

論文 列車通過時における 鉄道橋上電柱振動の非線形性分析手法

高瀬 忠郁¹・松岡 弘大²・貝戸 清之³

¹ 学生会員 大阪大学大学院 工学研究科 地球総合工学専攻 (〒565-0871 大阪府吹田市山田丘 2-1)

E-mail: t.takase@civil.eng.osaka-u.ac.jp

² 正会員 (公財) 鉄道総合技術研究所 情報通信技術研究部 (〒185-8540 東京都国分寺市光町 2-8-38)

E-mail: matsuoka.kodai.13@rtri.or.jp

³ 正会員 大阪大学准教授 大学院工学研究科 地球総合工学専攻 (〒565-0871 大阪府吹田市山田丘 2-1)

E-mail: kaito@ga.eng.osaka-u.ac.jp (Corresponding Author)

橋りょう上桁端に建植された電柱は列車通過時の桁たわみ振動により大きく振動する場合がある。これに対して基準類の整備が進められているが、電車線による拘束の有無による電柱の固有振動の変化など、列車通過時の電柱天端変位に依存した電柱振動の非線形性に関しては未解明な部分も多い。特に実証分析では強制加振下の非線形システム分析法が必要となる。本研究では列車通過時の橋りょう上電柱振動の非線形性分析手法の構築を目的とし、橋りょう変形が電柱への加振力となるよう再定式化することで、橋りょう上電柱振動用の Time-Varying Auto Regressive with eXogenous (TV-ARX) モデルを構築した。さらに、振幅に依存した非線形性を有する数値解析により再定式化した TV-ARX モデルの妥当性を検証した。

Key Words: railway poles, wires, resonance, nonlinear system identification, TV-ARX

1. はじめに

鉄道橋上桁端付近に建植された電柱は列車通過時の桁たわみ振動により線路平行方向に大きく振動する場合がある¹⁾。この振動は、列車通過に伴い生じる橋りょう振動の卓越振動数と橋りょう上電柱の固有振動数が近接する共振現象に起因する。

桁たわみ振動による電柱の過大な振動時には、電柱が支持する電車線による拘束が発生するため、電車線に局所的な曲げモーメントに起因するひずみが生じる²⁾。このひずみが繰返し発生すると電車線の破損や破断に至る場合がある。常本ら³⁾は電柱振動が電車線類に与える影響に着目し、電車線路設備損傷に対する対策要否の判定フローを提案している。また、例えば電車線の一種である AT 保護線では電柱天端変位が 86mm を超えると電車線に生じるひずみが急激に大きくなるため、疲労破壊を防止するために電柱天端の全振幅が 80mm 以下となるよう制限値を設ける²⁾など、基準類の整備が進んでいる。

電車線による拘束の有無は、電柱にとっては付加ばねとして作用するため、その有無により固有振動は異なる

と考えられる。したがって、拘束発生時の電柱振動は非線形性を有すると考えられる。しかし、上述した基準類は橋りょう - 電柱の線形シミュレーションに基づいており、電柱天端変位に依存した電柱振動の非線形性に関する検討は十分ではない。電柱の過大な振動時における電車線への影響を検討、および線形シミュレーションの適用範囲や基準類の妥当性を検証するうえでも、電柱天端変位と電車線による拘束に伴う電柱の固有振動数の変化を明らかにする必要がある。

電柱の過大な振動時に発生する電車線による拘束に起因して、電車線のひずみが急激に増大するとともに電柱の固有振動数は瞬間的に変動すると考えられる。固有振動数の時間的変動が評価可能な時変システム同定法として、連続ウェーブレット変換⁴⁾や時変時系列モデルによる同定法⁵⁾が存在する。連続ウェーブレット変換では、加振力特性とシステムの特性を分離できないことに加え、固有振動数の瞬間的な変動評価が難しい⁶⁾ことが知られている。したがって、加振力特性を分離可能で、かつ瞬間的な固有振動数の変動を評価可能な非線形システム同定法が必要である。

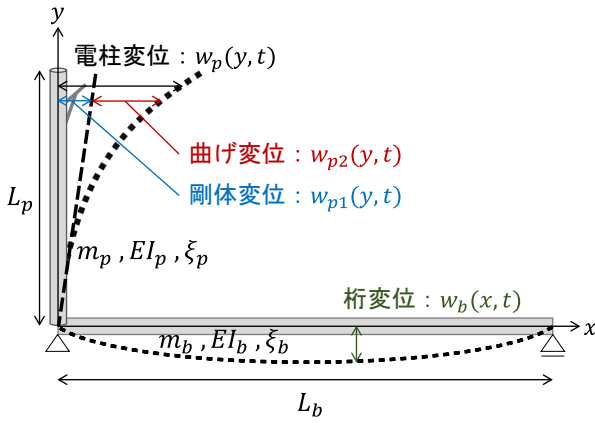


図-1 桁-電柱モデルの概念図

松岡ら^{9,7)}は時変時系列モデルの外生成分としてモード外力化した走行列車荷重を考慮した Time-Varying Auto Regressive with eXogenous (TV-ARX) モデルとその階層ベイズ推定法による時間-周波数解析法 (Bayesian TV-ARX 法) を提案し、列車通過時の桁変位からひび割れ開口による瞬間的な固有振動数の低下を推定している。

本研究では、橋りょう上電柱の非線形性分析手法を構築するため、TV-ARX モデルにおける加振力を、電柱に対する入力である橋りょう変形となるよう再定式化する。さらに、電車線による拘束を表現するため電柱天端変位に依存する非線形性を導入した桁-電柱の数値シミュレーションを利用し、再定式化した橋りょう上電柱振動用の TV-ARX モデルの妥当性を検証する。

2. 検討方法

(1) 橋りょう上電柱振動用 TV-ARX モデルの定式化

電柱の過大な振動時に生じる電車線による拘束により瞬間的に変動する電柱の固有振動数を同定するため、橋りょうの変形を加振力として応答する橋りょう上電柱振動用の TV-ARX モデルを定式化する。なお、当該モデルは電柱および桁変位の時系列データが既知のとき、電柱の固有振動数を推定するものである。

a) 桁の回転角加振を受ける 1 自由度電柱振動

桁の回転角加振により線路平行方向に振動する桁端付近に建植された電柱を 1 自由度、桁を数自由度とするとときの電柱の運動方程式を導出する。導出は文献²⁾に詳しいが、次項に示す定式化を考えるうえで必要となる式や仮定が存在するため、その概要を以下に説明する。

図-1 に単純梁の桁端に電柱が建植された桁-電柱モデルの概念図を示す。ここで、桁および電柱の振動モード付近に近接したモードがないと仮定する。桁について、径間長 L_b 、単位長質量 m_b 、曲げ剛性 EI_b 、モード減衰比 ξ_b とし、地点 x における時点 t の変位を $w_b(x, t)$ と表す。ま

た、電柱について、高さ L_p 、単位長質量 m_p 、曲げ剛性 EI_p 、モード減衰比 ξ_p とし、高さ y における時点 t の剛体変位を $w_{p1}(y, t)$ 、曲げ変位を $w_{p2}(y, t)$ 、高さ y における時点 t の電柱の変位は剛体変位と曲げ変位を合わせた $w_p(y, t) = w_{p1}(y, t) + w_{p2}(y, t)$ と表す。

桁変位、電柱曲げ変位をそれぞれ式(1)および式(2)のようにモード座標系⁸⁾に分解する。

$$w_b(x, t) = \sum_{n=1}^{N_b} \phi_{b,n}(x) \psi_{b,n}(t) \quad (1)$$

$$w_{p2}(y, t) = \sum_{m=1}^{N_p} \phi_{p,m}(y) \psi_{p,m}(t) \quad (2)$$

電柱が桁のモード形 $\phi_{b,n}(x)$ に及ぼす影響を無視できると仮定すると、桁のモード形は正弦波となる。また、電柱剛体変位は桁たわみ角により発生するため、桁モード変位 $\psi_{b,n}(t)$ の関数となり、式(3)となる。

$$w_{p1}(y, t) = y \sum_{n=1}^{N_b} \frac{\pi n \psi_{b,n}(t)}{L_b} \cos\left(\frac{n\pi y}{L_b}\right) \quad (3)$$

桁端($x = 0$)の電柱では、電柱天端($y = L_p$)の剛体変位 $w_{p1}(t)$ は式(4)となる。

$$w_{p1}(t) = \frac{\pi L_p}{L_b} \sum_{n=1}^{N_b} n \psi_{b,n}(t) \quad (4)$$

電柱曲げ変位を片持ち梁の振動として考える。電柱に関する運動方程式を解くと固有円振動数 ω_p および最大値 1 に規格化したモード形 $\phi_{p,1}(y)$ はそれぞれ式(5)および式(6)となる。なお、 $\lambda_{p,1}L_p$ は 1.875 である^{8,9)}。

$$\omega_{p,1} = \frac{(\lambda_{p,1}L_p)^2}{L_p^2} \sqrt{\frac{EI_p}{m_p}} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \phi_{p,1}(y) &= -0.5 \left\{ \cos(\lambda_{p,1}y) - \cosh(\lambda_{p,1}y) \right\} \\ &+ \frac{\sin \lambda_{p,1}L_p - \sinh \lambda_{p,1}L_p}{\cos \lambda_{p,1}L_p + \cosh \lambda_{p,1}L_p} \{ \sin(\lambda_{p,1}y) \\ &- \sinh(\lambda_{p,1}y) \} \end{aligned} \quad (6)$$

式(7)に示す電柱の運動方程式をモード座標系に変換すると式(8)となる。ただし式中の $m_{p,1}$ 、 $c_{p,1}$ 、 $k_{p,1}$ はそれぞれ電柱 1 次モードのモード質量、モード減衰、モード剛性、 $\xi_{p,1}$ は電柱 1 次モードのモード減衰比である。

$$\begin{aligned} m_p \frac{\partial^2 w_{p2}(y, t)}{\partial t^2} + c_p \frac{\partial w_{p2}(y, t)}{\partial t} &+ EI_p \frac{\partial^4 w_{p2}(y, t)}{\partial y^4} \\ &= -m_p L_p \frac{\partial^2 w_{p1}(y, t)}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} m_{p,1} \ddot{\psi}_{p,1}(t) + c_{p,1} \dot{\psi}_{p,1}(t) + k_{p,1} \psi_{p,1}(t) \\ = -1.2\pi m_{p,1} \frac{L_p}{L_b} \sum_{n=1}^{N_b} n \ddot{\psi}_{b,n}(t) \end{aligned} \quad (8)$$

$$m_{p,1} = \int_0^{L_p} m_p \cdot \phi_{p,1}^2(y) dy \approx 0.25 m_p L_p \quad (9)$$

$$c_{p,1} = 2\xi_{p,1} \omega_{p,1} m_{p,1} \quad (10)$$

$$k_{p,1} = \omega_{p,1}^2 m_{p,1} \quad (11)$$

b) TV-ARX モデル

電柱天端 ($y = L_p$) の応答として 1 次モード ($N_p = 1$) のみに縮減すれば, 式(6)に示すモード形は最大値である 1 となるため, 式(2)に示す電柱曲げ変位は式(12)となる.

$$w_{p2}(t) = 1 \cdot \psi_{p,1}(t) \quad (12)$$

式(4)および式(12)より電柱天端の剛体モード変位 $\psi_{p,1}(t)$ は式(13)となる.

$$\psi_{p,1}(t) = w_p(t) - \frac{\pi L_p}{L_b} \sum_{n=1}^{N_b} n \psi_{b,n}(t) \quad (13)$$

式(1)で示される桁変位について, $\phi_{b,r}^{-1}(x)M_b$ を左から乗じる. ここで, $\phi_{b,r}(x)$ は地点 x における桁の r 次モードのモード形, M_b は桁質量 ($m_b L_b$) である.

$$\begin{aligned} & \phi_{b,r}^{-1}(x)M_b w_b(x, t) \\ &= \sum_{n=1}^{N_b} \phi_{b,r}^{-1}(x)M_b \phi_{b,n}(x) \psi_{b,n}(t) \end{aligned} \quad (14)$$

$n \neq r$ のとき直交性¹⁰⁾より $\phi_{b,r}^{-1}(x)M_b \phi_{b,n}(x) = 0$, $n = r$ のとき $\phi_{b,r}^{-1}(x)M_b \phi_{b,n}(x) = M_{b,n}$ となる. ここで $M_{b,n}$ は桁のモード質量であり, 2.(1)a) より桁のモード形は正弦波とするため式(15)となる.

$$M_{b,n} = \int_0^{L_b} m_b \phi_{b,n}^2(x) dx = \frac{m_b L_b}{2} \quad (15)$$

式(14)および式(15)より, 桁のモード変位は式(16)となる.

$$\psi_{b,n}(t) = \frac{2}{\sin(n\pi x/L_b)} w_b(x, t) \quad (16)$$

式(8)に示す電柱の運動方程式について, 桁変位および電柱天端変位が入力できるように式(13)および式(16)を代入し, 等間隔 Δ で時刻 t について中央差分により離散化すると式(17)を得る. ここで, 桁の同一地点 ($x = L_c$ ($0 < L_c < L_b$)) での計測データの使用を仮定すると x は定数として扱えるため, $w_b(x, t)$ は $w_b(t)$ と表記される.

$$\begin{aligned} & w_p(t + \Delta) \left\{ \frac{m_{p,1}}{\Delta^2} + \frac{c_{p,1}}{2\Delta} \right\} \\ & + w_p(t) \left\{ \frac{-2m_{p,1}}{\Delta^2} + k_{p,1} \right\} \\ & + w_p(t - \Delta) \left\{ \frac{m_{p,1}}{\Delta^2} - \frac{c_{p,1}}{2\Delta} \right\} \\ & = w_b(t + \Delta) \\ & \cdot \left\{ D_n \left(\frac{-0.2m_{p,1}}{\Delta^2} + \frac{c_{p,1}}{2\Delta} \right) \right\} \\ & + w_b(t) \\ & \cdot \left\{ D_n \left(\frac{-2(-0.2m_{p,1})}{\Delta^2} \right. \right. \\ & \left. \left. + k_{p,1} \right) \right\} + w_b(t - \Delta) \\ & \cdot \left\{ D_n \left(\frac{-0.2m_{p,1}}{\Delta^2} + \frac{-c_{p,1}}{2\Delta} \right) \right\} \\ & D_n = \frac{\pi L_p}{L_b} \sum_{n=1}^{N_b} \frac{n}{\sin(n\pi L_c/L_b)} \end{aligned} \quad (17)$$

時刻 t について, $t + \Delta = m\Delta$ となる離散時点 m ($m = 1, \dots, M$), および観測ノイズ ϵ_m を導入する. さらに, 固有振動数の時間的な変動を許容するため, 自己相関 (AR) 係数がランダムウォーク過程に従うと仮定し, $w_{t+\Delta}$ について整理すれば, 式(19)および式(20)に示す桁

の回転角加振を受ける橋りょう上電柱振動用の TV-ARX モデルが導出される.

$$w_m = A_m \cdot \alpha + W_m \cdot \beta_m + \epsilon_m \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \beta_{m+1} &= \beta_m + v_m \\ (m &= 1, \dots, M-1) \end{aligned} \quad (20)$$

ここで,

$$w_m = w_p(m\Delta) \quad (21)$$

$$A_m = [w_b(m\Delta) \quad w_b((m-1)\Delta) \quad w_b((m-2)\Delta)] \quad (22)$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_n \left(-\frac{0.2m_{p,1}}{\Delta^2} + \frac{c_{p,1}}{2\Delta} \right) / \gamma \\ D_n \left(\frac{0.4m_{p,1}}{\Delta^2} + k_{p,1} \right) / \gamma \\ -D_n \left(\frac{0.2m_{p,1}}{\Delta^2} + \frac{c_{p,1}}{2\Delta} \right) / \gamma \end{bmatrix} \quad (23)$$

$$W_m = [w_p((m-1)\Delta) \quad w_p((m-2)\Delta)] \quad (24)$$

$$\beta_m = \begin{bmatrix} \beta_{1,m} \\ \beta_{2,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{2m_{p,1}}{\Delta^2} - k_{p,1} \right) / \gamma \\ \left(-\frac{m_{p,1}}{\Delta^2} + \frac{c_{p,1}}{2\Delta} \right) / \gamma \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\gamma = \frac{m_{p,1}}{\Delta^2} + \frac{c_{p,1}}{2\Delta} \quad (26)$$

$$\epsilon_m \sim N(0, \sigma_\epsilon^2) \quad (27)$$

$$v_m \sim N(0, \Sigma_v) \quad (28)$$

ϵ_m と v_m は互いに独立, $N(\text{AVE}, \text{SIG})$ は平均ベクトル **AVE**, 分散行列 **SIG** の多変量正規分布である. なお, w_m は時点 m の電柱天端変位応答, $A_m \alpha$ は時点 m と時点 $m-1$ および時点 $m-2$ の外生成分 (A_m は桁変位応答ベクトル), W_m は時点 $m-1$ と時点 $m-2$ の電柱天端変位応答ベクトル, β_m は時点 $m-1$ と時点 $m-2$ の電柱天端変位応答の AR 係数を要素に持つ時変 AR 係数ベクトル, ϵ_m は観測ノイズ, v_m はランダムウォーク過程におけるシステムノイズである.

時点 m における瞬間固有振動数 f_m は式(29)に示す特性方程式を満たす極 $\lambda = \tilde{\lambda}$ を用いて, 式(30)で算出できる¹¹⁾.

$$|\lambda^2 - \lambda\beta_{1,m} - \beta_{2,m}| = 0 \quad (29)$$

$$f_m = \frac{1}{2\pi\Delta} \sqrt{\text{Re}\{\ln(\tilde{\lambda})\}^2 + \text{Im}\{\ln(\tilde{\lambda})\}^2} \quad (30)$$

ここで, $\text{Re}\{\}$ および $\text{Im}\{\}$ はそれぞれ複素数の実部と虚部である. 縦軸に振動数, 横軸に時間を取った 2 次元分布はエネルギーマップと呼ばれ, 時間周波数分析で一般的に利用される¹¹⁾. TV-ARX モデルでは式(31)より算出できる.

$$\begin{aligned} PS_{f,m} &= \frac{\sigma_\epsilon^2}{|1 - \beta_{1,m} \exp(-2\pi i f) - \beta_{2,m} \exp(-2\pi i f)|^2} \\ &\quad \left(-\frac{1}{2\Delta} \leq f \leq \frac{1}{2\Delta} \right) \end{aligned} \quad (31)$$

(2) 階層ベイズ推定法によるパラメータ推定

式(19)および式(20)に示す再定式化した橋りょう上電柱振動用の TV-ARX モデルのパラメータを推定する手法として, 鉄道橋に対して適用事例が存在する, 走行列車荷

重を加振力特性として考慮したTV-ARXモデルのパラメータ推定法⁹⁾と同様に、階層ベイズ推定法を用いる。

未知パラメータを $\theta = [\beta_1, \dots, \beta_M, \sigma_\epsilon, \Sigma_v, \alpha]$ 、列車通過時の電柱天端変位応答の観測データを $\tilde{w} = [\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_M]$ とし、確率変数 θ は、事前分布 $\pi(\theta)$ に従うとする。観測データ \tilde{w} が得られたとき、未知パラメータベクトル θ の事後分布 $\pi(\theta|\tilde{w})$ はベイズの定理より式(32)となる。

$$\pi(\theta|\tilde{w}) \propto \mathcal{L}(\tilde{w}|\theta)\pi(\theta) \quad (32)$$

式(32)の右辺の事前分布は式(33)となる。

$$\begin{aligned} \pi(\theta) \\ = \pi(\sigma_\epsilon)\pi(\alpha)\pi(\Sigma_v) \prod_{m=0}^{M-1} \pi(\beta_{m+1}|\beta_m, \Sigma_v) \end{aligned} \quad (33)$$

式(32)の右辺の尤度は、未知パラメータ θ がある値 $\bar{\theta} = [\bar{\beta}_1, \dots, \bar{\beta}_M, \bar{\sigma}_\epsilon, \bar{\Sigma}_v, \bar{\alpha}]$ で与えられたときの、観測データ \tilde{w} の生起確率であり、式(34)および式(35)で与えられる。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\tilde{w}|\bar{\theta}) \\ = \frac{1}{2\pi\sqrt{\bar{\sigma}_\epsilon^2}} \prod_{m=1}^M \exp\left\{-\frac{(\tilde{w}_m - \bar{w}_m)^2}{2\bar{\sigma}_\epsilon^2}\right\} \end{aligned} \quad (34)$$

$$\bar{w}_m = A_m \bar{\alpha} + W_m \bar{\beta}_m \quad (35)$$

階層化された未知パラメータ Σ_v の観点では、 $B = [\beta_1, \dots, \beta_M]$ は一般的なベイズ推計の観測値と等しいため、行列 Σ_v を与件とした尤度 $\mathcal{L}(B|\Sigma_v)$ は式(36)となる¹²⁾。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(B|\Sigma_v) = \frac{1}{2\pi\sqrt{|\Sigma_v|}} \\ \cdot \prod_{m=1}^{M-1} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\beta_{m+1} - \beta_m)^T \Sigma_v^{-1} (\beta_{m+1} - \beta_m)\right\} \end{aligned} \quad (36)$$

未知パラメータ $\theta = [\beta_1, \dots, \beta_M, \sigma_\epsilon, \Sigma_v, \alpha]$ に共役事前分布（多変量正規分布 N 、逆ウィシャート分布 IW ）を設定すれば、条件付き事後分布は解析的に計算される。

尤度と事前分布を式(32)に代入すれば事後分布 $\pi(\theta|\tilde{w})$ となる。これを推定するため条件付き事後分布に分割しギブスサンプリングを適用する。条件付き事後分布は、 $\pi(B_{-1}|\beta_1, \sigma_\epsilon, \Sigma_v, \alpha, \tilde{w})$ 、 $\pi(\beta_1|B_{-1}, \sigma_\epsilon, \Sigma_v, \alpha, \tilde{w})$ 、 $\pi(\sigma_\epsilon|B, \Sigma_v, \alpha, \tilde{w})$ 、および $\pi(\Sigma_v|B, \sigma_\epsilon, \alpha, \tilde{w})$ である。 B_{-1} は B のうち β_1 を除いたパラメータ集合を意味する。 β_1 、 σ_ϵ および Σ_v の条件付き事後分布は共役性の仮定により式(37)から式(39)となる¹³⁾。

$$\beta_1 \sim N(\beta_{\beta 1}, \Sigma_{\beta 1}) \quad (37)$$

$$\sigma_\epsilon^2 \sim IW(\sigma_{\epsilon 1}^2, v_{\epsilon 1}, M) \quad (38)$$

$$\Sigma_v \sim IW(\Sigma_{v 1}, v_{v 1}, M-1) \quad (39)$$

なお、 $\beta_{\beta 1}$ 、 $\Sigma_{\beta 1}$ 、 $\sigma_{\epsilon 1}^2$ 、 $v_{\epsilon 1}$ 、 $\Sigma_{v 1}$ および $v_{v 1}$ は事前分布と尤度からベイズの定理により算出される。事前分布のパラメータは、 β_0 、 $\Sigma_{\beta 0}$ 、 $\sigma_{\epsilon 0}^2$ 、 $v_{\epsilon 0}$ 、 $\Sigma_{v 0}$ および $v_{v 0}$ である。これらの詳細は付録Iに示す。また、 α は式(40)から式(42)により代数的に計算される。

$$\alpha = (\Lambda^T \Lambda)^{-1} \Lambda^T W_\alpha \quad (40)$$

$$\Lambda = [A_1^T, \dots, A_{M-1}^T] \quad (41)$$

$$W_\alpha = [\tilde{w}_2 - W_2 \beta_2, \dots, \tilde{w}_M - W_M \beta_M] \quad (42)$$

表-1 桁の諸元

桁長さ L_b [m]	21.1
単位長質量 m_b [kg/m]	15,200
モード減衰比 ξ_p	0.02
固有振動数 f_b [Hz]	4.90

表-2 電柱の諸元

電柱高さ L_p [m]	10
モード質量 $m_{p,1}$ [kg]	295
モード減衰比 ξ_p	0.02
固有振動数 f_p [Hz]	2.67

表-3 列車の諸元

車両長さ L_t [m]×編成数[両]	25×12
列車速度 v_{res} [km/h]	240

条件付き事後分布 $\pi(B_{-1}|\beta_1, \sigma_\epsilon, \Sigma_v, \alpha, \tilde{w})$ のサンプリングは計算効率の高いDKスモューザ¹⁴⁾を用いる。DKスモューザの詳細は文献¹⁴⁾を参照されたい。

3. 数値解析による検証

(1) 検証用の数値シミュレーション

2.(1)で再定式化した橋りょう上電柱振動用のTV-ARXモデルの妥当性を検証するため、数値シミュレーションによるテスト波形を作成する。現状の基準類を提案する際に用いられた移動荷重を受ける桁-電柱モデル(Moving Load Model, 以下MLMと称する)^{11,12)}について、電車線による拘束を表現するため、電柱の剛性に対して電柱天端変位に依存する非線形性を導入する。文献¹²⁾にてMLMは桁端に建植された電柱の列車通過時の線路平行方向振動を精度よく計算できることが確認されている。MLMの詳細は付録IIを参照されたい。

a) 剛性上昇率の導入

電柱の過大な振動時に発生する電車線による拘束を再現するために、MLM内の電柱のモード剛性 $EI_p(t)$ について、式(43)および式(44)より電柱天端変位に応じた条件で場合分けすることで非線形性を導入する。

$$EI_p(t) = \begin{cases} EI_{p0} & (|w_p(t)| < D_{lim}) \end{cases} \quad (43)$$

$$= \begin{cases} EI_{p0} \cdot (1 + \Delta EI_{p0}/EI_{p0}) & (|w_p(t)| \geq D_{lim}) \\ \Delta EI_{p0}/EI_{p0} = K_{Rate}(|\psi_{p,1}(t) - D_{lim}|) \end{cases} \quad (44)$$

ここで、 EI_{p0} は電車線による拘束が発生しない場合における電柱のモード剛性、 $\psi_{p,1}(t)$ は電柱天端曲げ変位である。 D_{lim} は制限値(電車線による拘束が生じ始める電柱天端の片側変位)、 K_{Rate} は剛性上昇率の大きさを決定する係数である。また、 $1 + \Delta EI_{p0}/EI_{p0}$ は剛性上昇率である。

b) テスト波形の作成

数値シミュレーションに用いる桁の諸元を表-1, 電柱の諸元を表-2, および通過列車の諸元を表-3に示す. 制限値 D_{lim} は現状の基準類²⁾に従い 40mm とした. また, 実営業線における電車線による拘束に関する検討事例がないため, 剛性上昇率の大きさを決定する係数 K_{Rate} は実現象における剛性上昇を想定した 0.00 (電車線拘束なし) と 0.01, 0.02, 0.03 (電車線拘束あり) の4種類とする.

(2) TV-ARX モデルの設定

2.(1)で再定式化した橋りょう上電柱振動用の TV-ARX モデルを 3.(1)で作成した数値シミュレーションによるテスト波形に適用する. 本研究では階層ベイズ推定法によりパラメータ推定する際のサンプリング回数 n は, バーンイン回数 $\bar{n} = 1,000$ 回と記録回数 $\underline{n} = 3,000$ 回で計 4,000 回とする. 事前分布のパラメータは, $\beta_0 = [\beta_1, \beta_2]$ を $[1.966, 0.9938]$ とした. また, $\Sigma_{\beta 0}$ は対角成分および非対角成分をそれぞれ 0.0001² および 0 とする最大 AR 次数の正方行列 (2×2 行列), $\Sigma_{v 0}$ は対角成分を $8.0 \times 10^{-2}, 2.0 \times 10^{-8}$, 非対角成分を 0 とする最大 AR 次数の正方行列 (2×2 行列), $\sigma_{\epsilon 0}^2$ は 8.0×10^{-5} , $v_{v 0}$ および $v_{\epsilon 0}$ はともに M とした. 各変数は付録 I を参照されたい. 推定結果について, 剛性上昇率の大きさを決定する係数 K_{Rate} が 0.00 (電車線拘束なし) の場合を図-2, 0.01, 0.02, 0.03 (電車線拘束あり) の場合をそれぞれ図-3 から図-5 に示す. 図中の(ア), (イ), (ウ)のグラフの解説は以下の通りである.

- (ア) 入力する電柱天端変位 W_m を青色の実線, 推定した電柱天端変位 w_m を赤色の破線, および制限値 $D_{lim} 40\text{mm}$ を黒色の一点鎖線で示す.
- (イ) 数値シミュレーションにより算出した剛性上昇率を青色の実線で示す.
- (ウ) 式(30)より算出する瞬間固有振動数 f_m を赤色の実線, 式(31)より算出する瞬間パワースペクトル (PSD) をグラデーションで示す.

以下, (3)において剛性上昇率と瞬間固有振動数のグラフ形状を比較, (4)において剛性上昇率と瞬間固有振動数の最大値を比較, (5)において非線形性が生じる時点を検討することで, 再定式化した橋りょう上電柱振動用の TV-ARX モデルの妥当性を検証する.

(3) 推定結果 I : 固有振動数と剛性上昇率

剛性上昇率の大きさを決定する係数 K_{Rate} に関わらず (イ) 剛性上昇率と (ウ) 瞬間固有振動数のグラフ形状は概ね一致する. K_{Rate} が 0.00 (電車線拘束なし) と K_{Rate} が 0.01, 0.02, 0.03 (電車線拘束あり) における (ウ) 瞬間固有振動数を比較すると, K_{Rate} が 0.00 では

大きな変動がなく, その他の場合は 3.2~5.0 秒辺りで変動が確認できる. したがって, 再定式化した橋りょう上電柱振動用の TV-ARX モデルは瞬間的な固有振動数の変動を捉えることが可能であり, 推定結果から電車線による拘束

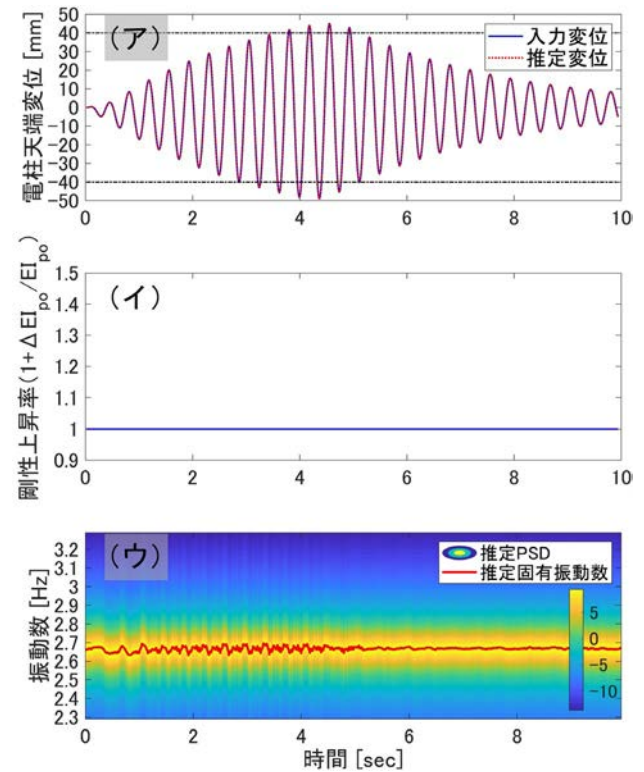


図-2 推定結果 (線形: $K_{Rate} = 0.00$)

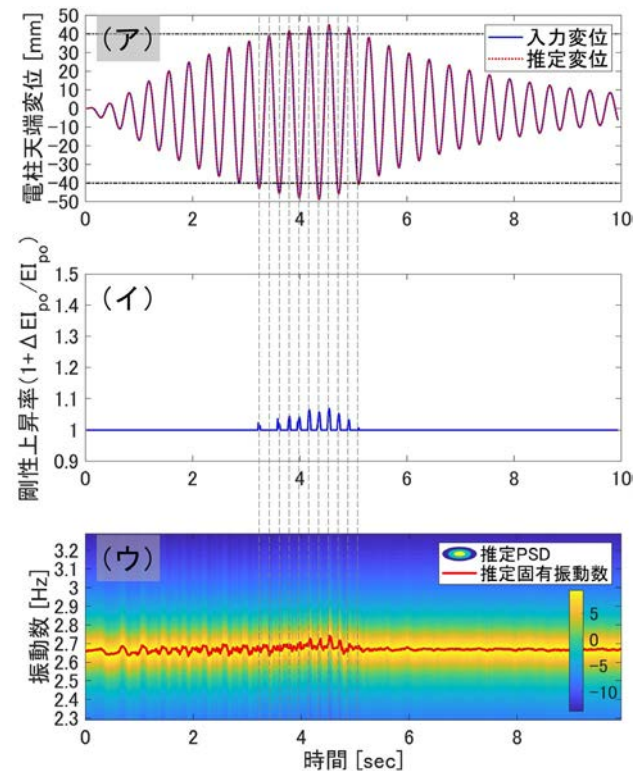
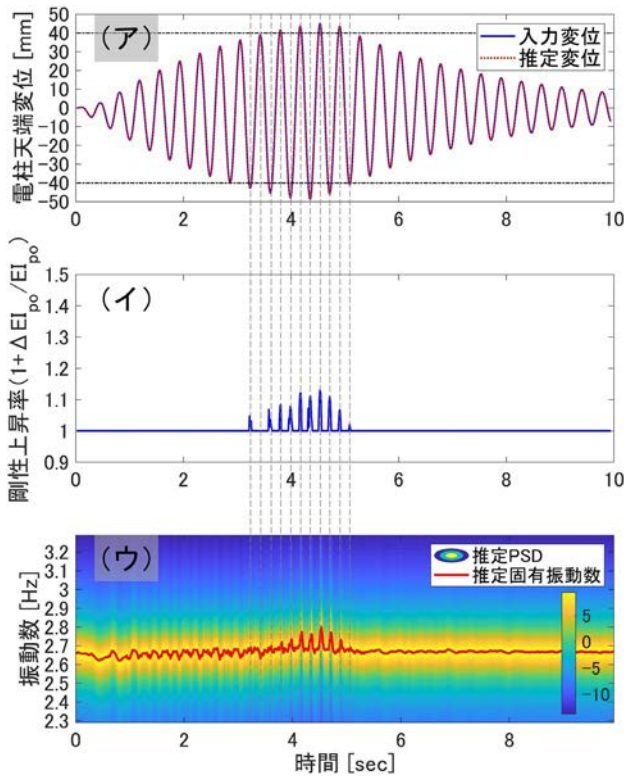
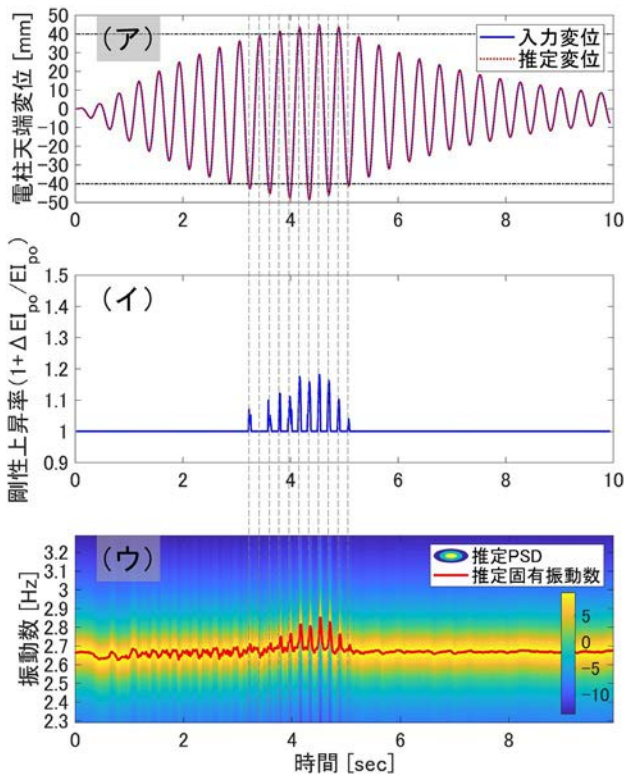


図-3 推定結果 (非線形: $K_{Rate} = 0.01$)


 図-4 推定結果 (非線形: $K_{Rate} = 0.02$)

 図-5 推定結果 (非線形: $K_{Rate} = 0.03$)

の有無が判断できることが明らかとなった。

K_{Rate} が 0.00 の場合、もしくは電柱天端変位が制限値 D_{lim} 40mm を超えない領域では式(43)および式(44)より剛性上昇が生じないため、推定した電柱の瞬間固有振動数は

表-4 剛性上昇率の比較と相対誤差

K_{Rate}	$(1 + \frac{\Delta EI_{p0}}{EI_{p0}})_{\max}$	$(\frac{f'_{p \max}}{f_p})^2$	相対誤差(%)
0.01	1.07	1.05	-1.87
0.02	1.13	1.11	-1.77
0.03	1.18	1.15	-2.54

2.67Hz で時間に依らず一定となる。しかし、再定式化した橋りょう上電柱振動用の TV-ARX モデルで推定した(ウ)瞬間固有振動数は 2.67Hz 付近を示すものの完全な直線を示しておらず、特に列車通過 (0.0~4.5 秒) 区間において不規則に微小な上下を繰り返している。これはパラメータ推定にて外生成分 ($A_m \alpha$) が影響している他、非線形性が生じる領域で瞬間的な固有振動数の変動を捉えられるように AR 係数のランダムウォーク過程におけるシステムノイズ v_m の分散 Σ_v の事前分布を設定したことに起因すると推測する。

(4) 推定結果Ⅱ：固有振動数の最大値

時点 m において、数値シミュレーションによる設定値: 剛性上昇率 $(1 + \Delta EI_{p0}(m)/EI_{p0})$ と再定式化した橋りょう上電柱振動用の TV-ARX モデルによる推定値: 推定剛性上昇率 $(f'_p(m)/f_p)^2$ は式(45)より理論的に一致する。

$$\left(\frac{f'_p(m)}{f_p}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{(EI_p + \Delta EI_p(m))/m_p}}{\sqrt{EI_p/m_p}}\right)^2 = 1 + \frac{\Delta EI_{p0}(m)}{EI_{p0}} \quad (45)$$

ここで、 $f'_p(m)$ は時点 m における瞬間的な固有振動数、 f_p は剛性上昇が生じない領域における固有振動数 2.67Hz である。電柱の過大な振動による電車線への影響は、剛性上昇率が最大の時点で最も大きくなると予想されるため、剛性上昇率の最大値 $(1 + \Delta EI_{p0}/EI_{p0})_{\max}$ とその時点における推定剛性上昇率 $(f'_{p \max}/f_p)^2$ を比較し、両者の差を相対誤差で評価する。表-4 に剛性上昇率の最大値とその時点における推定剛性上昇率、および相対誤差を示す。相対誤差の大きさは 1~3% 程度であり、推定結果の最大値は概ね妥当であることが確認された。

(5) 推定結果Ⅲ：非線形性が始まる時点の推定

図-2 から図-5 に (イ) 剛性上昇率が 1 を超える時点ごとに灰色の破線を記載した。破線を記載した区間が非線形性を有する領域であり、(ウ) 瞬間固有振動数は瞬間的に上昇する時点と概ね一致する。したがって、推定結果から非線形性が生じるおおよその領域が把握でき、また、線形と非線形領域の境界となる制限値の特定が可能であることが示唆された。しかし電柱天端変位と制限値の差が極わずかで瞬間固有振動数の上昇幅が微小な場合は、3.(3)に記載した不規則で微小な上下との判別が難しい現状である。

4. おわりに

本研究では、列車通過時の桁たわみ振動により線路平行方向に大きく振動することで電車線による拘束を受ける橋りょう上桁端付近に建植された電柱の瞬間的な剛性上昇を評価するため、桁変形が加振力となるよう TV-ARX モデルを再定式化した。以下に得られた結果を示す。

- ・ 数値シミュレーションより算出する剛性上昇率と再定式化した橋りょう上電柱振動用の TV-ARX モデルより推定された瞬間固有振動数の変動は概ね一致したため、提案モデルは瞬間的な固有振動数の変動が捉えられること、電車線による拘束の有無が判断できることが明らかとなった。
- ・ 剛性上昇率が最大となる時点における瞬間固有振動数の推定値は相対誤差-1～-3%程度であり、妥当な値であることが確認された。
- ・ 非線形性が生じる領域および線形と非線形性領域の境界となる制限値の特定が可能であることが示唆された。

実測データに本研究で再定式化した橋りょう上電柱振動用の TV-ARX モデルを適用することで、検討対象の電柱における非線形性の有無、推定した瞬間固有振動数から電車線による拘束力およびその影響を推測する。そして、特定した制限値から線形シミュレーションの適用範囲や現状の基準類の妥当性を検証することが今後の課題である。

付録 I 共役事前分布と事後分布

未知パラメータ $\theta = [\beta_1, \dots, \beta_M, \sigma_\epsilon, \Sigma_v, \alpha]$ の事前確率密度関数 $\pi(\theta)$ はそれぞれ以下の通りである。

$$\pi(\beta_{m+1}) = N(\beta_m, \Sigma_v) \quad (I.1)$$

$$(m = 1, \dots, M-1)$$

$$\pi(\beta_1) = N(\beta_M, \Sigma_{\beta 0}) \quad (I.2)$$

$$\pi(\sigma_\epsilon^2) = IW(\sigma_{\epsilon 0}^2, v_{\epsilon 0}, M) \quad (I.3)$$

$$\pi(\Sigma_v) = IW(\Sigma_{v 0}, v_{v 0}, M-1) \quad (I.4)$$

ここで、 IW はウィシャート分布 W の逆数が従う分布である。 M_0 個の確率変数が従う自由度 v_0 、分散共分散行列 Σ_0 のウィシャート分布の確率密度関数は、

$$W(\Sigma^{-1} | \Sigma_0, v_0, M_0) = \Psi^{-1} |\Sigma^{-1}|^{\frac{v_0 - M_0 - 1}{2}} \exp \left\{ -\frac{\text{Tr}(\Sigma_0^{-1} \Sigma^{-1})}{2} \right\} \quad (I.5)$$

と定義される^{13), 15)}。なお、

$$\Psi = \frac{M_0 v_0}{2^{\frac{M_0 v_0}{2}}} \pi^{\frac{M_0(M_0-1)}{4}} |\Sigma_0|^{\frac{M_0}{2}} \prod_{m_0=1}^{M_0} \Gamma\left(\frac{v_0 - m_0 + 1}{2}\right) \quad (I.6)$$

である。また式(I.5)中の $\text{Tr}()$ は行列のトレースを、式(I.6)中の $\Gamma()$ はガンマ関数をそれぞれ示す。

β_1 をサンプリングする条件付き事後確率密度関数 $\pi(\beta_1 | \mathbf{B}_{-1}, \sigma_\epsilon, \Sigma_v, \alpha, \tilde{\mathbf{w}})$ は $\beta_1 \sim N(\beta_{\beta 1}, \Sigma_{\beta 1})$ であり、ベイズの定理より $\beta_{\beta 1}$ および $\Sigma_{\beta 1}$ は以下となる¹³⁾。

$$\beta_{\beta 1} = \Sigma_{\beta 1} \left(\Sigma_{\beta 0}^{-1} \beta_0 + \frac{\mathbf{W}^T \mathbf{W}_\beta}{\sigma_\epsilon^2} \right) \quad (I.7)$$

$$\Sigma_{\beta 1}^{-1} = \Sigma_{\beta 0}^{-1} + \frac{\mathbf{W}^T \mathbf{W}}{\sigma_\epsilon^2} \quad (I.8)$$

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{w}}_2, \dots, \tilde{\mathbf{w}}_{m-1}, \dots, \tilde{\mathbf{w}}_{M-1} \\ \tilde{\mathbf{w}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{w}}_{m-2}, \dots, \tilde{\mathbf{w}}_{M-2} \end{bmatrix}^T \quad (I.9)$$

$$\mathbf{W}_\beta = [\tilde{\mathbf{w}}_1 - \mathbf{A}_1 \alpha - \mathbf{W}_1 \beta_1, \dots, \tilde{\mathbf{w}}_M - \mathbf{A}_M \alpha - \mathbf{W}_M \beta_M] \quad (I.10)$$

σ_ϵ をサンプリングする条件付き事後確率密度関数 $\pi(\sigma_\epsilon | \mathbf{B}, \Sigma_v, \alpha, \tilde{\mathbf{w}})$ は式(38)であり、ベイズの定理より $\sigma_{\epsilon 1}^2$ および $v_{\epsilon 1}$ は以下となる。

$$\sigma_{\epsilon 1}^2 = \sigma_{\epsilon 0}^2 + \sum_{m=1}^M (\tilde{\mathbf{w}}_m - \mathbf{A}_m \alpha + \mathbf{W}_m \beta_m)^2 \quad (I.11)$$

$$v_{\epsilon 1} = v_{\epsilon 0} + M \quad (I.12)$$

Σ_v をサンプリングする条件付き事後確率密度関数 $\pi(\Sigma_v | \mathbf{B}, \sigma_\epsilon, \alpha, \tilde{\mathbf{w}})$ は式(39)であり、ベイズの定理より $\Sigma_{v 1}$ および $v_{v 1}$ は以下となる。

$$\Sigma_{v 1} = \Sigma_{v 0} + \sum_{m=1}^{M-1} (\beta_{m+1} - \beta_m)(\beta_{m+1} - \beta_m)^T \quad (I.13)$$

$$v_{v 1} = v_{v 0} + M - 1 \quad (I.14)$$

付録 II 移動荷重を受ける桁-電柱モデル

状態変数 $\Psi(t)$ を式(II.1)とすると、通過列車と同じ車軸配置を有する集中荷重列が電柱共振速度で走行する際の桁、電柱の運動方程式から導出されるモデル (Moving Load Model) は式(II.2)で示される。ただし、式中の $H()$ は式(II.4)に示されるヘビサイド関数であり、 $\text{diag}()$ は括弧内を対角要素とした対角行列である。なお、導出は文献²⁾を参照されたい。

$$\Psi(t) = \begin{bmatrix} \psi_{p,1}(t) \\ \psi_{b,1}(t) \\ \vdots \\ \psi_{b,N_b}(t) \end{bmatrix} \quad (II.1)$$

$$\begin{bmatrix} m_{p,1} & \mathbf{B}^T m_{p,1} \\ 0 & \mathbf{M}_b \end{bmatrix} \ddot{\Psi}(t) + \begin{bmatrix} c_{p,1} & 0 \\ -\mathbf{B} c_{p,1} & \mathbf{C}_b \end{bmatrix} \dot{\Psi}(t) + \begin{bmatrix} k_{p,1} & 0 \\ -\mathbf{B} k_{p,1} & \mathbf{K}_b \end{bmatrix} \Psi(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{F} \end{bmatrix} \quad (II.2)$$

ここで、

$$\mathbf{F}_n = \begin{bmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_{N_b} \end{bmatrix} \quad (II.3)$$

$$F_n = \sum_{w=1}^{C_w} \sin\left(\frac{n\pi(x_w + vt)}{L_b}\right) \left\{ H\left(t + \frac{x_w}{v}\right) - H\left(t + \frac{x_w - L_b}{v}\right) \right\} P_w$$

$$H(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ 1 & (x \geq 0) \end{cases} \quad (II.4)$$

$$\mathbf{B} = [B_1 \quad \dots \quad B_{N_b}]^T$$

$$B_{n_b} = 1.2\pi n \frac{L_p}{L_b} \quad (\text{II.5})$$

$$\mathbf{M}_b = \text{diag}(m_{b,1}, \dots, m_{b,N_b}) \quad (\text{II.6})$$

$$\mathbf{C}_b = \text{diag}(c_{b,1}, \dots, c_{b,N_b}) \quad (\text{II.7})$$

$$\mathbf{K}_b = \text{diag}(k_{b,1}, \dots, k_{b,N_b}) \quad (\text{II.8})$$

式(II.2)に示す MLM に対して, 状態空間モデル化して時間積分を実施することで 1 階微分方程式となり, Runge-Kutta 法などの一般的な初期値問題に対する解法が利用可能となる。本研究では Dormand-Prince による陽的 Runge-Kutta(4,5)公式¹⁶⁾による解法を利用する。当該アルゴリズムは関数 `ode45` として Matlab に実装されている¹⁷⁾。

REFERENCES

- 1) 常本瑞樹, 松岡弘大, 後藤恵一, 薄広歩, 以倉慶子: 列車通過時の高架橋振動による電車線路設備損傷の低減対策, 鉄道総研報告, Vol.43, No.9, pp.35-40, 2020. [Tsunemoto, M., Matsuoka, K., Goto, K., Susuki, H. and Ikura, K.: Measures for reducing damage to overhead contact line system due to bridge caused by passing trains, *RTRI Report*, Vol. 43, No. 9, pp. 35-40, 2020.]
- 2) Matsuoka, K., Tsunemoto, M. and Tokunaga, M.: Dynamic behaviour of railway poles built on bridges under train passage in high-speed railways and a simple evaluation method, *Engineering Structures*, Vol. 257, No. 114099, 2022.
- 3) Ülker-Kaustell, M. and Karoumi, R.: Application of the continuous wavelet transform on the free vibrations of a steel-concrete composite railway bridge, *Engineering Structures*, Vol. 33, Issue 3, pp. 911-919, 2011.
- 4) 北川源四郎: 時系列解析入門, 岩波書店, 2014. [Kitagawa, G.: Introduction to time series analysis, Iwanami shoten, 2014.]
- 5) 松岡弘大, 徳永宗正, 貝戸清之: Bayesian TV-ARX モデルによる走行列車荷重下のひび割れ開閉に伴う桁剛性変動評価, 土木学会論文集 A2 (応用力学), Vol. 76, No. 2 (応用力学論文集 Vol. 23), I_3-I_14, 2020. [Matsuoka, K., Tokunaga, M. and Kaito, K.: Evaluation of girder stiffness fluctuation due to crack breathing under train passages using bayesian TV-ARX model, *Transaction of the Japan Society of Civil Engineers A2 (Applied Mechanics)*, Vol. 76, No. 2 (*Journal of applied mechanics* Vol. 23), I_3-I_14, 2020.]
- 6) Matsuoka, K., Kaito, K. and Sogabe, M.: Bayesian time-frequency analysis of the vehicle-bridge dynamic interaction effect on simple-supported resonant railway bridges, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 135, No. 106373, 2020.
- 7) Matsuoka, K., Tokunaga, M. and Kaito, K.: Bayesian estimation of instantaneous frequency reduction on cracked concrete railway bridges under high-speed train passage, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 161, No. 107944, 2021.
- 8) Singiresu S. Rao: *Vibration of Continuous Systems*, John Wiley & Sons, 2019.
- 9) Aboshi, M., Tsunemoto, M., Sunakoda, K., Matsuoka, T., Ikahata, N. and Shibata, K.: Improvement of damping performance of electric railway pole with viscoelastic damper, *Journal of System Design and Dynamics*, Vol. 4, No. 6, 2010.
- 10) 長松昌男, 長松昭男: 実用モード解析入門, コロナ社, 2018. [Nagamatsu, M. and Nagamatsu, A.: Introduction to practical modal analysis, Corona publishing, 2018.]
- 11) Poulimenos, A. G. and Fassois, S. D.: Output-only stochastic identification of a time-varying structure via functional series TARMA models, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 23, No.4, pp. 1180-1204, 2009.
- 12) 石黒真木夫, 乾敏郎, 伊庭幸人, 田邊國士: 階層ベイズモデルとその周辺, 岩波書店, 2006. [Ishiguro, M., Inui, T., Iba, Y. and Tanabe, K.: Hierarchical Bayesian model and surroundings, Iwanami shoten, 2006.]
- 13) C. M. ビショップ: パターン認識と機械学習 上 - ベイズ理論による統計的予測, 丸善出版, 2016. [Bishop, C. M.: Pattern recognition and machine learning, Maruzen Publishing, 2016.]
- 14) Durbin, J., Koopman, S. J.: A simple and efficient simulation smoother for state space time series analysis, *Biometrika*, Vol. 89, No. 3, pp. 603-615, 2002.
- 15) Anderson T. W.: An introduction to multivariate statistical analysis, John Wiley & Sons, 2003.
- 16) Shampine, L. F. and Reichelt, M. W.: The MATLAB ODE suite, *SIAM Journal on Scientific Computing*, Vol. 18, pp. 1-22, 1997.
- 17) Ashino, R., Nagase, M. and Vaillancourt, R.: Behind and beyond the MATLAB ODE suite, *Computers & Mathematics with Applications*, Vol. 40, Issues 4-5, pp. 491-512, 2000.

(Received March 31, 2023)

(Accepted June 9, 2023)

NONLINEAR ANALYSIS METHOD FOR VIBRATION OF RAILWAY POLES ON BRIDGES UNDER TRAIN PASSAGES

Tadafumi TAKASE, Kodai MATSUOKA and Kiyoyuki KAITO

Restraints are caused by the wire when the railway pole vibrates significantly under the resonance. This study proposes a Time-Varying Auto Regressive eXogenous (TV-ARX) model that clarifies the relationship between the pole displacement and the pole's natural frequency that increases with restraints of the wire. The proposed model is obtained by reformulation of the existing model, such that the bridge deformation is replaced by the excitation force on the pole. The model is validated using a bridge-pole numerical simulation. The result shows that the model can accurately estimate the instantaneous increase in the pole's natural frequency and identify the region where nonlinearity occurs.