講演概要　線形数学知見を用いた弦長変換フィルタの作成法

江原　学[1]・坪川　洋友[2]

[1]正会員　日本プラッサー株式会社　研究開発部（〒170-0003 東京都豊島区駒込 1-33-1）
E-mail: ehara@nipponplasser.co.jp (Corresponding Author)

[2]正会員　（公財）鉄道総合技術研究所　軌道技術研究部（〒185-8540 東京都国分寺市光町 2-8-38）
E-mail: tsubokawa.yosuke.32@rtri.or.jp

鉄道線路の長手方向に生じる変位の測定は，移動弦による 3 点差分法を用いられることが多い．過去には 10m 弦正矢法などの対称弦による測定が主流であったが，検測車の速度向上等より非対称弦での測定が多用されるようになり，現地判定で常用する正矢への簡易な変換法の開発が必要と考えるに至った．そこで，既往の研究で明らかとなった，正矢から実線路形状への変換法と測定誤差消去法を弦長間変換に応用し，入力側弦分割の最大公約数が出力側弦分割の公約数となれば線形数学的に変換が可能であること，方べきの定理を用いた工学的有意な近似でも実用的な変換が可能であることの知見を得た．これを本線実データを用いて鉄道総研が開発した LABOCS での出力結果と検証をおこなったところ良好な結果を得た．

Key Words: *versine convert method, symmetry versine, asymmetry versine, linear algebra, mathematical method, approximate method*

1.　軌道検測における正矢法の持つ機能

我が国の鉄道線路の多くは列車荷重による軌道の変形発生を許容し，検査と修繕工程の繰り返しにより，所望の軌道状態となるように維持管理をおこなうことを前提としたシステムである．特に線路の長手方向に生じる変形は黎明期より，10m の弦の中点におけるレールとの離れを変位量とする 10m 弦正矢法により検査が行われており [2)]，現在においても種々判定に同手法による値が用いられている．また正矢測定により得られた値を実線路の形状に近い絶対変位（以下，原波形）に変換し修繕工程に用いる交差法も古くから用いられてきたが，この 2 つの手法には以下の 3 つの機能が内在していることが明らかになった．

1　正矢法・交差法には，データ間隔 p の任意の n 個のデータを 2p (n+1)を基本波長とする n 個の定常波に分解する機能が内在している（定常波フーリエ展開）
2　軌道検測における正矢測定時に生じる誤差は原波形演算時に偏奇し，基本 第 1 定常波（2p(n+1)/1 ）に約 72%，第 1 定常波から第 5 定常波（2p(n+1)/5）までに約 95%が集中する
3　本手法により整備された軌道には不可避な測定誤差の影響により $(1/f)^2$ の波長分布が残ることになる（f : 空間周波数（1/m））

正矢法・交差法の挙動とは，**図-1** に示すように，測定区間の全域（両弦端間＝p×(n+1)） に張られた 1 本の大きな弦の振動（以下，空間弦振動）の物理特性を考えることと等価になる．

正矢から原波形を計算する交差法とは，測定区間全域にわたる 1 本弦振動に相当する第 1～第 n 定常波を計算し，その中から列車運動に影響を与えない帯域を除去することである．このとき測定誤差の殆どは第 1～第 5 定常波に集まる 2 の特性より，高効率での影響除去が可能となる．

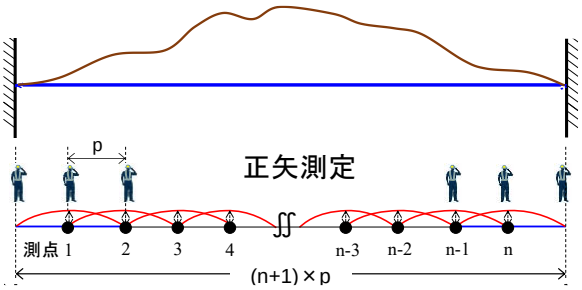


図-1　正矢から得られる全帯域原波形（空間弦振動）

また整備をおこなった波長領域にも弦振動の“音色”に相当する $(1/f)^2$ の波長分布を残すことができる．

1/f は“ゆらぎ”とよばれるヒトの“心地よさ”との関連が示唆されている分布である．経験的に用いられてきた両手法には簡易な測定で的確に修繕箇所を見つけ出し，測定誤差影響を無効化し，ヒトの感覚に適した振動状態に仕上げるという機能が内在している．

(1) 式による空間弦振動定義

前述の空間弦振動を n 測点の正矢測定から導出される過程を以下に述べる．

a) 定常波フーリエ展開

良く知られた離散型フーリエ展開（実数型）の式は

$$f(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{n-1}\left(\sqrt{(a_i^2 + b_i^2)} \times \sin\frac{i\pi}{n-1}(x+\theta_i)\right) \quad (1)$$

$$\theta_i = \tan^{-1}\frac{b_i}{a_i} \qquad x = 1,2,3\cdots n,$$

一方で知見 1 で得られた定常波フーリエ展開の式は

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n}\left(C_i \sin\frac{i\pi x}{n+1}\right) \quad (2)$$

$$x = 1,2,3\cdots n$$

で表される．

2 つの本質的な違いは直流成分や位相差の有無という現象ではなく，n 個の測定値を表現する基底長を n-1 とするか n+1 とするかにある．式(2)により，正矢法での測定値に限らず，全ての測定法で任意の n 個の測定値は直流成分も位相差もない定常波のみでの分解が可能となる．

また，**図-1** での長弦の両端部である$x = 0,\ x = n+1$ の 2 点では全ての分解正弦波は 0 となり，各種の処理・考察を測定範囲内のみで完結できるというメリットも有する．

b) 原波形への変換

$f(x)$ を正矢測定値とし，これを基に原波形$g(x)$ を得たい場合は各分解正弦波に

$$\lambda_i = \left(1 - \cos\frac{i\pi}{n+1}\right)^{-1} \quad (3)$$

$$i = 1,2,3\cdots n$$

を乗じて足し合わせることで計算できる．

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i C_i \sin\frac{i\pi x}{n+1} \quad (4)$$

$$x = 1,2,3\cdots n$$

式(4) が，n 個の正矢測定から得られる n 個の正弦波（定常波）全帯域における合成，空間弦振動である．

また式(3) より，i=1 の第 1 定常波の増幅倍率はサンプリング数 n の増加に伴い非常に大きな値となり，空間弦振動は約 72%の確率で**図-1** のような第 1 定常波が卓越したものとして出現する．加えて式(3)で計算される各倍率は，通常のフーリエ逆変換を用いた LABOCS での復元フィルタの増幅倍率[3] とも一致するものとなる．

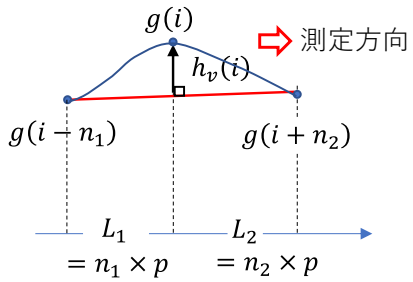


図-2 偏心矢値と空間弦振動座標

以降，扱うデータが離散値であることに鑑み，線形数学的表記，ベクトル（太小文字），行列（太大文字）を用いて式の記述をおこなう．

(2) 正矢から偏心矢への変換

半弦長 p を測定間隔とする正矢測定を考える．正矢測定ベクトルを $\mathbf{m}_v$，正矢測定から得られる空間弦振動ベクトルを $\mathbf{g}$，変換したい偏心矢ベクトルを $\mathbf{h}_v$，なお偏心矢の弦分割を L_1，L_2 (m) とする．このとき L_1，L_2 ともに p との関係において

$$L_1 = n_1 \times p \quad L_2 = n_2 \times p \quad LL = L_1 + L_2 \quad (5)$$

$$n_1, n_2 \ : \text{自然数}$$

であるとすれば，地点 i における偏心矢値 $h_v(i)$ は $g(i)$ を用いることで式(6)で記述できる．**図-2** に式(6)における偏心矢値と空間弦振動座標の関係を示す．

$$h_v(i) = g(i) - \left\{\frac{L_2}{LL} \times g(i-n_1) + \frac{L_1}{LL} \times g(i+n_2)\right\} \quad (6)$$

ここで，正矢差分行列 $\mathbf{T}$(n×n) を以下のように定義し

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 & \cdots & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & -1/2 & 1 & -1/2 \\ 0 & \cdots & 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

線形数学的表記による式展開をおこなう．

このとき $\mathbf{T}$ は式(8)のようにスペクトル分解できる．

$$\mathbf{T} = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lambda_i}\mathbf{S_i} \quad (8)$$

ここに，定常波分解行列 $\mathbf{S_i}$ の成分は式(9)で表される．

$$S_{i(j,k)} = \frac{2}{n+1} \times \sin\frac{i\pi}{n+1}j \times \sin\frac{i\pi}{n+1}k \quad (9)$$

$$\lambda_i = \left(1 - \cos\frac{i\pi}{n+1}\right)^{-1} \quad (3)\text{再掲}$$

$$i, j, k = 1,2,3, \ldots n$$

また，空間弦振動 変換行列 $\mathbf{T}^{-1}$ は式(10)で表される．

$$\mathbf{T^{-1}} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \mathbf{S_i} \tag{10}$$

以上より，空間弦振動ベクトル $\mathbf{g}$ は式(11)となる．

$$\mathbf{g} = \mathbf{T^{-1}} \mathbf{m_v} \tag{11}$$

式(6)より偏心矢差分行列 $\mathbf{T_h}$ (n×n) を

$$\boldsymbol{T_h} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \frac{-L_1}{LL} & & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \frac{-L_1}{LL} & & \\ \frac{-L_2}{LL} & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots & \frac{-L_1}{LL} \\ & \frac{-L_2}{LL} & 0 & \cdots & 1 & 0 & \cdots \frac{-L_1}{LL} \\ 0 & & \frac{-L_2}{LL} & 0 & \cdots & 1 & \end{pmatrix} \tag{12}$$

（p 行 × $n_2 \times p$ 列 ／ $n_1 \times p$ 列）

のように定義すると，偏心矢ベクトル $\mathbf{h_v}$ は式(11)より空間弦振動ベクトル $\mathbf{g}$ を介して式(13)のように表される．

$$\mathbf{h_v} = \mathbf{T_h}\,\mathbf{g} = \mathbf{T_h}\,\mathbf{T^{-1}} \mathbf{m_v} \tag{13}$$

ここで，式(13)における $\mathbf{T_h}\,\mathbf{T^{-1}}$ は正矢 $\mathbf{m_v}$ から偏心矢 $\mathbf{h_v}$ 両ベクトル間の弦長変換機能を持った行列となる．

さらに $\mathbf{T_h}$ を L_1=L_2=2p，L_1=L_2=3p，L_1=L_2=4p の条件で計算すれば，行列 $\mathbf{T_h}\,\mathbf{T^{-1}}$ の各行には良く知られた 2・3・4 倍長弦公式の係数列（弦長変換フィルタに相当）が出現する．また空間弦振動内の誤差集中箇所となる第1～5定常波領域も，式(6)による3点差分式の弦長に応じた減衰効果が得られる．これは現在の慣性正矢法における積分誤差消去法[4]とも通じた効果と言える．

このように正矢法の各種機能と空間弦振動を介することで正矢から偏心矢への変換を行うことができる．

本章で記述した知見，数式等の証明は論文[1]に詳記されている．次章ではこれらを基に，偏心矢から正矢への変換ならびに弦長変換の一般化について考察する．

2. 弦長変換の一般化（線形数学アプローチ）

(1) 偏心矢から正矢への変換

行列 $\mathbf{T_h}$ が正則であれば逆行列 $\mathbf{T_h^{-1}}$ が計算できる．

$\mathbf{T_h^{-1}}$ と式(13)の変形より偏心矢から正矢への変換は式(14)のとおりに表される．

$$\mathbf{T_h T^{-1} m_v} = \mathbf{h_v} \qquad \text{(13)再掲}$$

$$\mathbf{T_h^{-1} T_h T^{-1} m_v} = \mathbf{T_h^{-1} h_v}$$

$$\mathbf{T\,T^{-1} m_v} = \mathbf{T\,T_h^{-1} h_v}$$

$$\therefore\ \mathbf{m_v} = \mathbf{T\,T_h^{-1} h_v} \tag{14}$$

2E-04	-0	7E-04	-0	0.003	-0.01	0.012	-0.02	0.047	-0.09	0.188	-0.37	0.75	1E-14	0	1E-14	0	-0
-0	2E-04	-0	7E-04	-0	0.003	-0.01	0.012	-0.02	0.047	-0.09	0.187	-0.38	0.75	-0	-0	0	-0
6E-06	-0	2E-04	-0	7E-04	-0	0.003	-0.01	0.012	-0.02	0.047	-0.09	0.188	-0.38	0.75	0	-0	1E-14
-0	6E-06	-0	2E-04	-0	7E-04	-0	0.003	-0.01	0.012	-0.02	0.047	-0.09	0.187	-0.38	0.75	0	-0
1E-06	-0	6E-06	-0	2E-04	-0	7E-04	-0	0.003	-0.01	0.012	-0.02	0.047	-0.09	0.187	-0.38	0.75	0
-0	1E-06	-0	6E-06	-0	2E-04	-0	7E-04	-0	0.003	-0.01	0.012	-0.02	0.047	-0.09	0.188	-0.38	0.75

図-3 10_5(m)→5_5(m) p=5(m)の変換行列の例

なお左辺の出力正矢の弦長は 2p，右辺の入力偏心矢の弦分割は p の自然数倍とする，式(6)成立の前提があることに注意が必要である．

ここで式(13)の考察と同様に偏心矢から正矢への弦長変換機能を有する行列は式(14)の $\mathbf{T\,T_h^{-1}}$ が相当する．

$\mathbf{T\,T_h^{-1}}$ の次数 n を大きく（n>1000 程度の奇数）すれば，**図-3** のような帯状の同一係数列を持つ行列が出現する．ここで同行列の中央 (n+1) /2 行を構成する数列を弦長変換フィルタの係数として用いる．なお本論文では絶対値で 10^{-5} 未満を閾値（=0）としてこの数列を扱う．

(2) 偏心矢から偏心矢への変換

前節の考察より p を公約数とする弦分割を持つ偏心矢ベクトル $\mathbf{h_v}$ から弦長 2p 正矢 $\mathbf{m_v}$ への変換は式(14)で表わされる．

$$\mathbf{m_v} = \mathbf{T\,T_h^{-1} h_v} \qquad \text{(14)再掲}$$

また，2p 正矢 $\mathbf{m_v}$ から p を公約数とする偏心矢ベクトルへの変換は式(13)の偏心矢ベクトルを $\mathbf{h_v'}$ 偏心矢差分行列を $\mathbf{T'_h}$ と書き換えれば式(15)として表記できる．

$$\mathbf{h_v'} = \mathbf{T_h'\,T^{-1} m_v} \tag{15}$$

この2式を用いることで弦長 2p 正矢 $\mathbf{m_v}$ を介して偏心矢 $\mathbf{h_v}$ から偏心矢 $\mathbf{h'_v}$ への変換が，式(16)として定義される．

$$\mathbf{h_v'} = \mathbf{T_h'\,T^{-1} T\,T_h^{-1} h_v}$$

$$\therefore\ \mathbf{h_v'} = \mathbf{T_h'\,T_h^{-1}\,h_v} \tag{16}$$

正矢を L_1=L_2 の特殊な偏心矢であると考えれば，式(16)は3点差分相互間の弦長変換一般表現式となる．

但し変換後の偏心矢 $\mathbf{h'v}$ も弦分割が p の自然数倍となる式(6)成立の前提があることに注意が必要である．

また式(16)における行列 $\mathbf{T_h'\,T_h^{-1}}$ も帯状の係数を持つ行列が出現し，その中央行に現れる数列は弦長変換フィルタの係数として利用することができる．

(3) 公約数 p の満たすべき条件

式(16)において 入力側 $\mathbf{h_v}$ を L_1=L_2=10(m) 出力側 $\mathbf{h'_v}$ を L_1=L_2=5(m) のともに正矢とし，公約数を p=5(m)とした

場合を考える．この時，入力側の偏心矢差分行列 $\mathbf{T_h}$ (n×n) は式(17)として与えられる．

$$\boldsymbol{T_h} = \begin{pmatrix} \overset{p=5m}{\overleftrightarrow{1 \quad 0}} & -1/2 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1/2 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 1 & 0 & -1/2 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & -1/2 & 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{17}$$

ここで入力側 $\mathbf{h}_v$ 成分を全て 50(mm)とし $\mathbf{T_h}$ の逆行列 $\mathbf{T_h^{-1}}$ を求め，式(18)により空間弦振動ベクトルを計算する．

$$\mathbf{g} = \mathbf{T_h^{-1}}\,\mathbf{h_v} \tag{18}$$

これは R=1000(m)の曲線内における 20m 弦通り測定値を 5(m)間隔で与え，逆行列により空間弦振動を計算することに相当するが，空間弦振動ベクトルには**図-4** に示すような多数の不連続点が生じる．この不連続点を**図-5** により詳細に確認すると，空間弦振動に“群”が形成され，各群内では h_v=50(mm) を満たすものの，群間相互の関連がとれない事により生じる現象であることが見てとれる．

ここで p=10(m)と入力側弦分割の最大公約数にすれば式(17) の行列 $\mathbf{T_h}$ の 1 と-1/2 の間にある 0 が消え 式(7)の行列 **T** と同一の係数となり群形成の問題は解消される．

しかし出力側では p=10(m)は公約数ではなくなるため，式(6)による計算が成立せず線形数学アプローチは不可能となる．

以上の考察より，公約数 p が満たすべき条件として，入力側の弦分割 L_1L_2 の最大公約数（以下，G.C.D.）が，出力側の弦分割 L_1L_2 の公約数（以下，C.D.）となれば，線形数学アプローチによる変換が可能となる．

弦分割 L_1=3(m)，L_2=7(m)から 10m 弦正矢への変換と，弦分割 L_1=2(m)，L_2=8(m)から 10m 弦正矢への変換の 2 つのフィルタの形状等，具体的な検討事例を**図-6** 示す．

上記に示した条件適合可否の重要性が見てとれる．

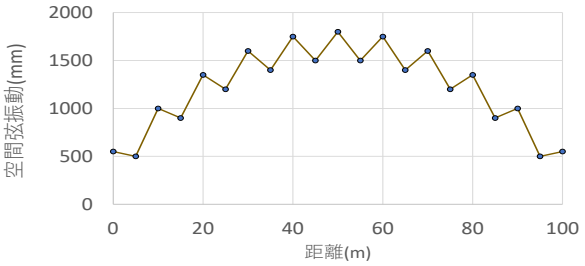


図-4　式(18) により計算された空間弦振動

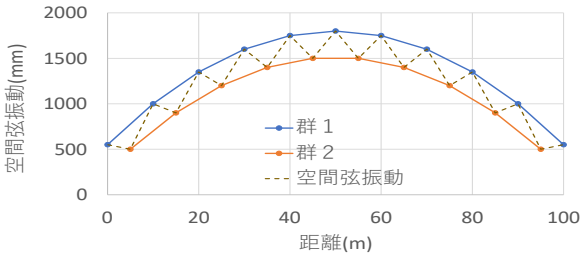


図-5　式(18) による空間弦振動と群の関係

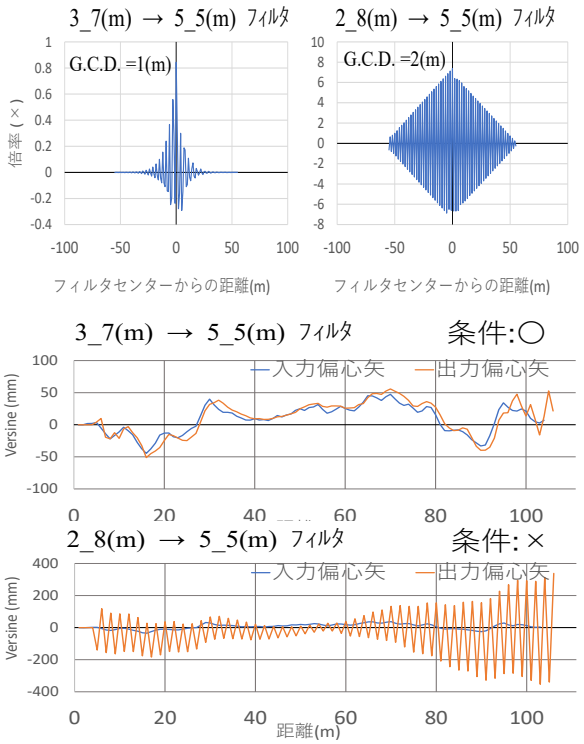


図-6　公約数 p が満たすべき条件　具体事例

3.　実データによる検証（線形数学アプローチ）

前章までの弦長変換理論を本線実データを用いて検証する．新幹線検測車での偏心矢弦長 17.5_2.5(m)，データ間隔 DT=0.25(m) による検測値を用い，5m 弦高低ならびに 10m弦高低への変換をおこなう．いずれの変換も入力側 G.C.D.=2.5(m) かつ，出力側 C.D.となる条件を満たすためフィルタ設計には線形数学アプローチが可能である．

尚,本来公約数は自然数であるが,単位表現の煩雑さより m 単位で記述する（以下も同様）.検証データには検測車データの処理に使用している LABOCS で作成した変換フィルタにより出力された 5m 弦高低および 10m 弦高低を用いる．

(1)　線形数学アプローチの検証

LABOCS 出力の 5m 弦ならびに 10m 弦高低データの数値を真値として，線形（直線・曲線）に区間を分類し，線形数学アプローチフィルタにより求めた数値との差および差の標準偏差を評価指標としておこなった．

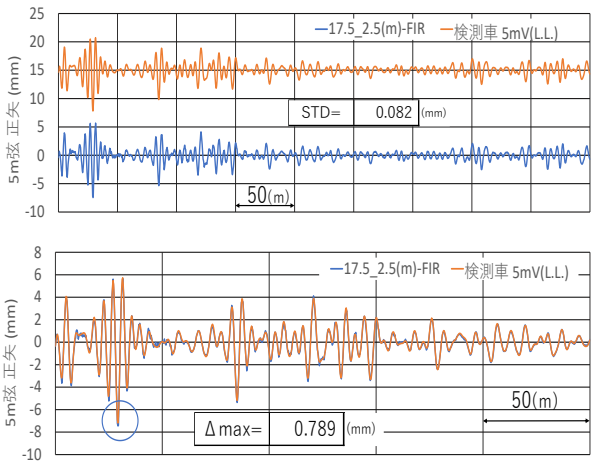
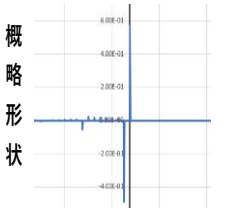


図-7　新幹線検測車 5m 弦高低比較（全体・Δ最大）

表-1　新幹線検測車 5m 弦　検証総括表



（幹）　検測車　5m弦との比較

		曲線部	直線部
左	Δmax=	0.789 (mm)	0.658 (mm)
	STD=	0.082 (mm)	0.107 (mm)
右	Δmax=	0.578 (mm)	0.75 (mm)
	STD=	0.078 (mm)	0.109 (mm)
		N=2071	N=2071

概略形状　82.50　0.00 (m)

検測車の測定値を"真"としたフィルタ計算値との差,ならびに差の標準偏差で評価

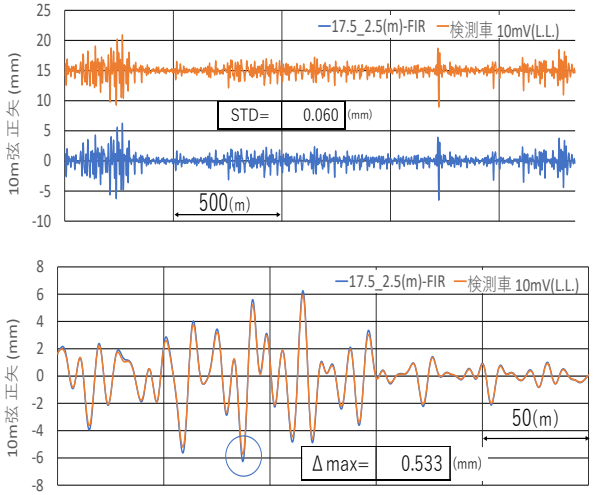
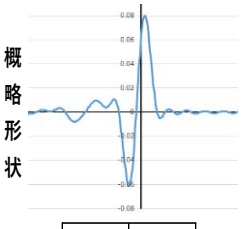


図-8　新幹線検測車 10m 弦高低比較（全体・Δ最大）

5m 弦高低の比較を**図-7**，10m 弦高低の比較を**図-8** に示す．また，5m 弦高低算出時のフィルタの概略形状と前後計算長，検測車との比較結果を**表-1** に，10m 弦高低算出時のフィルタ係数の形状（概略形状）と前後計算長，検測車との比較結果を**表-2** に示す．

いずれの結果からも，本手法で作成されたフィルタは実用上十分な精度を有すると判断される．

表-2　新幹線検測車 10m 弦 検証総括表



（幹）　検測車　10m弦との比較

		曲線部	直線部
左	Δmax=	0.533 (mm)	0.447 (mm)
	STD=	0.06 (mm)	0.051 (mm)
右	Δmax=	0.495 (mm)	0.468 (mm)
	STD=	0.058 (mm)	0.054 (mm)
		N=9432	N=9436

概略形状　104.75　104.75 (m)

検測車の測定値を"真"としたフィルタ計算値との差,ならびに差の標準偏差で評価

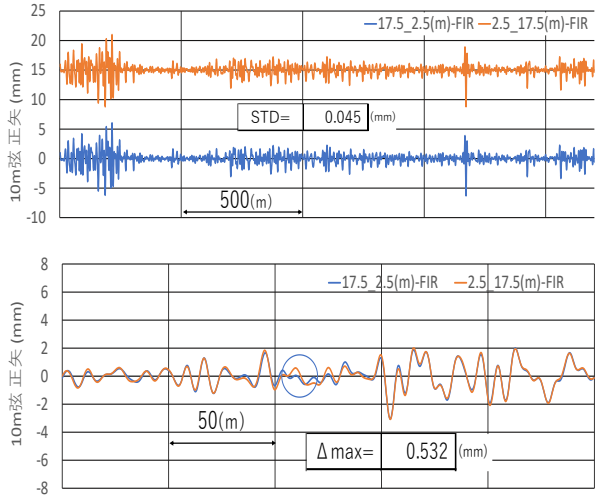
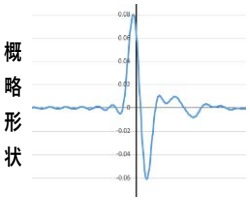


図-9　両フィルタによる 10m 弦高低比較（全体・Δ最大）

表-3　両フィルタによる 10m弦変換　検証総括表（幹）



（幹）FIR_N変換10m弦　FIR_R変換10m弦 比較

		曲線部	直線部
左	Δmax=	0.532 (mm)	0.223 (mm)
	STD=	0.045 (mm)	0.024 (mm)
右	Δmax=	0.47 (mm)	0.345 (mm)
	STD=	0.043 (mm)	0.028 (mm)
		N=18326	N=18334

概略形状　104.75　104.75 (m)

両フィルタ計算値の平均を"真"とした各計算値との差,ならびに差の標準偏差で評価

(2)　偏心矢弦長 2.5_17.5(m)から 10m 弦正矢への変換

既往研究 [4]より不可とされている上記レイアウトの弦長変換も，別基底を用いる本手法では変換可能となる．今回，特別に検測車の実測定データを出力し，両者から変換される 10m 弦高低の相互比較から検証をおこなう．

両フィルタによる 10m 弦高低の比較を**図-9** に，10m 弦高低算出時のフィルタ係数の形状（概略形状）と前後計算長，検測車との比較結果を**表-3** に示す．

軸重等で若干の差は出て然るべきとの予想に反して，新幹線軌道における両者の差は殆ど認められない．

以上の考察より，線形数学アプローチによるフィルタ作成理論に問題がないことが確認された．

(3)　行列使用のメリット

行列の積で得られる新行列にはそれぞれが持つ機能が

合成される特性を持つ．これを利用すれば弦長変換と波長分離の 2 つの機能を持つ 1 つのフィルタが容易に作成でき，サンプリング延長を減じ，かつ処理速度の向上を図ることができる．具体的な合成方法を**図-10** に示す．本章中 **表-2 表-3** に記したフィルタは，本手法により常用バンドパスフィルタとの合成をおこなっている．

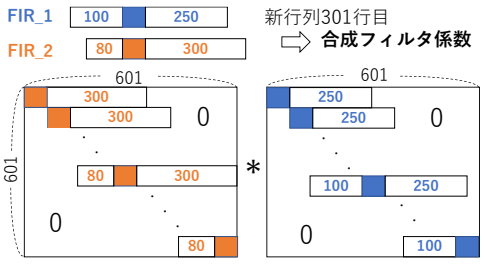


図-10 行列を用いたフィルタ合成法（順番に注意）

4. 非数学的アプローチと実データによる検証

(1) 非数学的アプローチの概要とシミュレーション

線形数学アプローチによる変換が満たされない場合において，解析対象である軌きょうに生じる変形はメートルオーダーであることを考慮した工学的に有意な近似手法（方べきの定理の応用[5]）の併用可能性を考察する．

以降，本近似手法を非数学的アプローチと表記する．精度検証として， Step1 から Step3 の手順により机上計算値（以下，シミュレータという．）での考察を行った．

<Step1>：半径 250(m)の反向曲線において，10m 弦通り変位の標準偏差(σ)が 6.5(mm)となるように，10m 弦正矢ベクトル **v10 (INPUT)**を生成する．このとき，延長は 2500(m)，データサンプリング間隔(DT)は 0.25(m)とする．

<Step2>：次の 3 パターンの弦長変換のフィルタを設計し，合成した FIR_Inte. を作成する．

・5_5(m) から 4.75_5.25(m) 非数学的アプローチ：FIR1
・4.75_5.25(m)から 1_1(m) 線形数学 〃 ：FIR2
・1_1(m)から 5_5(m) 線形数学 〃 ：FIR3

ここで FIR1 の設計には 0.25(m) 離れたレール上の 2 点は同一円周上にあると見なせるという工学的な仮定により方べきの定理を利用する．

<Step3>： FIR_Inte. を **v10 (INPUT)** に作用させ **v10 (OUTPUT)** を得て，この 2 つの差の最大と差の標準偏差を求める．ここでは，**v10 (INPUT)** を真値として算出することとする．

以上の手順で求めた 2 つのベクトル **v10 (INPUT)** と **v10 (OUTPUT)** 比較を**図-11** に示す． 両者の差の最大は 1.363(mm)，差の標準偏差は 0.346(mm)であった．線形数学アプローチフィルタに比べると，精度はやや低下しているものの，一般に，在来線の軌道検測車に求められる 10m 弦通り変位の再現性（2 回の検測結果の差の標準偏差）が 0.5(mm)であることを考慮すると，十分に実用に供せるレベルであると考える．

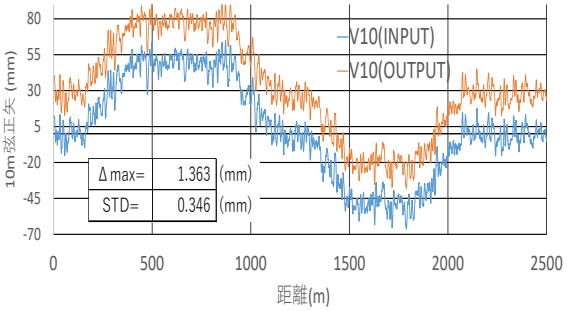


図-11 入力・出力 2 つの 10m弦ベクトルの比較

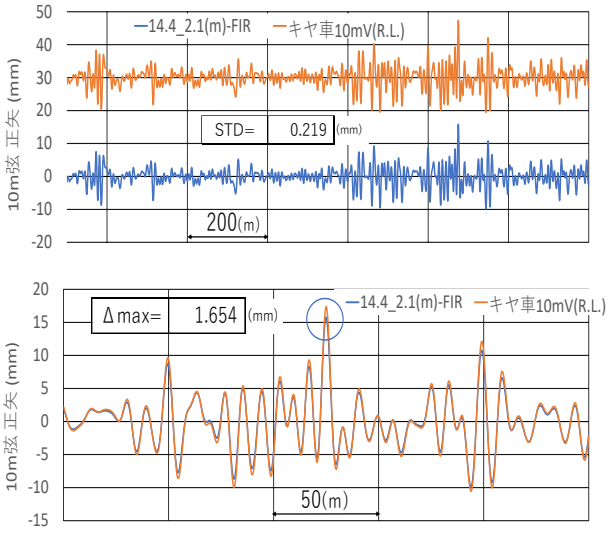
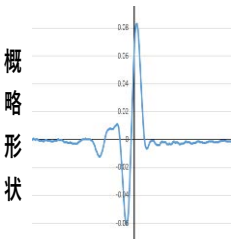


図-12 在来線検測車 10m 弦高低比較（全体・Δ最大）

表-4 在来線検測車 10m弦変換 検証総括表



【在】 検測車 10m弦との比較

		曲線部	直線部
左	Δmax=	1.557 (mm)	1.146 (mm)
	STD=	0.238 (mm)	0.169 (mm)
右	Δmax=	1.654 (mm)	1.225 (mm)
	STD=	0.219 (mm)	0.163 (mm)
		N=5321	N=3320

検測車の測定値を"真"としたフィルタ計算値との差,ならびに差の標準偏差で評価

(2) 非数学的アプローチの検証

在来線検測車の高低変位検測については，偏心矢弦長は 14.4_2.1(m)，データ間隔（DT）は 0.25(m)である．

入力側弦分割 G.C.D.=0.1(m) 出力 10m 正矢の C.D. となる条件を満たすため線形数学アプローチも可能であるが，その場合は使用するデータの補間で近似を用いるこ

とになる.

ここでは，次の 2 つの弦長変換のフィルタを設計して合成する方法を採用した.

・14.4_2.1(m)から 14.5_2.0(m) 非数学的アプローチ：FIR1
・14.5_2.0(m)から 5_5(m)　線形数学　〃　：FIR2

非数学的アプローチによる 10m 弦高低正矢と LABOCS フィルタによる現行検測車 10m 弦高低正矢との比較を

両フィルタによる 10m 弦高低の比較を**図-12** に，10m 弦高低算出時のフィルタ係数の形状（概略形状）と前後計算長，検測車との比較結果を**表-4** に示す.

３章１節の解析と同様 LABOCS により求めた数値を真値とし，非数学的アプローチとの値との差および差の標準偏差で評価している.

線形数学アプローチでの精度には及ばないものの，総研シミュレータでの予測値と同程度の精度が実データでも得られることが確認された.

(3)　在来線検測 2.1_14.4(m)から 10m 弦正矢への変換

３章２節と同様に，弦分割を反転させた場合の非数学的アプローチ使用の可能性（＝１センサー検測車による逆向き運用の可能性）について検証をおこなう.

検測車の逆向き実測定データを出力し，通常出力と併せて検証に用いる．具体的には同一地点における両者の平均を仮の真値として，差の最大ならびに差の標準偏差を指標として評価をおこなう.

両フィルタによる 10m 弦高低正矢の比較を**図-13** に，10m 弦高低算出時のフィルタ係数の形状（概略形状）と前後計算長，検測車との比較結果を**表-5** に示す.

新幹線での検証例よりも同一地点における変換 10m 弦高低の差は大きく出たが（幹 Δmax=0.532 STD=0.045(mm) **表-3** 参照）これは短軸側を前位とした場合の軸重やアタック角の差などによる軌道挙動の差として理解すべきものであり，数値的に見れば 2.1_14.4(m)→10m 弦正矢への変換フィルタ作成に理論上の問題はないと考える.

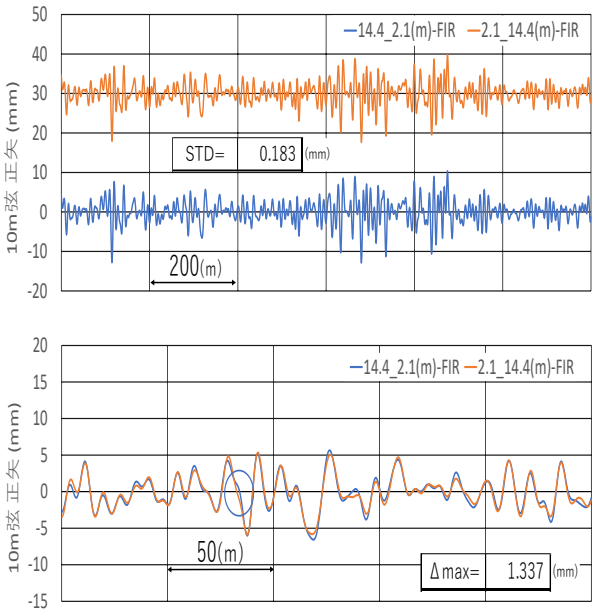
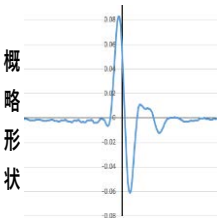


図-13　両フィルタによる 10m 弦高低（全体・Δ最大）

表-5　両フィルタによる 10m弦変換　検証総括表（在）



【在】FIR_N変換10m弦　FIR_R変換10m弦 比較

		曲線部	直線部
左	Δmax=	1.337 (mm)	0.796 (mm)
	STD=	0.183 (mm)	0.092 (mm)
右	Δmax=	1.092 (mm)	0.807 (mm)
	STD=	0.154 (mm)	0.084 (mm)
		N=10616	N=6616

両フィルタ計算値の平均を"真"とした各計算値との差,ならびに差の標準偏差で評価

5.　まとめと今後の課題

(1)　まとめ

①　2 つの 3 点差分法間相互の弦長変換は
　入力側 弦分割(m) の 最大公約数(m)が
　出力側 弦分割(m) の 公約数(m) となる配置であれば
線形数学フィルタにより計算できることを確認した.

②　①の変換を行う行列は,
　入力側の差分行列 $\mathbf{T_{in}}$　その逆行列 $\mathbf{T_{in}^{-1}}$,
　出力側の差分行列 $\mathbf{T_{out}}$　を用いて
　$\mathbf{T_{out}}\,\mathbf{T_{in}^{-1}}$ として汎用 PC の表計算機能等で容易に計算できることを確認した．なお，計算された行列の中央行に弦長変換フィルタに相当する係数列が出現する.

③　①の条件を満たさない場合でも方べきの定理を用いた工学的有意な近似（非数学的アプローチ）により変換フィルタの設計ができることを確認した.

④　本研究で提案した行列の積を用いることで，複数の機能をあわせもった合成フィルタを作ることが可能であることを確認した．これにより検測延長の削減・処理の高速化が期待できる.

⑤　上記手法で作成した各種の弦長変換フィルタを用いた数値シミュレーションならびに検測車による本線実データで検証をおこなったところ，実用上十分な精度を有していることを確認した.

(2)　今後の課題

①　非数学的アプローチの最適化検討法の深堀

上記手法には一通りではない様々な組み合わせが考えられる．要求された弦長変換に対して最適なものを決定するプロセスの確立やツールの開発（精度確認シミュレータなど）が必要である.

② 早期の実用化・実装

MTT をはじめ多くの偏心矢レイアウトを持つ測定系に対し，本知見を用いた変換装置の実用化・提供はメーカーとしての責務である．早期の実用・実装により我国のみならず世界の保線技術の向上に貢献したい.

③ 潜在知見の水平展開

多様性が求められる現在，目的に対するアプローチを 1 つの手法に限定することは学術進歩的にも大きなロスである．今回の共同発表を契機に様々な機会で定常波フーリエ展開を始めとした潜在知見を公開し，社会の役に立てるように取り組んでいきたい.

④ さらなる効率的検測実現にむけての分析

１章１節で述べたように固有ベクトルが定常波関数となる行列を用いれば，対象区間外に一切検測範囲を広げることなく各種解析が可能である．この特性を持つ行列から作成されたフィルタにも同特性が遺伝していないか検討したところ， 特殊なデータ供給方式により，ほぼ追加検測をゼロにできることがわかってきた

但し現時点では，本事象の数学的証明を含めた詳細分析が未完であるため，この完成が急がれる.

謝辞：今回，鉄道総研との共同論文発表を快諾頂いた日本プラッサーHeinz Springer 社長に謝意を表します．また実データの使用・提供に理解と協力をたまわった JR 西日本　西井新幹線施設部長，瀬川施設部長，データ解析に尽力頂いた鉄道総研軌道管理研究室　松本副主研，そして学会への技術公開と本シンポジウムへの論文投稿を慫慂していただいた日立ハイテクソリューションズ　内田顧問，日本線路技術　高井技術顧問，並びに東京経済大学　三和准教授に感謝の意を表し，謝辞といたします.

REFERENCES

1) 江原学：鉄道線路の線形整正における経験的交差法の理論化とその現代的応用，東京大学　学位論文，pp.26~63 付 12~付 45，2015．[Ehara,G.: The Orisation and Modern Practical Application of Empirical Circle- Ordinate Method to Produce Optimal Rail way track Geometery, Doctor Dissertation Tokyo.Unv., pp.26~63 & pp.Apendix 12~45, 2015.]
2) 山口義信：我国の線路保守における技術発達史とその移入，定着，変容及び創出に関する研究 - 線路保守技術のオリジナリティーを探る-，pp.192～218，東京大学　学位論文，2010．[Yamaguchi,Y.: The Historical Reserch of Japanese Track Maintenance Technorogy.(The Quest for Japanese Origine.), Doctor Dissertation Tokyo.Unv., pp.192~218, 2010.]
3) 吉村彰芳：鉄道技術研究報告 No1336(施設編第 586 号)軌道狂い原波形の復元に関する理論的基礎の検討とその応用，pp.26~46，1987．[Yoshimura,A.: Establishmemt of Theoretical Foundation to Restoring an Original Waveform of Track Irregulality and its Application, RTRI report, pp.26~46, 1987.]
4) 竹下邦夫：特別号　軌道狂い検測手法に関する研究第 2 章 軌道狂い検測法の理論的解析と理論体系の確立，鉄道総研報告 25 号，pp.24~39，1998．[Takeshita,K.: The Establishment of Theoretical System and Analysis Method for Track Measuring Car, RTRI report, pp.24~39 , 1998.]
5) 神山雅子，古川敦：復元波形を用いた軌道整正の計算と施工(2)，日本鉄道施設協会誌　2002.3 月号，pp.24，2002．[Kamiyama,M. and Furukawa,A.: The Calculation Method Using the Restoring Infomation for Mechanized Track Alignment Work Vol-2, JRCEA Journal, pp.23, 2002.]

(Received March 31, 2023)
(Accepted June 9, 2023)

THE DEVELOPNMET OF VERSINE CONVERT FILTER MAKING METHOD USING LINEAR ALGEBRA KNOWLADGE

Gaku EHARA and Yosuke TSUBOKAWA

There have been many situations in track inspection work to use 3point versine measuring system for a long time.It had been used symmetry 10m versine method, and even now, this value is using to judge quality of track geometry in Japan. But the recent measuring car which increased running speed and meas uring system of imported track maintenance machine usually use asymmetry system. So we have to de velop the simple and easy converting method and it is the objection of this research. Then applying and using the linear algebra's know how what auther1's dissertation published at Tokyo University 2015, we get 2 new knowledge.

If the case, input side versine layout's greatest common divisor is the versine layout's of out put side's common divisor , it can make a FIR filter by pure mathematical method.

Even if not satisfied mentioned condition, to use approximate based on power of a point theorem, it can make FIR-filter too. These FIR-Filters are tested by RTRI's simulator and by using the real measuring data from JR-West, and we got a good results.