論文　種々の不確実性を考慮した軌道座屈発生件数の期待値解析

阿部　和久[1]・小坂　拓斗[2]・紅露　一寛[3]

[1]正会員 新潟大学教授　工学部社会基盤工学プログラム (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地)
E-mail: abe@eng.niigata-u.ac.jp (Correponding Author)

[2]新潟大学学生 (研究当時)　工学部社会基盤工学プログラム (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地)

[3]正会員 新潟大学教授　工学部社会基盤工学プログラム (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地)
E-mail: kouro@eng.niigata-u.ac.jp

軌道座屈強度と，日最高レール温度の確率密度関数を求め，所定の軌道区間長における 1 年当りの座屈発生件数期待値を評価するまでの一連の解析過程を構成した．その際に，軌道の初期通り変位波形と最終道床横抵抗力を所定の距離相関に従う不確定量として与えた．また，レール温度は過去に観測された気象データと日射の経時変化とから数値解析により求めた．解析例を通して，初期通り変位の標準偏差と最終道床横抵抗力の平均値，およびレールの中立温度が座屈発生件数期待値に及ぼす影響について調べた．

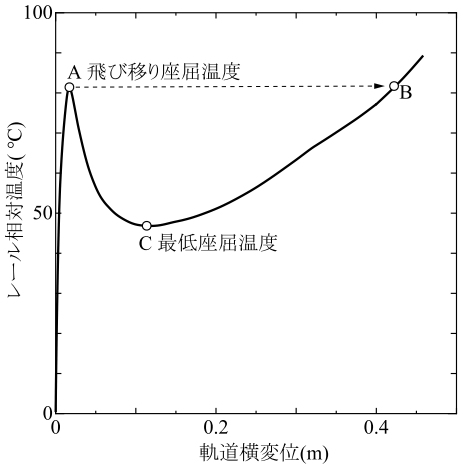
Key Words: *probability analysis, risk analysis, standard deviation of track misalignment, average of track lateral resistance, rail neutral temperature*

1.　はじめに

ロングレール軌道では，まくらぎを介してレールが道床により拘束されるため，温度変化を受けても伸縮を生じ得ない不動区間が存在する．当該区間のレールには温度応力が発生し，夏季の高温時には座屈の危険性が増す．よって，ロングレール軌道には適切な座屈管理が求められる．

図–1 は，数値軌道モデルを対象に，座屈により大きな横変位を生ずる箇所のたわみ量を横軸に，レール相対温度を縦軸に取って系のつり合い経路を求めた例である．レール温度の上昇に伴い，徐々に横変位が増加して図中 A 点にまで達する．その後つり合い経路は温度低下と共に C 点の最低座屈温度 (強さ) を経由して再度温度上昇に至る．A 点から C 点までは不安定なつり合い経路であるため，力学状態は A 点を通過した時点で安定なつり合い経路上の B 点に遷移し，その結果大きなたわみ変形が瞬時に発生する．この様な座屈形態を飛び移り座屈と呼ぶ．

我国では C 点の最低座屈温度に基づいた管理手法が採られている [1)]．上述のとおり，軌道に大きな変形を生ずるのは A の飛び移り座屈温度であり，それまでの変位は比較的小さなものとなる．したがって，最低座屈温度に基づいた管理では安全性をより確実に担保し得る反面，過度に余裕が設けられることが懸念され，飛び移り座屈温度に基づいた軌道管理の方がより合理的に思われる [2)]．しかし，軌道には初期通り変位を始め様々な不確実性が存在しており，飛び移り座屈温度がそれらに依存することから，現時点ではその確定論的評価が難しい．



図–1　軌道座屈におけるつり合い経路の解析例

一方，国外では軌道座屈の確率論的評価が検討されている．Nguyen ら [3)] は，レール温度と中立温度およびレール座屈強度の不確実性を考慮したモンテカルロシ

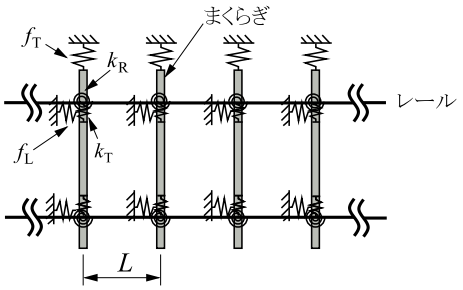
ミュレーション (MCS) を実施し，夏季の猛暑日を対象とした座屈発生件数の推定を試みている．Bae ら [4] は，最低座屈温度を対象に，道床横抵抗力やレール中立温度の不確実性を考慮した座屈強度確率の評価を行っている．また，Kish と Samavedam[5] は，通り変位振幅と道床横抵抗力および中立温度を確率変数として，軌道座屈強度の確率分布とレール日最高温度の確率分布とから 1 年間当りの座屈発生件数を評価する手法を提案している．さらに米国では，これに基づいた座屈安全性に関する評価法が検討されている [6]．

しかし，これらの研究で設定されている軌道座屈モデルや考慮されている不確実性は，やや限定的なものとなっている．例えば，道床横抵抗力は本来空間方向に変動し得るものと考えられるが，それに関する情報が不十分なこともあり，軌道に沿って一様に分布するものとしている．また，文献 3) では初期通り変位は考慮せず，有限長 Euler 柱の分岐座屈モードに基づく簡易的な評価に止まっている．文献 5) では初期通り変位振幅の不確実性を考慮した有限要素モデルに基づいた軌道座屈解析が行われているものの，特定形状の通り変位波形のみを対象としている．

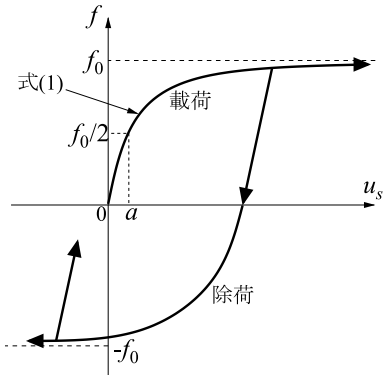
これに対し，著者らの研究グループ [7] では，軌道飛び移り座屈が初期通り変位波形に鋭敏な現象であることから，当該波形を定常ランダムなモデルで表し，座屈強度の確率分布を MCS により評価した．さらに文献 8) では，道床横抵抗力を一様分布で与えた場合のその値自体のバラツキや，空間変動波長などが座屈強度確率に及ぼす影響について調べた．

レールの相対温度が既知，もしくは十分な確度で予測可能な場合であれば，これまでに構築した手法により当該温度下における座屈発生確率を条件付き確率として評価することができ，これをその時点での対策に反映させることが可能である．しかし，長期にわたる軌道の座屈管理計画を策定する様な場合，レールの相対温度は不確定量となる．よって，当該温度の確率分布を別途求め，それと軌道座屈強度の確率分布とから文献 5,6) の様に座屈発生確率を求める必要がある．

そこで本論文では，レールの日最高温度の確率分布を求め，それと文献 7,8) に示した手順で求めた軌道座屈強度の確率分布とから年間の座屈発生件数期待値の評価を試みる．その際に，軌道座屈に大きく影響するとされている初期通り変位波形と道床横抵抗力の不確実性を反映させる．また，レール中立温度については，それを所定の値に設定した場合と，その不確実性を考慮した場合とを対象とする．なお，レール日最高温度の評価には，気温と日射を考慮したレール温度解析法 [9] を適用する．最後に解析例を通して，通り変位の標準偏差や道床横抵抗力，中立温度などが座屈発生件数の期待値に及ぼす影響について調べる．



図–2 軌道座屈における軌道のモデル化



図–3 道床横・縦抵抗力の弾塑性履歴のモデル化

2. 軌道座屈強度確率の評価解析法

(1) 軌道モデル

軌道座屈強度の確率分布を求めるための座屈解析には文献 7,8) と同様の数値モデルを用いる．以下にその概略を述べる．

図–2 に示す様な直線区間の軌道構造を対象とする．左右レールは軸 (縦) 方向伸縮と横方向たわみを考慮した Euler ばりで表現し，有限変位理論に基づきそれらをはり要素により離散化する．まくらぎは間隔 L で配置された剛な棒としてモデル化する．レール・まくらぎ間の締結部には，回転バネ k_R と横方向バネ k_T を設ける．なお，縦方向に関しては，一般にまくらぎ・道床間における変位が支配的となるため，レール・まくらぎ間は剛結としている．まくらぎに作用する道床横抵抗力 f_T と縦抵抗力 f_L は弾塑性履歴を考慮した**図–3** に示す様な非線形バネで表現する．ただし，道床横抵抗力はまくらぎ一本分の値とし，縦抵抗力は左右のレール締結位置毎に設定する．これらの弾塑性挙動における骨格曲線は次式で与える．

$$f = f_0 \frac{u_s}{a + |u_s|} \tag{1}$$

ここで，f は道床横抵抗力または縦抵抗力，f_0 はそれらの最終値，u_s はまくらぎの横または縦方向変位，a は $f = f_0/2$ におけるまくらぎ変位である．

軌道両端は拘束せず，道床縦抵抗力作用下で温度変化によるふく進を許容する様にしている．また，座屈解析に当り，以下に述べるとおり初期通り変位波形と道床横抵抗力をランダムに設定する．この場合，座屈箇所の事前特定が不可能となるため，飛び移り座屈温度の探索には有限要素方程式の節点変位ベクトルとレール温度とで与えられる一般化座標の多次元空間に対して弧長増分法 [10] を適用する．

(2) ランダムな初期通り変位波形の生成 [7),8)]

定常ランダムな初期通り変位波形が次式の距離相関 $R_w(x)$ に従うものと仮定する [7),8)]．

$$R_w(x) = \sigma_w^2 e^{-(x/d_w)^2} \tag{2}$$

ここで，x は軌道長手方向距離，σ_w と d_w は初期通り変位の標準偏差と相関パラメータ (相関長) である．

左右レールの初期通り変位を，以下の手順によりそれぞれ独立に設定する．長さ l のレールをはり要素により M 分割する．なお，i 番節点の x 座標値 x_i を $i\Delta x$, $(i = 0, \cdots, M)$ で与える．ただし，$\Delta x = l/M$ とする．i 番節点における初期通り変位を w_{0i} とし，これを成分に持つベクトル $\{\mathbf{W}_0\}$ を次式により生成する．

$$\{\mathbf{W}_0\} = [\boldsymbol{\Phi}_w][\boldsymbol{\Lambda}_w^{1/2}]\{\boldsymbol{\xi}\} \tag{3}$$

ここで，$\{\boldsymbol{\xi}\}$ は期待値ゼロ，標準偏差 1 の標準正規乱数ベクトルである．また，$[\boldsymbol{\Phi}_w]$ と $[\boldsymbol{\Lambda}_w^{1/2}]$ は，それぞれ次の固有値問題に対する固有ベクトル $\{\boldsymbol{\phi}_{w,i}\}$ と固有値 $\lambda_{w,i}$ の 1/2 乗を縦ベクトルおよび対角成分に持つ行列である．

$$[\mathbf{C}_w]\{\boldsymbol{\phi}_{w,i}\} = \lambda_{w,i}\{\boldsymbol{\phi}_{w,i}\} \tag{4}$$

なお，式 (4) における行列 $[\mathbf{C}_w]$ の i 行 j 列成分 $c_{w,ij}$ は，式 (2) の距離相関関数により次式で与えられる．

$$c_{w,ij} = R_w(|i - j| \cdot \Delta x) \tag{5}$$

(3) ランダムな道床横抵抗力の生成

最終道床横抵抗力の空間変動特性に関してはほとんど測定事例などが無く，現状では十分な情報が得られていない．しかし，それが軌道座屈強度の確率分布に及ぼす影響は無視し得ないと考えられる [8)]．そのため，本研究では **2.(2)** と同様の手順により軌道長手方向にランダムに変動する成分をまくらぎ毎に生成し，それを最終道床横抵抗力の平均値 $\bar{f}_{0T}$ に加算することとした．なお，空間変動の距離相関関数 $R_f(x)$ には，式 (2) と同様の次式を仮定した．

$$R_f(x) = \sigma_f^2 e^{-(x/d_f)^2} \tag{6}$$

ここで，σ_f と d_f は，それぞれ最終道床横抵抗力の標準偏差と相関長である．

3. 日最高レール温度確率の評価解析

Zakeri ら [11)] は，晴天時と曇天時におけるレール温度と気温との関係を簡便な経験式に基づいて設定している．しかし，レール温度は太陽輻射熱に依存するため，日光の入射角の影響を適切に評価する必要があるものと考えられる．そのため，本研究では文献 9) に構築したより精緻なモデルに基づきレール温度解析を実施した．以下に当該解析モデルの概略について述べる．

水平な地面に敷設された直線軌道を考える．レール温度は断面内一様とする．別途行った解析では，レール端部における空気との熱の授受により，端部から 2m 程度の範囲でレール温度分布が不均一となった．しかし軌道座屈は，一般にレール端から 100m 以上内側の不動区間で発生し，当該箇所では端部における温度変化の影響は無視できると考えられる．そのため，部分的に日陰区間が存在する様なケースを想定しない限り，レール長手方向の温度分布は一様と仮定できる．

単位長さ当たりのレールにおける，微小時間 dt 当りの熱エネルギー増分 dE を次式により評価する．

$$dE = dE_S - dE_T - dE_R \tag{7}$$

ここで，dE_S は太陽輻射エネルギー，dE_T は周囲の空気に伝達される熱エネルギー，dE_R は周囲に放射される熱エネルギーである．

式 (7) に各項の具体式を代入して次の方程式を得る．

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{C\rho A}\{\gamma Q_S - [h(T - T_a) + \epsilon(T^4 - T_a^4)]S_R\} \tag{8}$$

ここで，T はレール温度 (K)，t は時間，C は比熱，ρ と A はレール密度と断面積，Q_S は単位長さ当りのレールが単位時間に受ける太陽輻射エネルギーであり，γ はその吸収率，h は空気の熱伝導率，T_a は気温，S_R はレール断面周長，ϵ はレールと周囲環境との間での輻射の授受に関する係数である．

式 (8) における太陽輻射エネルギー Q_S は，さらに次の 2 つの項から構成される．

$$Q_S = A_n \int_{S_R} \cos\theta_i \, dS + B_S S_R \tag{9}$$

ここで，右辺第 1 項目はレール側面における直達日射量であり，A_n は日光が垂直に当たる面の直達日射量，θ_i はレール側面の各面素に対する日射入射角である．ただし，日光が当たらない面は積分しない．また，第 2 項目は全天空の散乱光から供給される日射量であり，B_S は水平面全天空日射量である．なお，詳細については文献 9) を参照されたい．

以下の解析では，気象庁で公開されている 1 時間毎の気温と日照時間割合を入力値とする．1 時間毎の日照時間割合を式 (9) の右辺第 1 項目の直達日射量に乗ずることで日射量を計算する．複数年にわたる気象データを用いてその間のレール温度解析を実施し，その結果より日最高レール温度の確率分布を求める．

4. 軌道座屈発生件数の期待値計算

(1) 任意軌道区間長における座屈発生件数の期待値

区間長 l_0 の軌道において，相対レール温度 T_r 以下で，どこか 1 箇所に座屈が発生する確率を $P_{l0}(T_r)$ と置く．前述の軌道座屈 MCS より，相対レール温度 T_r 以下で軌道モデルの 1 箇所に飛び移り座屈が発生する確率が得られるので，当該モデルの不動区間長を l_0 とすると，それより $P_{l0}(T_r)$ を求めることができる．このとき，区間長 $N \times l_0$(N は自然数) において，相対温度 T_r 以下で座屈が発生するケースには，長さ l_0 の部分区間のいずれか 1 区間が座屈する場合から，N 個の全区間で座屈を生ずる場合までが存在する．各区間に発生する座屈を互いに独立な事象と仮定すると，座屈発生箇所数の期待値 $\bar{N}_B$ は次式で求められる．

$$\bar{N}_B(T_r) = \sum_{n=1}^{N} n P_{l0}^n(T_r) \cdot (1 - P_{l0}(T_r))^{N-n} \cdot C_N^n \quad (10)$$

ここで，C_N^n は二項係数である．

多少の計算の後，式 (10) の $\bar{N}_B$ は次式で与えられる．

$$\bar{N}_B(T_r) = N P_{l0}(T_r) \quad (11)$$

よって，座屈発生個所数の期待値は，軌道区間長に比例する．すると，区間数 N はもはや整数である必要は無く，式 (11) は任意の軌道長に適用可能となる．

日最高相対レール温度の確率密度関数を $p_r(T_r)$ とすると，区間長 l_0 で 1 日当りに発生する座屈件数の期待値 E_0 は次式で与えられる．

$$E_0 = \int_{-\infty}^{\infty} p_r(T_r) P_{l0}(T_r)\, dT_r \quad (12)$$

すると，式 (11) より，長さ $N \times l_0$ の軌道区間の 1 年間 (365 日) における座屈発生件数の期待値 E_{N1} は次式で与えられる [6]．

$$E_{N1} = 365N \cdot E_0 \quad (13)$$

よって，任意区間長における年間座屈発生件数の期待値は E_0 の評価に帰着する．

(2) 相対レール温度の確率密度関数

一般にレール中立温度は空間変動し得るものと考えられる．しかし，その発生機構や分布性状などに関する知見が現時点ではほとんど得られていない．また，軌道座屈解析において空間変動する中立温度を適切に設定することは，それがふく進と連動することから，必ずしも容易ではない．そのため本研究では，中立温度は軌道全域にわたり一定値を取るものとし，不確実性を考慮する場合にはその値のバラツキを相対レール温度に反映させることとした．

レール温度を T，中立温度を T_N とすると，相対温度 T_r は $T - T_N$ で与えられる．N_y 年間にわたる日最高レール温度 $T_i, (i = 1, \cdots, 365N_y)$ が，**3.** に述べたレール温度解析より得られているものとする．その下で，日最高レール温度の確率密度関数 $p_T(T)$ を，核密度推定 [12] により次式で評価するものとする．

$$\begin{aligned} p_T(T) &= \frac{1}{N_d h_T \sqrt{2\pi}} \sum_{i=1}^{N_d} e^{-(T-T_i)^2/(2h_T^2)}, \\ h_T &= \sigma_T \left(\frac{4}{3N_d} \right)^{1/5} \end{aligned} \quad (14)$$

ここで，σ_T は T_i より求めた日最高レール温度の標準偏差であり，$N_d = 365N_y$ である．

一方，中立温度の確率密度関数 p_N が，次式の様に期待値 $\bar{T}_N$，標準偏差 σ_N の正規分布で与えられているものとする．

$$p_N(T_N) = \frac{1}{\sigma_N \sqrt{2\pi}} e^{-(T_N - \bar{T}_N)^2/(2\sigma_N^2)} \quad (15)$$

すると，相対温度 T_r の確率密度関数 p_r は次式で与えられる．

$$p_r(T_r) = \int_{-\infty}^{\infty} p_T(T) p_N(T - T_r)\, dT \quad (16)$$

式 (16) に式 (14), (15) を代入すると，多少の計算の後に次式を得る．

$$\begin{aligned} p_r(T_r) &= \frac{1}{N_d h_r \sqrt{2\pi}} \sum_{i=1}^{N_d} e^{-(T_r - T_{ri})^2/(2h_r^2)}, \\ h_r^2 &= h_T^2 + \sigma_N^2, \quad T_{ri} = T_i - \bar{T}_N \end{aligned} \quad (17)$$

(3) 座屈発生件数期待値 E_0 の評価

軌道座屈 MCS より，N_B ケースの座屈温度 (強度)$T_{Bi}, (i = 1, \cdots, N_B)$ が得られたものとする．座屈強度の確率密度関数を核密度推定により評価すると，式 (12) の $P_{l0}(T_r)$ は次式で与えられる．

$$P_{l0}(T_r) = 1 - \frac{1}{N_B \sqrt{\pi}} \sum_{i=1}^{N_B} E_{rf}\left(\frac{T_r - T_{Bi}}{h_l \sqrt{2}} \right) \quad (18)$$

ここで，h_l は式 (14) の h_T と同様に定義する．また，$E_{rf}(T)$ は誤差関数であり，本論文では次式により定義する．

$$E_{rf}(T) := \int_T^{\infty} e^{-\tau^2}\, d\tau \quad (19)$$

表–1 締結バネと道床縦抵抗力に関する諸量

締結部横バネ定数	k_T (MN/m)	40
締結部回転バネ定数	k_R (kN· m/rad)	20
最終道床縦抵抗力	f_{0L} (kN)	2.5
$f_{0L}/2$ を与える変位	a_L (mm)	1.0

式 (17), (18) を式 (12) に代入すると次式を得る．

$$E_0 = 1 - \frac{1}{N_B N_d \pi} \sum_{i=1}^{N_B} \sum_{j=1}^{N_d} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau^2} E_{rf} \left(\frac{\sqrt{2} h_r \tau + T_{rj} - T_{Bi}}{\sqrt{2} h_l} \right) d\tau \tag{20}$$

式 (20) における積分は，Gauss-Hermite 求積公式により数値的に求める．

5. 解析結果

(1) 軌道座屈に関する解析条件

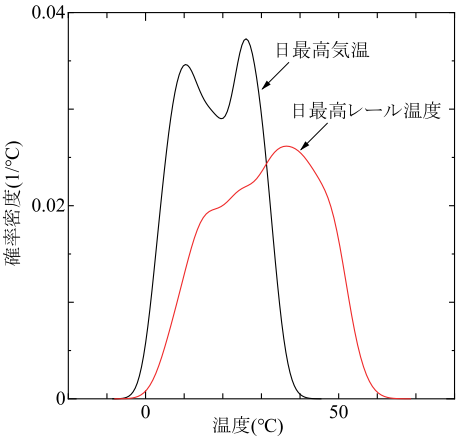
50kgN レール軌道を想定し，水平面内 (弱軸回り) 曲げ剛性を 663 kN·m^2，伸び剛性を 1.32 GN，線膨張係数を 12×10^{-6} (1/°C) と設定した．まくらぎ間隔は 0.6 m とし，軌道長 720 m (まくらぎ 1200 本) を対象に各まくらぎ支持区間 L におけるレールをはり要素により 2 分割した．レール・まくらぎ間の締結バネと道床縦抵抗力に関する諸量は，文献 7,8) と同様に**表–1** に示すとおり設定した．なお，最終道床縦抵抗力 f_{0L} はまくらぎ 1/2 本分 (レール 1 本分) の値である．

定常ランダムな初期通り変位波形生成において，式 (2) の相関長は d_w=1.7 m[7),8)] に設定し，標準偏差 σ_w の値を 4〜6 mm に適宜変えて，それが座屈発生件数の期待値に及ぼす影響について調べた．

本解析では，前述のとおり道床横抵抗力の空間変動についても考慮する．既往の研究[8)] において，道床横抵抗力の変動波長が分岐座屈モード波長程度以上の値をとる場合に軌道座屈強度が低下する傾向が認められた．また，式 (6) における通り変位波形の相関長 d_f が軌道座屈強度の確率分布に及ぼす影響について事前に検討した結果，最終道床横抵抗力の平均値 $\bar{f}_{0T}$=5500 N の場合，d_f を 4 m 以上に設定すると分布域が約 5 ℃低温度側に移動することが確認された．そのため，以下の解析では道床横抵抗力の相関長 d_f を 4 m に設定した．なお，$\bar{f}_{0T}$ の値が 4500, 5000, 5500 N の 3 ケースを対象に，その値が座屈発生件数に及ぼす影響について調べることとした．ただし，式 (2) の a は一律 1 mm に設定した．標準偏差 σ_f は，既往の試験結果[1)] 等を参考にしつつ，比較的大きな変動幅として最終道床横抵抗力の平均値の 1/6 で与えた．この場合，$3\sigma_f = \bar{f}_{0T}/2$ となる．MCS のサンプル数については，1 年当りの座屈発生件数期待値の計算結果に基づき，それが概ね収束値を与える 5000 ケースとした．

表–2 レール温度解析に関する諸量[9)]

$C\rho$ (MJ/Km^3)	3.93
A (m^2)	64.05×10^{-4}
γ	0.8
h (W/Km^2)	10.0
ϵ (J/hm^{2}K^4)	1×10^{-4}



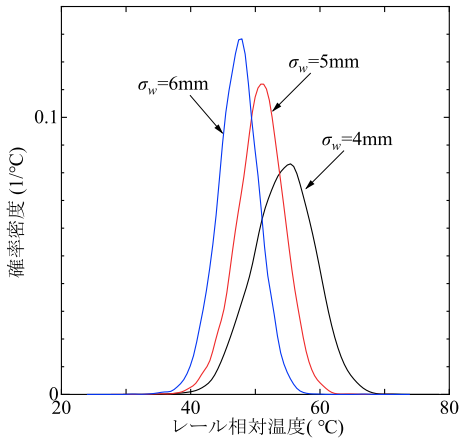
図–4 日最高レール温度と日最高気温の確率密度関数

(2) レール温度に関する解析条件

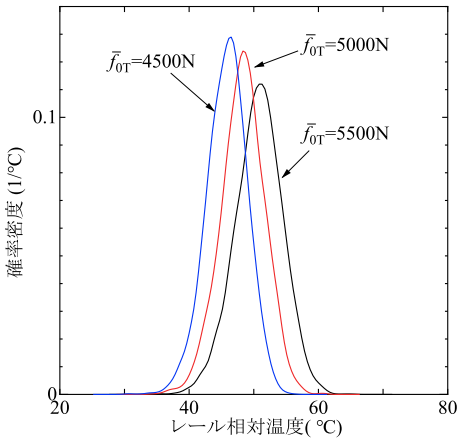
日射計算の際に参照するレール敷設地点は新潟市を想定して北緯 38°，東経 139° とし，気象庁の新潟市における 2019 年 10 月から 2022 年 9 月までの気象データ (気温と日照時間割合) を用いて 3 年間にわたるレール日最高温度を求めた．なお，実際に軌道管理に本評価法を適用する際には，より長い観測期間に対するデータを用いるべきと考えられるが，ここでは解析手法の構築を主目的として，試行的に 3 年分のデータを用いることとした．また，レールは東西に設置されているものとして，式 (9) の右辺第 1 項目を計算した．その他，レール温度解析に必要となる諸パラメータの値は**表–2**[9)] に示すとおりである．

(3) 日最高レール温度の確率密度関数

前述の条件で求めた日最高レール温度の確率密度関数を，日最高気温の確率密度関数と合わせて**図–4** に示す．高温域における日最高レール温度の分布が，日最高気温より約 20 ℃高温側に位置している様子がわかる．また，分布域が概ね 0 ℃から 60 ℃の範囲にわたっており，広い温度域で確率密度が 0.02 から 0.025 1/℃程度



図–5 通り変位の標準偏差が軌道座屈強度の確率密度関数に及ぼす影響 ($\bar{f}_{0T}$=5500 N)



図–6 最終道床横抵抗力の平均値が軌道座屈強度の確率密度関数に及ぼす影響 (σ_w=5 mm)

の値をとり，比較的平坦な分布を有している．これは，日最高気温の分布が 2 つのピークを持ち，それが影響したものと考えられる．

(4) 通り変位の標準偏差と最終道床横抵抗力の平均値が軌道座屈強度の確率特性に及ぼす影響

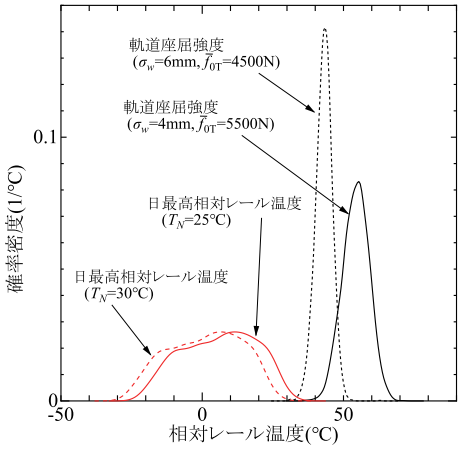
本節では，初期通り変位波形の標準偏差と最終道床横抵抗力の平均値が軌道座屈強度の確率特性に及ぼす影響について確認する．

最終道床横抵抗力の平均値 $\bar{f}_{0T}$ を 5500 N に固定して，初期通り変位波形の標準偏差 σ_w を 4, 5, 6 mm に設定して求めた軌道座屈強度の確率密度関数を**図–5** に示す．文献 7), 8) に示した様に，軌道座屈強度の確率密度分布は初期通り変位の標準偏差 σ_w に鋭敏であり，特に σ_w の値が小さい程それに対する感度が高くなる．**図–5** では，σ_w が 4 mm から 5 mm に変わることで座屈強度確率密度関数の最頻値が約 4.6 ℃低下し，5 mm から 6 mm では約 2.9 ℃低下しており，このことが再確認できる．また，σ_w の影響は，確率密度関数の高温側の分布範囲の変化に対して，より顕著に現れている．

次に，初期通り変位波形の標準偏差を 5 mm に固定して，最終道床横抵抗力の平均値 $\bar{f}_{0T}$ を 4500, 5000, 5500 N に設定して求めた軌道座屈強度の確率密度関数を**図–6** に示す．確率密度関数の最頻値は $\bar{f}_{0T}$ の増加と共に高温側に移動しており，$\bar{f}_{0T}$ を 4500 N から 5000 N にすることで約 1.8 ℃，5000 N から 5500 N にすることで約 2.5 ℃増加している．この変化は，設定した範囲内で見る限り初期通り変位の標準偏差程大きくはないものの，その影響は無視し得ないことがわかる．

(5) 1 年当りの軌道座屈発生件数期待値の評価

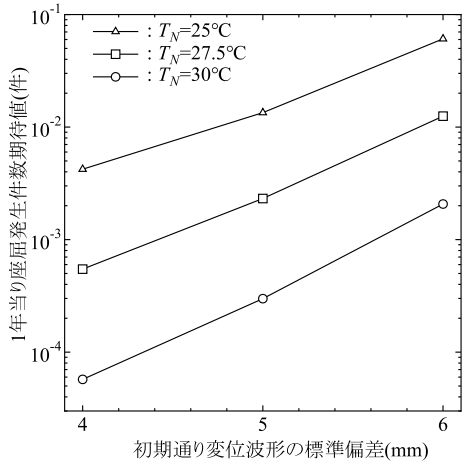
1 年当りの軌道座屈発生件数期待値を評価する前に，**5.(3)** と **(4)** で求めた日最高相対レール温度と軌道座屈



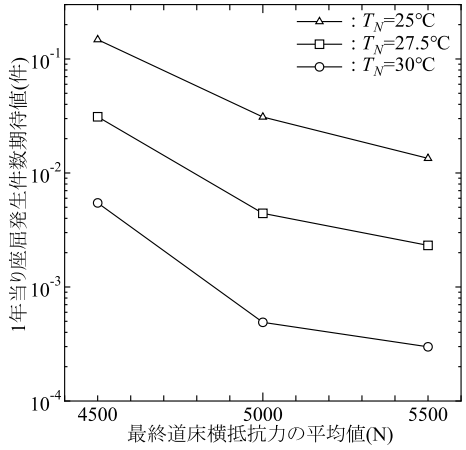
図–7 日最高相対レール温度と軌道座屈強度の確率密度関数

強度の確率密度関数との関係について確認する．**図–7** は，レール中立温度 T_N を 25 ℃と 30 ℃に設定した場合の日最高相対レール温度の確率密度関数と，軌道座屈強度が最低および最高となる σ_w=6 mm, $\bar{f}_{0T}$=4500 N の場合および σ_w=4 mm, $\bar{f}_{0T}$=5500 N の場合の 2 ケースにおける座屈強度確率密度関数とを示したものである．相対レール温度が高温側に分布する T_N=25 ℃の場合と，軌道座屈強度が低温側に分布する σ_w=6 mm, $\bar{f}_{0T}$=4500 N の場合における確率密度関数の間でも，図で見る限り両者の重なりはわずかであり，式 (13) より求める座屈発生件数期待値が最も高くなるこの組み合わせに対しても，それが比較的小さな値となり，他のケースでも非常に低い値となることが予測できる．

次に，1 年当りの軌道座屈発生件数期待値を求めた結果を示す．数値軌道モデルによる座屈解析では，不動区間が約 350 m であった．これを l_0 として設定し，軌道区間長 10 km における 1 年間当りの座屈発生件数期待値を求めた．なお，この場合，式 (11), (13) における



図–8 1 年当りの軌道座屈発生件数期待値 (軌道区間長 10 km, $\bar{f}_{0T}$=5500 N)



図–9 1 年当りの軌道座屈発生件数期待値 (軌道区間長 10 km, σ_w=5 mm)

N は約 285.7 となる．最終道床横抵抗力の平均値 $\bar{f}_{0T}$ を 5500 N とした場合の結果を**図–8** に，初期通り変位波形の標準偏差 σ_w を 5 mm とした場合の結果を**図–9** にそれぞれ示す．

図–8 より，初期通り変位波形の標準偏差が 1 mm 大きくなることで，3〜6 倍程度座屈発生件数期待値が増加することがわかる．また，中立温度が高い程，当該期待値の初期通り変位波形の標準偏差に対する感度がわずかに増加する傾向にある．一方，σ_w=4 mm の場合，中立温度を 5 ℃変えることで，座屈発生件数期待値が 100 倍程度変化しており，σ_w と同様に中立温度に基づく座屈管理の重要性が確認できる．

図–9 より，最終道床横抵抗力の平均値を 4500 N から 5000 N にすることで，座屈発生件数期待値が 1/10〜1/5 程度低減されることがわかる．これと比べ，5000 N から 5500 N に変更した場合には，それ程の改善効果が得られていない．このことから，最終道床横抵抗力がある程度確保されていれば，それ以上に高く設定しても必ずしも大幅な改善効果は期待できないものと考えられる．

表–3 中立温度の不確実性が座屈発生件数期待値に及ぼす影響 (軌道区間長 10 km, σ_w=5 mm, $\bar{f}_{0T}$=5500 N)

中立温度	25 ℃	27.5 ℃	30 ℃
確定量	1.34×10^{-2}	2.31×10^{-3}	2.99×10^{-4}
不確定量	4.21×10^{-1}	1.28×10^{-1}	3.48×10^{-2}

(6) 中立温度の不確実性が座屈発生件数期待値に及ぼす影響

中立温度を確定値として 25, 27.5, 30 ℃の 3 ケースに設定した場合と，それらの値を平均値 $\bar{T}_N$ として標準偏差 4.83 ℃ [4] の下に式 (15) の正規分布に従う不確定量で与えた場合とを対象に，1 年当りの軌道座屈発生件数期待値を求めた．**表–3** は，初期通り変位波形の標準偏差を 5 mm，最終道床横抵抗力の平均値を 5500 N とした場合の結果を示したものである．中立温度の標準偏差は文献 4) を参考に設定したものであるが，中立温度が不確実性を有することにより座屈発生件数期待値は 30〜100 倍程度増加しており，それに対して非常に鋭敏であることがわかる．この結果より，中立温度の適切な把握と管理が可能であれば座屈対策においてリスクを大幅に低減し得ることが確認できる．

6. おわりに

本論文では，軌道座屈強度と，日最高レール温度の確率密度関数から，所定の軌道区間長における 1 年当りの座屈発生件数期待値を評価するための一連の解析過程を構成した．また，解析例を通して，初期通り変位の標準偏差と最終道床横抵抗力の平均値，およびレールの中立温度が座屈発生件数期待値に及ぼす影響について調べた．その結果，何れも座屈発生件数期待値に大きく影響し得ることが確認された．さらに，中立温度の不確実性が座屈発生件数の期待値に及ぼす影響が非常に大きいこともわかった．

本研究では，確率論に基づいた軌道座屈リスク評価手法の検討を主目的としたため，比較的単純な条件下で解析を行った．それでも，座屈発生件数期待値を一定の水準以下に抑えるために要求される通り変位と最終道床横抵抗力，およびレール中立温度の許容値の合理的設定法に対して，一つの考え方を提示することができたものと考える．

謝辞: 本研究は科研費 (20K04661) の助成を受けたものである.

REFERENCES

1) 鉄道総合技術研究所　編: 鉄道構造物等設計標準・同解説　軌道構造，11 章　ロングレール，丸善出版，2012. [RTRI ed.: Design standards for railway structures and commentary (Track structures), Chap.11, Maruzen, 2012.]
2) 西宮裕騎，片岡宏夫: 座屈発生点を考慮したロングレールの座屈安定性の評価法に関する一考察，鉄道工学シンポジウム論文集，第 20 号，pp. 9-15, 2016. [Nishinomiya, Y. and Kataoka, H.: Study of the stability of continuous welded rail in consideration of a critical buckling temperature increase, *Journal of Railway Engineering, JSCE*, No.20, pp. 9-15, 2016.]
3) Nguyen, M.N., Wang, X. and Wang, C-H.: A reliability assessment of railway track buckling during an extreme heatwave, *Proc. IMechE Part F: Journal of Rail and Rapid Transit*, Vol.226, No.5, pp. 513-517, 2012.
4) Bae, H-U., Choi, J-Y., Moon, J. and Lim, N-H.: Development of a probabilistic buckling analysis scheme for continuous welded rail track, *Proc. IMechE Part F: Journal of Rail and Rapid Transit*, Vol.230, No.3, pp. 747-758, 2016.
5) Kish, A. and Samavedam, G.: Risk analysis based CWR track buckling safety evaluation, *The Int. Conf. on Innovations in the Design & Assessment of Railway*, Delft. The Netherlands, National Technical Information Service, 1999.
6) U.S. Department of Transportation: Track buckling prevention: theory, safety, concepts, and applications, Chap.4, National Technical Information Service, 2013.
7) 阿部和久，水野雄太，紅露一寛: 通り変位波形におけるバラツキが軌道座屈強度の確率特性に及ぼす影響，鉄道工学シンポジウム論文集，No.24, pp. 167-174, 2020. [Abe, K., Mizuno, Y. and Koro, K.: Influence of stochasticity in lateral rail deflection on probabilistic nature of track buckling temperature, *Journal of Railway Engineering, JSCE*, No.24, pp. 167-174, 2020.]
8) 岩井　翔，阿部和久，紅露一寛: 通り変位と道床横抵抗力のバラツキを考慮した軌道座屈余裕度の確率的評価，鉄道工学シンポジウム論文集，第 25 号，pp. 69-76, 2021. [Iwai, S., Abe, K. and Koro, K.: Stochastic influence of geometrical and mechanical variations in track structure on its buckling safety, *Journal of Railway Engineering, JSCE*, No.25, pp. 69-76, 2021.]
9) 阿部和久，桑山卓也，元好　茂: 空間的・時間的な温度変化を受けるロングレールの軸力分布解析，鉄道力学シンポジウム論文集，No.16, pp. 101-108, 2012. [Abe, K., Kuwayama, T., Motoyoshi, S.: Axial stress distribution in a continuous welded rail subjected to temporal and spatial variation of temperature, *Journal of Railway Engineering, JSCE*, No.16, pp. 101-108, 2012.]
10) 岩崎英治，松野純一，長井正嗣: 弧長法のための一反復解法と弧長自動設定法，応用力学論文集，Vol.5, pp.207–216, 2002. [Iwasaki, E., Matsuno, J. and Nagai, M.: An iteration method and automatic length setting method for arc length method, *Journal of Applied Mechanics ASCE*, Vol.5, pp. 207-216, 2002.]
11) Zakeri, J.A., Mohammadzadeh, S. and Barati, M.: New definition of nutral temperature in continuous welded railway track curves, *Periodica Polytechnica Civil Engineering*, Vol.61, No.1, pp. 143-147, 2018.
12) Bowman, A.W. and Azzalini, A.: Applied smoothing techniques for data analysis, The kernel approach with S-plus illustrations, p.31, Oxford Science Publications, 1997.

(Received March 31, 2023)
(Accepted June 9, 2023)

EXPECTED VALUE ANALYSIS OF NUMBER OF TRACK BUCKLING OCCURRENCES CONSIDERING VARIOUS UNCERTAINTIES

Kazuhisa ABE, Takuto KOSAKA and Kazuhiro KORO

A numerical analysis method is developed for evaluation of the expected number of track buckling occurrences per year, in which the track buckling temperature and the daily maximum rail temperature are considered as stochastic variables. To achieve this, the track lateral misalignment and the lateral resistance are modeled by random data possessing some statistical properties. The rail temperature is obtained by a numerical thermal analysis considering the time variation of both weather and solar radiation. Through numerical examples, influence of the standard deviation of initial misalignment, the average value of lateral resistance and the rail neutral temperature on the expected number of buckling occurrences is investigated.