \frac{\partial F}{\partial \gamma} F' - \frac{\gamma}{c^2} F' + F = 0 - ⑯$   $\gamma = \sqrt{2} \gamma^*$  と置く

⑯の方程式は  $\frac{dF}{d\gamma^*} - \frac{c^2 \gamma^*}{1 + c^2 \gamma^*} \frac{dF}{d\gamma^*} - \frac{\gamma^*}{1 + c^2 \gamma^*} \frac{dF}{d\gamma^*} + F = 0$ , 境界条件は  $\gamma=0$  である  $\frac{dF}{d\gamma^*} = \sqrt{2} U_s$ ,  $\frac{dF}{d\gamma^*} = \sqrt{2} \sqrt{K}$ ,  $\gamma = \gamma_2^* = \frac{\gamma_2}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$

$\frac{dF}{d\gamma^*} = 0$ ,  $\frac{dF}{d\gamma^*} = 0$ , 一般解を級数解と求めると  $F = A_0 + A_1 \gamma^* + A_2 \gamma^{*2} + A_3 \gamma^{*3} + A_4 \gamma^{*4}$ , 決定係数を求めると  $A_0 = \frac{K(\gamma_2^* + 3\alpha\gamma_2^* + 6)}{2\gamma_2^*(3 + \alpha\gamma_2^*)}$

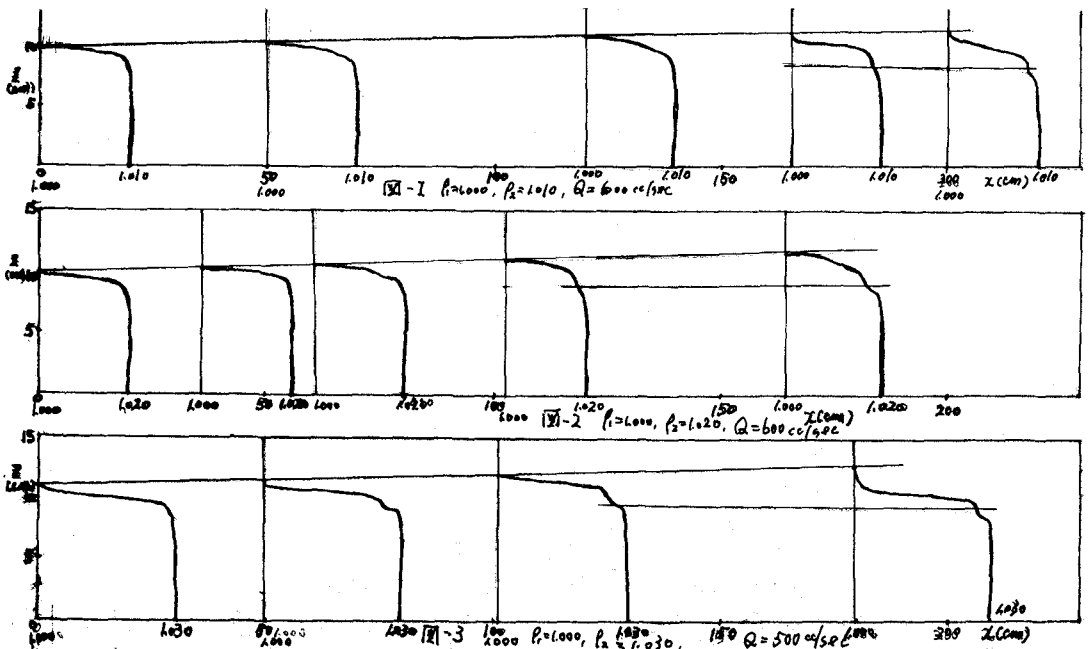
$$A_1 = U_s \sqrt{2} = U_s, \quad A_2 = \frac{1}{2} K = \frac{1}{2} \sqrt{2} \sqrt{K}, \quad \alpha = C^2, \quad K = \sqrt{2} \sqrt{K}$$

$$U = \frac{u}{u_0} \frac{dF}{d\gamma} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{dF}{d\gamma^*} = U_s \left( 1 + W \gamma^* - \frac{1}{2} W^2 + \left( \frac{1}{2} \right) \gamma^{*2} + \frac{1}{3} W C \sqrt{2} \gamma^* + \frac{1}{2} W C \sqrt{2} \gamma^* - \frac{1}{2} W C \sqrt{2} \gamma^* + \left( \frac{1}{2} \right) \gamma^{*2} \right) - ⑰$$

$$W = \frac{1}{U_s} \frac{dF}{d\gamma} = \frac{1}{U_s} \frac{dF}{d\gamma^*} = \frac{(\gamma_2^* + 3\alpha\gamma_2^* + 6)}{2\gamma_2^*(3 + \alpha\gamma_2^*)} = \frac{2\gamma_2^* + 3\alpha\sqrt{2}\gamma_2^* + 6}{2\gamma_2^*(3\sqrt{2} + 2\alpha\gamma_2^*)} \quad (\gamma_2^* = \sqrt{2} \gamma_2 = \frac{\gamma_2}{\sqrt{2}})$$

### 3 実験

密度分布測定は溶液の電気抵抗変化により測定した。鉛線を 3 mm 間隔で平行に設置したものをプローブとし、モーター駆動により下降せしめ、鉛線電極間の電気抵抗変化を連続的に測定記録した。流速分布測定は水路中に四塩化炭素ヒトリエンによって比重を出来るだけ水道水に近似せしめ、水路内に注入して生ずる液滴の落下速度を測定したとの結果を示すと、図-1, 2, 3, 4, 5, 6 の様になる。図 1, 2, 3 は密度の測定結果である。



#### 4. 実験についての考察

この実験は  $Keulegan$  数の範囲が  $0.155 \sim 0.406$  であり安定限界値  $0.178$  判大の場合と小の場合があり、安定領域と不安定領域の二つの場合がある。同じ淡水流量であっても  $\phi$  が小さい程不安定になりやすい。不安定の場合には炭塩両層の接触面には碎波するような内拌波が観察された。特に  $\phi = 0.010$ ,  $Q = 700 \text{ ccm/sec}$  場合にこの現象が著しかった。流下距離  $x$  が増すにつれて、中間層がはっきり濃度分布のデータに現れて、この層の厚さは略々  $3 \text{ cm}$  位であった。流量が小さい時、又密度差が大いし時には一次接触面と二次接触面が存在する。流量が増すと、二次接触面はなくなる。次に流速分布については、炭塩両層の接触直後は接触面が流速の不連続面になっている。流下距離  $x$  が増すにつれて、流速不連続面は塩水層内に移動する。本実験装置では水路中央部では正流、両側壁近傍で逆流という現象が観察された。塩水部分の比重を塩水に近似させた球を入れてやると、球全体が回転する現象が観察された。流量が増すにつれて速度変動が大きくなる。

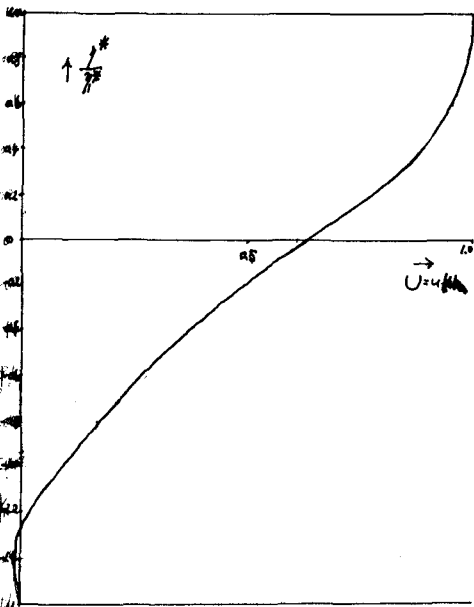


図-4  $\phi = 18.34$ ,  $k_1 = 0.0392$   
境界層内流速分布

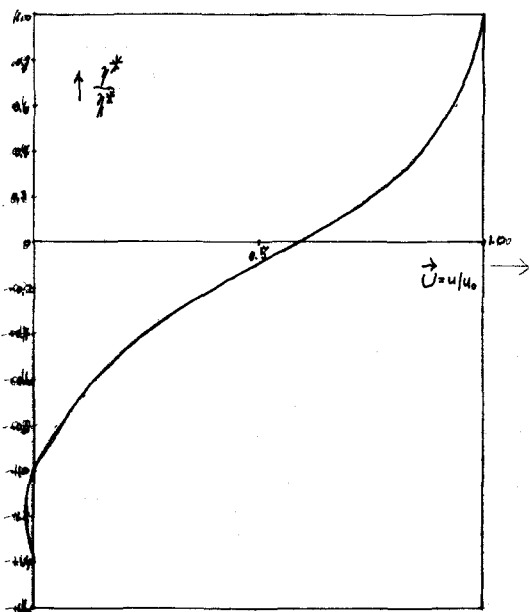


図-5  $\phi = 93.69$ ,  $k_1 = 0.1314$   
境界層内流速分布

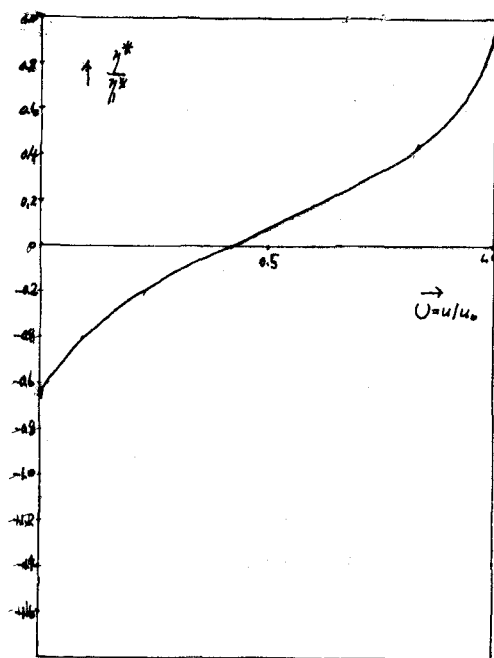


図-6  $\phi = 47.16$ ,  $k_1 = 0.1624$   
境界層内流速分布

## 5 理論値との比較

実験定数である  $C$  を求めてみるとそのオーダーは  $10^{-1}$  だった。Tollmien の場合には  $C=0.0174$  である。大偏差が大きい様である。 $C$  のばらつきも著しい。せん断応力係数  $k_t$  と  $\psi$  の関係式  $k_t = 3.94 \psi^{-0.8356}$  は大体満足する様である。 $k_t$  の値は流下距離  $x$  の増加につれて大きくなる。又内部フルード数  $Fr$  及び内部レイノルズ数の増加に従って減少する。又ある値に収束する事が予想出来る。境界層内の密度分布については  $\alpha=0.10, 0.20, 0.30$  の場合には理論値と直線分布であるが、実験値は大偏差からはずれる様である。流速分布については接触面流速は流下距離  $x$  の増加に従って変化せず、定められた淡水流量に対しては一定である。又内部せん断応力係数  $k_t$  が増大すると、接触面流速は減少する。全実験を通じて  $\psi^*$ ,  $\eta^*$  の理論値は実験値と比較すると大偏差の様である。境界層内の流速分布は流量が小さい場合には、理論値と実験値は大体合うけれども、流量が増大すると、実験値の方が早く零に収束する様である。 $\psi$  の値が大きくなると、又は  $k_t$  の値が小さくなると境界層内の流速分布は下方に移動する様である。この事実は理論値、実験値とも傾向が一致している。

## 6 結論

実験定数  $C$  の値が Tollmien が求めた値と大偏差が起きている点がどんな影響に与えるのか考え見る必要があると思う。上流堰付近は渦による turbulence の影響が大きいことの減殺方法を考える必要がある。又本実験装置では initial stage から established zone までの距離が短かすぎるようである。 $k_t$  の値の算定には側壁の影響を考慮に入れて計算しておく必要がある様である。実験施設のスケールの問題が今後の実験を進めるに当たって重大であると思われる。乱れとものものの解明も今後の研究に待たれる。密度流中の渦動粘性係数は変化し、この変化をもたらしものが密度差にもとづく重力の影響であり、この重力の影響を含めた無次元量が Richardson 数であるが、渦動粘性係数と Richardson 数向のある定量的な関係を見出す事も現在計算中である。拡散係数に就ては未だ計算が終っていないけれども、全実験を通じ鉛直方向の拡散は大きくない様に思われる。

## 7 引用文献

- 1) 岩崎敏夫：二成層密度流の乱流拡散について，土木学会，第19回年次学術講演会，1964
- 2) 岩崎敏夫：成層流における境界面のせん断応力について，Coastal Engineering, chapter 51
- 3) 岩崎，岸田，富岡：二成層密度流における密度混合について，第17回土木学会年次学術講演会
- 4) Shi-igai, H.: On the resistance coefficient at the interface between salt and freshwater, Trans. of J.S.C.E. No. 123, Nov. 1965.