複合確率と河川工事計画における その応用について （要 約）

建設省東北地方建設局河川部
河川計画課　長 沢 敏 夫

まえがき

河川工事を合理的に施工する為に統計学の知識を応用する水文統計学は，20世紀はじめアメリカに端を発し，最近において更に重要視される機運となってきた。しかしながら，その研究対象は殆んどが単一水文量の問題に留まっている現状であり，しかもこれらの研究を応用活用していく技術者の立場よりみるとき，その根本的な問題を含み，未解決な幾多の問題を蔵している。

筆者は，水文諸量の間の関係を導入した複合確率の問題の必要性より，二元正規分布函数の性質から確率の計算式を導びき，河川工事計画上における応用を提案し，更に之等応用上において遭遇する水文統計学上の根本問題である正規分布性及び相関性について考察を加え，技術者としての立場より提案を行なった。

なお，この研究にあたり，多大の御高見を賜わった東北大学助教授，岩崎敏夫博士に深謝の意を表するとともに，バックデーターの解析を担当してくれた，河川計画課 庄子，佐々木，谷田の三君及び東北大学生岸田君に対し謝意を表する。

§1. 緒論 ── 河川工事計画の対象となる水文量について

我々が河川工事計画上主として対象とすべき水文量は，その目的により異なるべきである。何故ならば，堤防高の計画に必要なのは洪水波のピーク水位であり，ダムの洪水調節計画においては総洪水量を主とし，洪水調節効果を把握する為，そのピーク流量も対象となり，その関係を究明する必要が生じる。又内水排除計画の場合を

考えるならば，外水条件としては洪水波のピーク水位よりはむしろ許容水位の洪水継続時間が主となり，この前後にふる降雨（内水降雨）と洪水原因となる降雨（洪水降雨）との関連把握が重大なる因子となる。かく考えるとき河川工事計画の対象量も単一水文量より複合水文量へと移るべきであり，且つ頻度把握も亦対象水文量間の関係を導入した複合確率の問題として取扱わなければならない問題の多いことに気づくであろう。

§2. 二元正規分布函数と確率計算法について

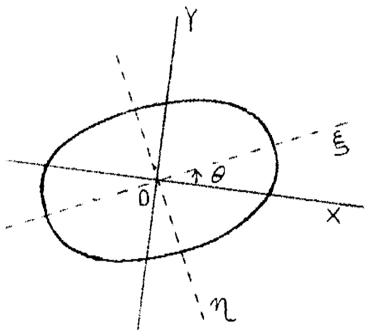
二元正規分布函数は数学的に次式で示される。

$$Z=f(x,y)=\frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}\,e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\left(\frac{x-m_1}{\sigma_1}\right)^2-2\rho\left(\frac{x-m_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{y-m_2}{\sigma_2}\right)+\left(\frac{y-m_2}{\sigma_2}\right)^2\right\}} \qquad \cdots\cdots(1)$$

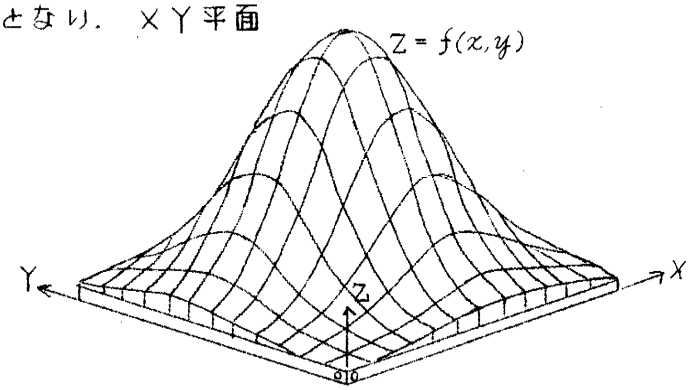
こゝに

m_1 ： xの分布の最確値（中央値）
m_2 ： yの分布の最確値（中央値）
σ_1 ： xの分布の標準偏差
σ_2 ： yの分布の標準偏差
ρ ： xとyとの相関係数

(1)の曲面は［図－1］のような形で，XY平面に垂直な平面の切口は常に正規分布曲線となり，XY平面



［図－2］



［図－1］

に平行な平面での切口は，Ζの最大値をこさない範囲で $\rho^2 = 1$ でない限りダ円となる。このダ円の方程式は(4)で示され，その主軸の方向は(5)で表される。

$$\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2} - \frac{2\rho(x-m_1)(y-m_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2} = D \quad \cdots\cdots(4)$$

こゝに

$$D = 2(1-\rho^2)(\log A - \log Z_1)$$

$$A = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}}$$

Z_1： XY平面より切断平面までの距離

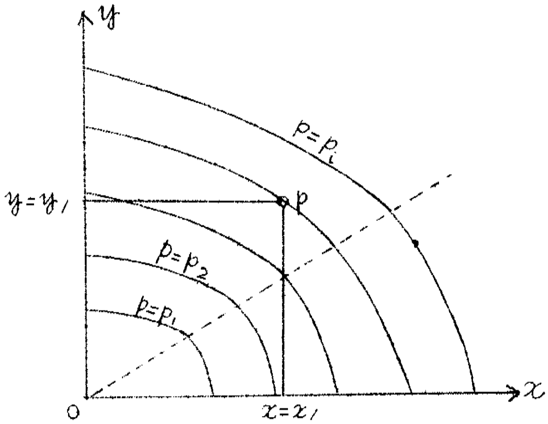
$$\tan 2\theta = \frac{2\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_2^2-\sigma_1^2} \quad \cdots\cdots(5)$$

二元の正規分布に従う x, y 二量について，$x = x_1$，$y = y_1$ の非超過確率 p_{x_1, y_1} は(9)で定義される。

$$p_{x_1, y_1} = \int_{-\infty}^{x_1}\int_{-\infty}^{y_1} f(x, y)\, dx \cdot dy \quad \cdots\cdots(9)$$

§3. 二変数複合確率の応用について

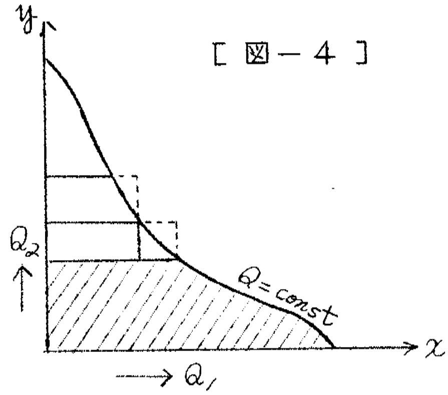
水文量 x_1, y_1, の色々な組合せについて前述の方法により確率を計算できるとすれば〔図—3〕を得る。しかる場合その応用について略述する。



〔図—3〕

1. ダムの洪水調節計画における応用——今 x を総洪水量，y を洪水ピーク流量とするとき，ダムの計画対称となる確率年に相当する各洪水波について調節の方法を検討すれば河川の計画と直結する調節計画をたてることが出来る。
2. 内水排除計画における応用——x を許容湛水位に相当する外水位の継続時间，y を内水降雨とし，計画高水流量の確率或は経済効果を加味して定めた確率に相当する各組合せについて計画を検討すれば合理的な内水排除計画が可能となる。
3. 支川合流に伴う洪水流量の確率算定における応用——今 x を本川の流量 Q_1，y を支川流量 Q_2 とすれば，或る確率に相当する Q_1，Q_2 の幾つかの組合せが生じ，それにより合流状況を解明することが出来る。

又合流後の流量 Q の確率は次のようにして求めることが可能である。即ち Q_1，Q_2 の大きさの相違，それに伴なう水理的合流状況，時差の変化等を考慮し合流後の流量が Q になる Q_1，Q_2 の組合せより〔図—4〕のような $Q = const$ 曲線をひく事

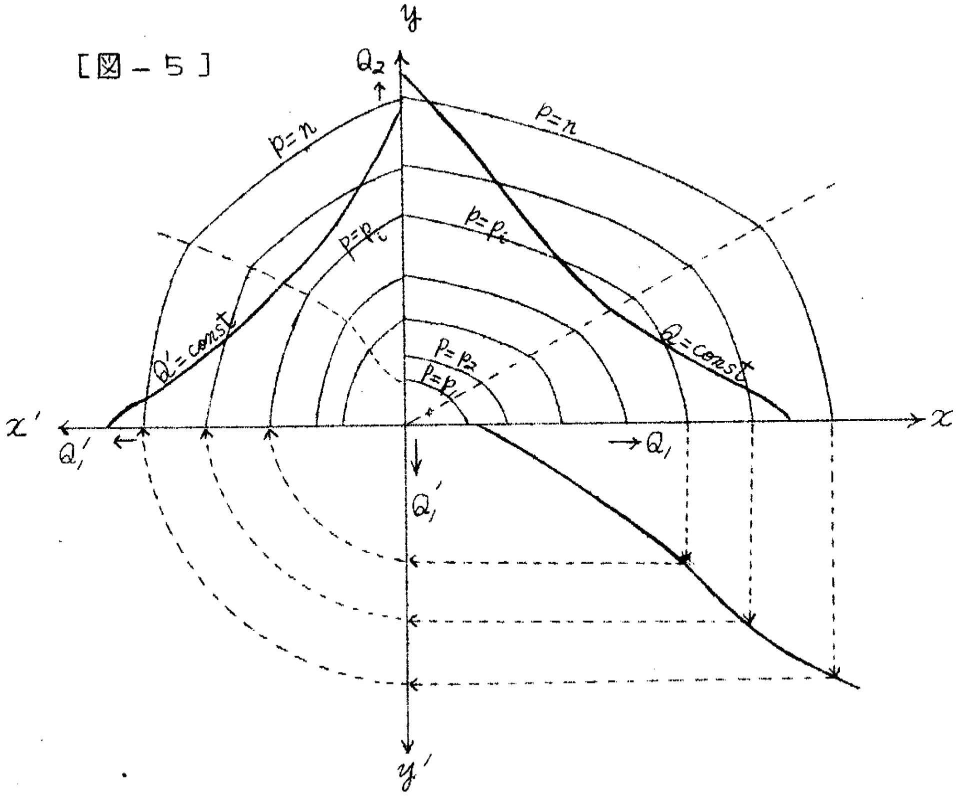


〔図—4〕

が出来る。しかるとき Q の確率は x, y 軸とこの曲線で囲まれた範囲に相当する正規分布曲面体の体積に相当し，図のような幾つかの区間内の確率の和として求めることが出来る。

更に，A河川に洪水調節ダムが作られた場合の支川合流後流量 Q' の確率も次のようにして計算される。

［図－5］



即ち［図－5］において第1象限は［図－4］の関係であり，第2象限の $Q-Q'$ 曲線がダムの調節前後の流量の関係である。今第1象限の x 軸を $Q-Q'$ 曲線を通して x' 軸に移せば第4象限の確率関係をうる。故に Q_1' と Q_2 との合流状況より $Q'=const$ 曲線を求めれば前と同様な方法でダム築造後の合流量 Q' に対する確率を求めることが出来る。

§4. 応用上の問題点についての考察

1. 水文諸量の正規分布性と標準偏差について

以上河川工事計画における二変数複合確率の応用について前述したが，これらはすべて，水文諸量が何らかの形で正規分布と考える事が出来るという仮定に立脚している。しかしながら，現代水文統計学上最も研究対象とされている洪水ピーク流量の分布性においてさえ多くの学説があり，厳密にいえばこの証明は非常に困難な問題である。しかもこれらの各計算法による値にはかなりの違いが生じ，各人各様の計算値をたずさえる事は頻度数値の相対性さえ失われる事となり，実務上の大きな欠陥とさえなっている。この事より根本的な方法論の研究とは別に，頻度の相対性を表示する為の一つの方法が規定される事が望ましく，筆者も亦その一方法を提案し，諸氏の批判をまつものである。

（筆者案）

資料：　年間類似関係月の最大(小)値を用いる。

計算法：　関係月間の月生起確率（P_m）を簡易法により求め，それを用いて年確率（P_y）を計算する。

$$\left.\begin{aligned} P_m &= \frac{2i-1}{2m\,N} \\ P_y &\fallingdotseq 1-(1-P_m)^m \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (12)$$

こゝに　N：資料年数，　m：年間類似関係月数

確率推定法：　P_y を対数確率紙にプロットし，対数正規分布性の仮定は必要半分のみにしぼって，中央値と中央部三分の二の範囲内の点の延長をもって行う。

一般に我々が河川工事計画の為に頻度解析を行う場合に，必要とする頻度の範囲は極めて限られた範囲である事が多い。この事は水文諸量の分布に対しても必要範囲に於て適合する正規分布を

(1)において　$y = y_i\,(const)$ とおいた場合

$f(x, y_i) = f(x)$ とおくと

$$\sqrt{2\pi}\,\sigma_2\, e^{\frac{(y_i-m_2)^2}{2\sigma_2^2}} \cdot f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}\,\sigma_1}\, e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)\sigma_1^2}\left\{(x-m)-\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y_i-m_2)\right\}^2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

となる。この右辺は正規分布を示し 標準偏差：$\sqrt{1-\rho^2}\,\sigma_1$

平均値　$x = m_1 + \rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y_i - m_2)$　なる事を表している。

$x = x_1$, $y = y_1$ の非超過確率　$P_{x_1 y_1}$ は定義により(9)で示れる.

$$P_{x_1, y_1} = \int_{-\infty}^{y_1}\int_{-\infty}^{x_1} f(x, y)\,dx\cdot dy \quad \cdots\cdots\cdots(9)$$

(9)を変形し(2)の性質を導入すると

$$P_{x_1 y_1} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_2}\int_{-\infty}^{y_i=y}\left\{e^{-\frac{(y_i-m_2)^2}{2\sigma_2}}\cdot\Phi\left(\frac{(x_1-m_1)-\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y_i-m_2)}{\sqrt{1-\rho^2}\,\sigma_1}\right)\right\}dy \quad \cdots\cdots(10)$$

ここに　$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{t}\varphi(t)\,dt$；　$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}$

(10)は実際上次の様にして計算する。

$$P_{x_1 y_1} \doteqdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_2}\sum_{y_i=G}^{y_1}\left\{e^{-\frac{(y_i-m_2)^2}{2\sigma_2^2}}\cdot\Phi\left(\frac{(x_1-m_1)-\rho\frac{\sigma_1}{\sigma_2}(y_i-m_2)}{\sqrt{1-\rho^2}\;\sigma_1}\right)\right\}\Delta y$$

ここにGは必要とする精度によりきまる値で

$$G \leqq \sigma_2\eta - m_2 \quad \cdots\cdots\cdots(11)$$

η は $\frac{1}{100}$ の精度で -3.0, $\frac{1}{1000}$ の場合 -3.1 で充分である。

仮定する事の可能性を暗示しており，先にのべた筆者の提案とも関連し，洪水ピーク流量との関係より推定し，洪水水深，洪水継続時間，降雨諸量も亦対数正規分布としてその頻度等を論じていく事が現在の河川工学上充分にその意義を有している事を示している。（以後この仮定を「水文諸量の対数正規分布仮定」という。）

水文量について，かく正規分布を仮定すれば，正規分布曲線の性質より標準偏差を求めることが出来る。

2. 相関係数について

正規分布仮定の問題とも関連し，水文二量の各対数値間の相関係数を求める場合にも問題点に遭遇する。即ち x，y 二量の関係が必ずしも全区間に於て直線関係を基本とする関係とならない場合が少くない事である。相互に関連する正規分布二量の関係は必ず直線関係を基本とする筈であるが，こゝに仮定の矛盾が表れるのである。

又，更に考えられる事は，水文二量の間の相関の度合はその階級によって異なるかもしれない事である。

この二つの事より相関係数は我々の要求する階級の値を求めなければならない事がわかる。而してこうして求めた相関係数を用いて二変数の正規分布を規定する事は，水文二量が全範囲において同じような相関度をもつ事をも仮定する事になる。畢竟これは先の「正規分布仮定」の二次元への拡大に他ならない。

かく規定された相関係数について筆者の行った計算法を以下に示す。資料は相対応する水文二量の対数値中その一つが生起確率（５０％）以上である資料に限定し。二量の５０％点（m_1，m_2）に対する資料点の対称点（*image*）を求め，これを資料に加えて計算する。なお相関係数 ρ は数学的に次式で定義される。

$$\rho = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\Sigma(x_i - \bar{x})^2 \cdot \Sigma(y_i - \bar{y})^2}} \quad \cdots\cdots\cdots (16)$$

こゝに $\bar{x}$，$\bar{y}$ は観測値の標本平均を示す。

§5. 結　言

以上筆者は技術者として，「必要」に要求されるまヽ，かなり大胆なる「仮定」の下に，河川工事計画上の問題を二元正規分布函数として頻度解析を行う事が出来るとし，その応用についてのべた。しかし本文にも記したように，水文量が必ず対数正規分布として処理しうるものかどうかという本質的な問題については，研究者の今後の問題としてゆだねたいと思つている。