

名取川河口感潮部の数値計算

東北大学工学部 正員 岩崎敏夫

東北大学工学部 学生員 高井俊郎

1. 基本方程式

従来、河川の非定常流を扱う計算においては、計算過程の繁雑さを考慮して、河状断面を矩形あるいは、川幅一様の広矩形と仮定するものが多かった。

本計算では、そのような仮定なしに、計算をすすめることにし、基本方程式を次のように与え、連続方程式において、各項を次のように変形する。

$$\begin{aligned}\frac{\partial A}{\partial t} &= \frac{\partial A}{\partial h} \cdot \frac{\partial h}{\partial t} = T \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= \frac{\partial (v \cdot A)}{\partial x} \\ &= A \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot \left(\frac{\partial A}{\partial h} \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial x} \right)_{h=\text{const}} \\ &= A \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot T \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial A}{\partial x} \Big|_{h=\text{const}}\end{aligned}$$

運動方程式は、(1)式で与えられる。

$$\frac{1}{g} \cdot \frac{\partial v}{\partial t} - i + \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{v^2}{2g} \right) + \frac{n^2 v^2}{R^{4/3}} = 0 \quad (1)$$

連続方程式は (2)式で与えられる。

$$T \cdot \frac{\partial h}{\partial t} + A \cdot \frac{\partial v}{\partial x} + v \cdot T \cdot \frac{\partial h}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial A}{\partial x} \Big|_{h=\text{const}} = q \quad (2)$$

上述の式中 v ; 平均流速 h ; 基準面より水面までの高さ n ; 粗度係数
 R ; 径 深 A ; 断 面 積 T ; $= \frac{\partial A}{\partial h}$ 水面幅
 i ; 河床勾配 q ; 河道に沿う単位長さ当りの横流入量

2. 特性曲線表示

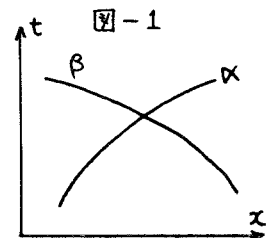
(1), (2)式において

$$m = \frac{1}{T} \cdot \frac{\partial A}{\partial x} \Big|_{h=\text{const}} - \frac{q}{T \cdot v}, \quad C = \sqrt{\frac{gA}{T}}, \quad i_f = -i + \frac{n^2 v^2}{R^{4/3}}$$

とおくと、特性線の理論より、(1), (2)両式は、次のように表示される。

特性方向 α に沿って

$$\left. \begin{aligned}dx - (v + C)dt &= 0 \\ gdh + Cdv + g \int (m \cdot v + i_f \cdot C) dt &= 0\end{aligned} \right\} \quad (3)$$



特性方向 β に沿って

$$\left. \begin{aligned} dx - (v-c)dt &= 0 \\ g \cdot dh - c \cdot dv + g \cdot \int (m \cdot v - c \cdot C) dt &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

3. 数値計算法

(1)+(2)より, Forward characteristic として

$$\frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{v} \frac{\partial h}{\partial t} + 2 \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_F + \left(\frac{v}{g} + \frac{1}{v} \frac{A}{T} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_F + \frac{1}{T} \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)_F + i_f = \frac{q}{TV} \quad (5)$$

(1)-(2)より, Backward characteristic として

$$\frac{1}{g} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{v} \frac{\partial h}{\partial t} + \left(\frac{v}{g} - \frac{1}{v} \frac{A}{T} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_B - \frac{1}{T} \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)_B + i_f = -\frac{q}{TV} \quad (6)$$

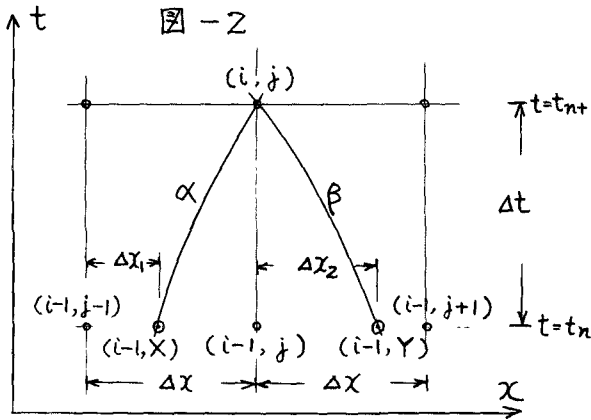


図-2において, Δt は時間のステップ, j は距離のステップを表わしている。

Stoker¹⁾によれば, 微分方程式の解が収束するための条件として, (i, j) での特性線 α, β が, $t = t_n$ から $t = t_{n+1}$ の区間において, $x = j-1$ および $x = j+1$ を横切らないように Δx と Δt を決定すればよいとしている。このように定めれば, (i, j) の値は $(i-1, j-1), (i-1, j+1)$ の2点によって求めることができる。

しかし, この条件を考慮して行なう。

感潮河川の計算(広矩形水路)では, 収束が悪くよい結果が得られなかった。

故に, 本計算では, Stoker の条件を満足する $\Delta x, \Delta t$ を決めた後に, 図-2 に示すような点 $(i-1, X), (i-1, Y)$ を求めた。これら2点では $(i-1, X)$ からの α 特性線および点 $(i-1, Y)$ からの β 特性線が (i, j) において交わるような v, C の値をもつ。

(5)(6)式を階差化するために, 次の各値が用いられる。

$$\Delta x_1 = \left[(\Delta x)^2 - (v_{j-1}^{i-1} + c_{j-1}^{i-1}) \cdot \Delta x \cdot \Delta t \right] / \left[\Delta x + (v_j^{i-1} - v_{j-1}^{i-1} + c_j^{i-1} - c_{j-1}^{i-1}) \cdot \Delta t \right]$$

$$\Delta x_2 = \left[(v_j^{i-1} - c_j^{i-1}) \cdot \Delta x \cdot \Delta t \right] / \left[\Delta x - (v_{j+1}^{i-1} - v_j^{i-1} + c_j^{i-1} - c_{j+1}^{i-1}) \Delta t \right]$$

$$v_X^{i-1} = v_{j-1}^{i-1} + (v_j^{i-1} - v_{j-1}^{i-1}) \cdot \Delta x_1 / \Delta x, \quad c_X^{i-1} = c_{j-1}^{i-1} + (c_j^{i-1} - c_{j-1}^{i-1}) \Delta x_1 / \Delta x$$

$$v_Y^{i-1} = v_j^{i-1} + (v_{j+1}^{i-1} - v_j^{i-1}) \cdot \Delta x_2 / \Delta x, \quad c_Y^{i-1} = c_j^{i-1} + (c_{j+1}^{i-1} - c_j^{i-1}) \Delta x_2 / \Delta x$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{v_X^{i-1} - v_Y^{i-1}}{\Delta t}, \quad \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{h_X^{i-1} - h_Y^{i-1}}{\Delta t}, \quad \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_F = \frac{v_j^{i-1} - v_X^{i-1}}{\Delta x_1}, \quad \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_F = \frac{h_j^{i-1} - h_X^{i-1}}{\Delta x_1}$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_B = \frac{v_Y^{i-1} - v_X^{i-1}}{\Delta x_2}, \quad \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right)_B = \frac{h_Y^{i-1} - h_X^{i-1}}{\Delta x_2}, \quad \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)_F = \frac{A_j^{i-1} - A_X^{i-1}}{\Delta x_1}, \quad \left(\frac{\partial A}{\partial x} \right)_B = \frac{A_Y^{i-1} - A_X^{i-1}}{\Delta x_2}$$

$$v_j^i = v_j^{i-1} - g \frac{\Delta t}{\Delta x - \Delta x_1} (h_j^{i-1} - h_x^{i-1}) - v_j^{i-1} \frac{\Delta t}{Z} \left(\frac{v_j^{i-1} - v_x^{i-1}}{\Delta x - \Delta x_1} + \frac{v_j^{i-1} - v_j^{i-1}}{\Delta x_2} \right) - g \Delta t \cdot i_j^{i-1} \\ - g \frac{\Delta t}{Z} \left\{ \frac{h_j^{i-1}}{v_j^{i-1}} \left(\frac{v_j^{i-1} - v_x^{i-1}}{\Delta x - \Delta x_1} - \frac{v_j^{i-1} - v_j^{i-1}}{\Delta x_2} \right) + \frac{1}{T_j^{i-1}} \left(\frac{A_j^{i-1} - A_x^{i-1}}{\Delta x - \Delta x_1} - \frac{A_j^{i-1} - A_j^{i-1}}{\Delta x_2} \right) \right\} \quad (7)$$

$$h_j^i = h_j^{i-1} - v_j^{i-1} \frac{\Delta t}{\Delta x} (h_j^{i-1} - h_x^{i-1}) - v_j^{i-1} \frac{\Delta t}{Z} \left\{ \frac{v_j^{i-1}}{g} \left(\frac{v_j^{i-1} - v_x^{i-1}}{\Delta x - \Delta x_1} - \frac{v_j^{i-1} - v_j^{i-1}}{\Delta x_2} \right) + \frac{h_j^{i-1}}{v_j^{i-1}} \left(\frac{v_j^{i-1} - v_x^{i-1}}{\Delta x - \Delta x_1} \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{v_j^{i-1} - v_j^{i-1}}{\Delta x_2} \right) + \frac{1}{T_j^{i-1}} \left(\frac{A_j^{i-1} - A_x^{i-1}}{\Delta x - \Delta x_1} + \frac{A_j^{i-1} - A_j^{i-1}}{\Delta x_2} \right) - \frac{Z \cdot g \cdot i_j^{i-1}}{v_j^{i-1}} \right\} \quad (8)$$

Stokerの条件のみでは、収束の悪い場合のあることを、岸²⁾も指摘している。

4. 境界条件

本計算の最終目的は、上流側に洪水の流入波を与え、河口付近における洪水波と潮汐波との重合の問題を研究しようとするものである。

よって境界条件は次のように与えた。

a). 上流側に計画洪水波形を与える。

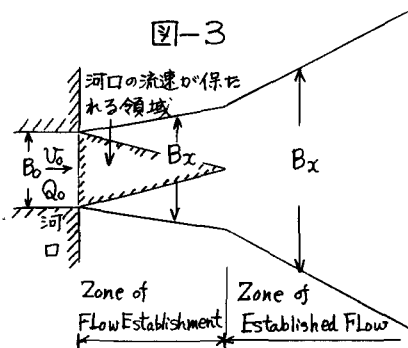
b). 下流側の境界条件は、河口より流出した洪水流の影響がなくなった海中において、潮位変化を与える。

c) 初期条件は、不等流計算によって得られた値を与える。

5. 海中での流れ

河口流出水の拡散については、多くの研究があり、今なお検討されている問題である。

例えば、河口から傾斜海岸への流出を扱った樺木³⁾の実験もあるが、ここでは Albertson Sによる submerged jets の拡散に関する研究報告⁴⁾にもとづいて、海中での流れを扱う。



$$0 \leq x \leq 5.2B_0 \quad 5.2B_0 \leq x$$

Zone of Flow Establishment に対して

$$\left. \begin{aligned} B_x &= 0.30x + B_0 \\ Q_x/Q_0 &= 1 + 0.080x/B_0 \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Zone of Established Flow に対して

$$\left. \begin{aligned} B_x &= 0.492x \\ Q_x/Q_0 &= 0.62\sqrt{x/B_0} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

ここに x : 河口からの距離

B_0, Q_0 : 河口での流路幅、および流量

B_x, Q_x : 河口より x 離れた地点での流路幅、流量

上流端より河口に至る区間は、横流出入がないとしたが、海中での流れにおいては、(9) (10)式よりわかるように、 $Q_x > Q_0$ であり、その差が横流入量として考えられる。

また、河口の近くでは、流出水面が海面より高くなる時、その水位差によって流水が横方向に拡散すると考えて、その量を(11)式のように与え、横流出量とする。

$$q = 2h^* \sqrt{2g(h-h^*)} \quad (11)$$

ここに h : 流出水の水深

h^* : 海の水深

海中では、流路は幅の変化する矩形断面となるので、(2)式左辺の第4項は $u \cdot h \cdot \frac{\partial T}{\partial x}$ となる。

計算には、東北大学計算センターの NARC II を利用し、現在も計算中である。

参 考 文 献

- 1) Stoker J. J. ; Water waves , Interscience , 1957
- 2) 岸 力 , 平山健一 ; 河川における非定常流の数値解法 : 昭和40年土木学会年次講演集
- 3) 榎木 享 ; 河口関そく機構に関する基礎的研究 . 第12回 海岸工学講演集
- 4) Albertson , Dai , Jensen , Hunter Rouse ; Diffusion of Submerged Jets , Proc. A.S.C.E. 1948