

論文 列車通過時のコンクリート桁における時変固有振動数の同定法

井田 直宏¹・松岡 弘大²・貝戸 清之³

¹ 学生会員 大阪大学大学院 工学研究科 地球総合工学専攻 (〒565-0871 吹田市山田丘 2-1)
E-mail: n.ida@civil.eng.osaka-u.ac.jp

² 正会員 公益財団法人鉄道総合技術研究所 鉄道力学研究部 (〒185-8540 国分寺市光町 2-8-38)
E-mail: matsuoka.kodai.13@rtri.or.jp

³ 正会員 大阪大学准教授 大学院工学研究科 地球総合工学専攻 (〒565-0871 吹田市山田丘 2-1)
E-mail: kaito@ga.eng.osaka-u.ac.jp (Corresponding Author)

列車通過時の変位応答から橋りょうの固有振動数を同定する時間一周波数解析手法として Bayesian TV-ARX 法が提案されているが、ともに固有振動数低下に影響する、ひび割れ開口による効果と車両・橋りょうの動的相互効果を分離できなかった。本研究では、これまでランダムウォーク過程でモデル化されていた TV-ARX モデルのシステム方程式に振幅依存項と相互作用依存項を導入した、TVF-ARX モデルを定式化し、固有振動数の時間的変動要因を分離可能な時間一周波数解析手法を提案した。いくつかのシミュレーション波形に本手法を適用し、瞬間的な固有振動数の低下現象を高精度に推計できることに加え、二つの効果を分離できることを確認した。

Key Words: Bayesian TV-ARX, Time-frequency analysis, High-speed railway, Breathing crack

1. はじめに

高度経済成長期に建設された多くの社会基盤構造物の劣化が社会問題となり、効率的な維持管理手法を構築することが喫緊の課題とされている。高速鉄道橋では、1980年代から PRC (Prestressed Reinforced Concrete) 桁の導入が進み、比較的剛性の低い桁が設計可能となった。活荷重載荷時のひび割れを許容した PRC 桁では、異常や損傷、桁剛性の低下を判断する過程において、ひび割れの発生や進展が重要な指標となる場合がある¹⁾。しかし、導入プレストレスの影響により列車載荷時以外ではひび割れが閉口する傾向にあるため、目視での詳細な検査が困難であった。ひび割れによる桁の剛性低下を固有振動数の低下を介して把握するため、衝撃振動試験が実施された場合もある。しかしながら、衝撃振動試験では、列車通過時に比べて励起できる振幅が小さく、ひび割れ開口による桁剛性の低下量が過小評価される可能性を否定できない²⁾。なお、高速鉄道橋の固有振動数は、走行列車との共振が生じる列車速度を決める重要な指標である^{3,4)}。想定以上のひび割れ開口による桁剛性低下は、静的な桁たわみの増大だけでなく、固有振動数の低下を介して、設計で想定されていない走行速度での共振の発

生を招く可能性がある。共振により鉄道橋に過大の動的応答振幅が生じる場合には、乗り心地の悪化や付帯構造物への影響も指摘されている⁵⁾。したがって、コンクリートのひび割れ開口時の曲げ剛性および固有振動数の低下量を、列車通過時の応答測定値から高精度に評価可能な手法を構築することは、共振の影響を受けやすい高速鉄道橋（特に PRC 桁）の維持管理において重要である。

本研究で対象とする共振状態に近い橋りょうでは、橋りょうの固有振動数と走行列車の加振振動数が近接する。そのため、橋りょうの固有振動数の精緻な評価には、加振周波数特性の適切な分離が不可欠である。松岡ら^{6,7)}は、外生成分を考慮した時変時系列モデルである、TV-ARX (Time-Varying Auto-Regressive with eXogenous) モデルとその階層ベイズ推定による時間一周波数解析手法である Bayesian TV-ARX 法を提案している。Bayesian TV-ARX 法は、モード外力化された走行列車荷重（移動荷重列）を外生成分として考慮することで、応答測定値から入力情報を分離する。ただし、既往研究の Bayesian TV-ARX 法では、固有振動数の瞬間的な低下を評価できるものの、固有振動数の変化をランダムウォーク過程でモデル化したため、ひび割れ開口による効果と車両との相互作用による効果を分離することはできなかった。加えて、非線

形性を表現するための時変係数（ランダムウォーク過程）の推定に多大な計算負荷を要していた。

以上を踏まえ、本研究では AR 係数の時間的な変動に既往の知見を踏まえて関数を導入した TVF-ARX (Time-Varying Functional Auto-Regressive with eXogeneous) モデルを定式化し、固有振動数の時間的な変動に影響するひび割れ開口による効果（振幅依存効果）と車両との相互作用による効果を分離して同定する手法の構築を試みた。以下、2 章で本研究の基本的な考え方を述べる。3 章では TVF-ARX モデルの定式化とそれらの階層ベイズ推計からなる Bayesian TVF-ARX 法について説明し、4 章でシミュレーション波形に対する適用結果を示す。

2. 本研究の基本的な考え方

(1) PRC 枠の振幅に依存した剛性低下

PRC 枠は、プレストレストコンクリート (PC) 枠と鉄筋コンクリート (RC) 枠の中間的な構造種別である⁸⁾。全設計荷重のうち長期間かつ継続的に作用する荷重に対しては、フルプレストレスであるが、全設計荷重が作用する場合には限定的な幅のひび割れを許容する。PRC 枠は PC 枠に比べて使用する PC 鋼材の量が削減できることから、鉄道橋の設計でも用いられてきた。図-1 は、ひび割れを有する PRC 枠における列車通過時の変位応答振幅と枠ひび割れ開口の概念を示す。PRC 枠は PC 鋼材に対してプレストレスを導入しているため、列車の通過がない場合（非載荷時）にはひび割れが閉口する傾向にある。一方、列車通過時には列車荷重が載荷され、枠たわみが生じるため、枠下面のひび割れが開口する。その結果、枠剛性ならびに固有振動数の低下は枠の下側変位応答発生時にのみ生じる。既往研究^{7,9)}では、上記のような振幅依存性の剛性低下現象を有する PRC 枠に Bayesian TVF-ARX 法を適用し、固有振動数の瞬間的な低下挙動を高精度に推計可能であることが報告されている。

(2) 車両と橋りょうの相互作用効果

車両・橋りょう相互作用 (Vehicle Bridge Interaction : VBI) 効果は、通過列車の質量や振動特性に応じて鉄道橋のモード特性などが見かけ上変化する現象である。高速鉄道における共振を含む橋りょうの動的応答の評価においては、VBI 効果が無視できない影響を及ぼす場合がある。特に、固有振動数の把握を目的とした鉄道橋の振動モニタリングでは、一般的な劣化や損傷に対する固有振動数の変化が比較的微小であるため、高精度な固有振動数の同定が要求される。VBI 効果は、本来把握したい鉄道橋の固有振動数を見かけ上変動させるため、これまで留意が必要とされていた。ここで VBI 効果の具体的な

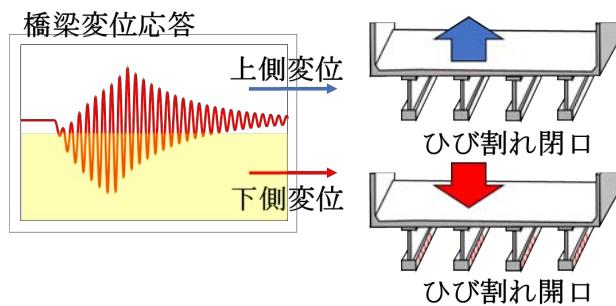


図-1 振幅に依存した剛性低下の概念

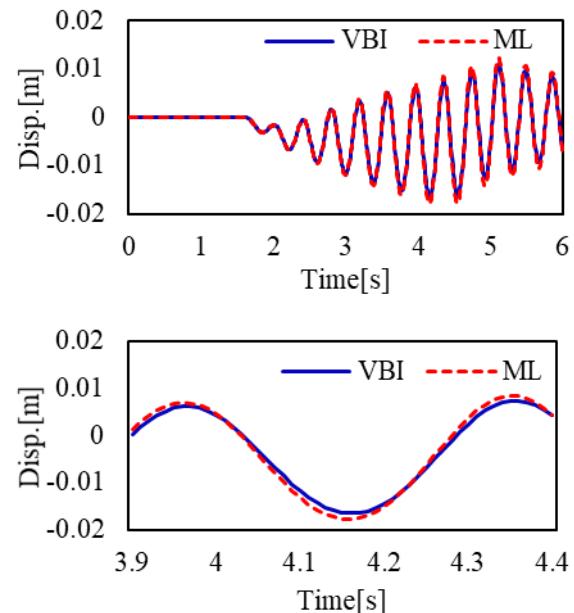


図-2 VBI 効果 (VBI・ML モデル) の例

(支間長 29.2m, 固有振動数 2.8Hz, 列車速度 235km/h)

例を図-2 に示す。図-2 は走行列車モデルを移動荷重列として算出した変位応答 (ML モデル) と、マルチボディとしてモデル化し、VBI 効果を考慮して算出した変位応答 (VBI モデル) を示す。解析手法は文献 6) を参照されたい。走行列車の質量および減衰は橋りょうに対して付加質量および付加減衰として作用するため、VBI モデルは ML モデルと比較して (固有振動数が低下するため) 位相が遅れ、変位応答が減少する。これらの効果は固有振動数やモード減衰比の推定精度低下の要因となる。

以上を踏まえ、列車通過時の測定波形データから橋りょうの固有振動数などのモード特性を推定する場合、VBI 効果による付加分を時間一周波数解析を介して分離して評価する必要がある。2.(1) で述べた PRC 枠では、列車通過時において振幅依存のひび割れ開口の影響と VBI 効果が重複する。また、これらの効果はともに固有振動数を低下させる。したがって、ひび割れ開口による剛性低下の程度を評価するためには、VBI 効果との分離が必要である。ただし、既往研究で用いられた Bayesian TVF-ARX 法では固有振動数の変動におけるひび割れ開口

の効果と VBI 効果を分離できない。これを克服するため、本研究では、振幅に依存して生じるひび割れ開閉による効果（振幅依存効果）と車両との相互作用依存効果をそれぞれ考慮するため、既往のモデル時変係数に振幅依存項と相互作用依存項を陽に導入した、TVF-ARX モデルを定式化する。

3. TVF-ARX モデルの定式化

(1) 既往手法 : Bayesian TV-ARX 法

列車通過時の支間中央における変位応答から時間的に変動する固有振動数を同定する手法として松岡ら⁹が提案した TV-ARX モデルとその階層ベイズ推計から成る Bayesian TV-ARX 法の概要を以下に説明する。TV-ARX モデルの詳細は文献 6)を参照されたい。TV-ARX モデルは、列車通過時における単純支持梁の運動方程式を中心差分で離散化することで導出され、式(1)および(2)で表される。本モデルでは式(2)の通り、AR 係数の変動がランダムウォークに従うと仮定している。

$$z_m = \mathbf{A}_m \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{Z}_m \boldsymbol{\beta}_m + \epsilon_m \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\beta}_{m+1} = \boldsymbol{\beta}_m + \boldsymbol{\nu}_m \quad (2)$$

$$\mathbf{A}_m = [A_{1,m-1}, \dots, A_{nw,m-1}] \quad (3a)$$

$$\boldsymbol{\alpha} = [\alpha_1, \dots, \alpha_{nw}]^T \quad (3b)$$

$$\mathbf{Z}_m = [z_{m-1}, z_{m-2}] \quad (3c)$$

$$\boldsymbol{\beta}_m = [\beta_{1,m}, \beta_{2,m}]^T \quad (3d)$$

$$\epsilon_m \sim N(0, \sigma_\epsilon^2) \quad (3e)$$

$$\boldsymbol{\nu}_m \sim N(0, \Sigma_\nu) \quad (3f)$$

ここで z_m は時点 m における橋りょう変位応答、 $\mathbf{Z}_m = [z_{m-1}, z_{m-2}]$ 、 $\boldsymbol{\beta}_m = [\beta_{1,m}, \beta_{2,m}]^T$ は自己相関を表す AR 係数、 $\mathbf{A}_m \boldsymbol{\alpha}$ は時点 m における外生成分項、 ϵ_m は観測ノイズ、 $\boldsymbol{\nu}_m$ はランダムウォークにおけるシステムノイズをそれぞれ表す。 ϵ_m と $\boldsymbol{\nu}_m$ は互いに独立、 $N(\text{AVE}, \text{SIG})$ は平均ベクトル AVE と分散行列 SIG を持つ多変量正規分布を表す。時点 m における瞬間固有振動数は、特性方程式(4)を満たす極 $\lambda = \bar{\lambda}$ を用いて式(5)として表される。

$$|\lambda^2 - \lambda \beta_{1,m} - \beta_{2,m}| = 0 \quad (4)$$

$$f_m = \frac{1}{2\pi\Delta t} \sqrt{\text{Re}\{\ln(\bar{\lambda})\}^2 + \text{Im}\{\ln(\bar{\lambda})\}^2} \quad (5)$$

また、時点 m における瞬間パワースペクトル $PS_{f,m}$ は走行列車の外力特性が分離された橋りょうのみのパワースペクトルとして式(6)で表される。

$$PS_{f,m} = \frac{\sigma_\epsilon^2}{|1 - \beta_{1,m} \exp(-2\pi if) - \beta_{2,m} \exp(-2\pi if)|^2} \quad (6)$$

$$(-1/(2\Delta t) \leq f \leq 1/(2\Delta t))$$

TV-ARX モデルを階層ベイズ推計した Bayesian TV-ARX 法では、未知パラメータに対して、多変量正規分布を設定し、条件付き事後分布を解析的に計算している。これ

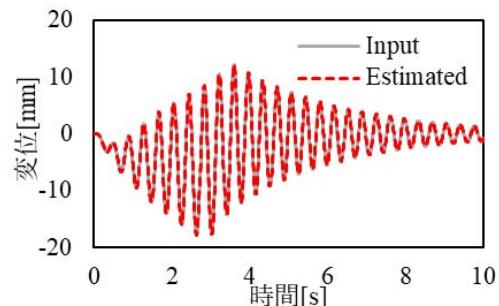


図-3 変位の入力および推計結果 (TV-ARX)

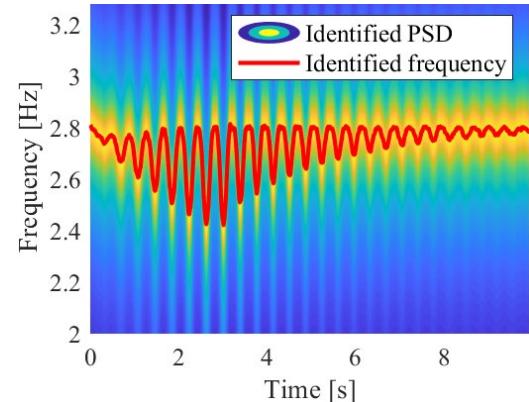


図-4 時間-周波数特性 (TV-ARX)

らの条件付き事後分布の計算には分散の独立性を利用した効率的なサンプリング手法である DK スムーザ^{8, 10, 11)}が利用されている。Bayesian TV-ARX 法では列車通過時の外力の加振特性を除外したうえで時間的に変動する固有振動数の推移を精度よく推計できる。これは式(6)に示すように、外生成分項を分離した系の時間一周波数特性を推計できるためである。

図-3 と図-4 にシミュレーション波形への Bayesian TV-ARX 法の適用例を示す。シミュレーション波形の作成手法は 4. にて詳しく説明する。図-3 は入力変位に対して推計された変位応答を表し、当然ではあるが、入力として用いた変位と推計された変位が一致する。図-4 に示す時間一周波数特性の推定結果は、振幅に依存して瞬間に固有振動数が低下する挙動を確認できる。このように高精度な推計を実現した一方、ひび割れによる効果と車両との相互作用による効果を分離できないという課題があった。また、時変 AR 係数 $\boldsymbol{\beta}$ の推計にはランダムウォークを仮定しており、DK スムーザの導入によって計算時間自体は短縮されたものの、未だに多大な計算負荷を有している。ただし、文献 6)および 7)における結果から、ひび割れによる効果は下側変位振幅に依存すること、VBI 効果はモード外力の二乗に依存すること、が明らかにされている。そこで、本研究ではこれらの既存の知見を TV-ARX モデルにおける AR 係数のモデリングに直接組み込むことにより、計算負荷の高い時変 AR 係数の推定を回避しつつ、ひび割れによる効果と VBI 効果を分離して同定することを試みた。

(2) TVF-ARX モデルの定式化

図-5 に TVF-ARX モデル全体における非線形現象の概念図を示す。本研究ではこれまでランダムウォーク過程としてモデル化されていた AR 係数の時間的変動を、ひびわれ開閉の影響を表す振幅依存項およびVBI効果を表す相互作用依存項の線形結合を含む時間関数としてモデル化した。また、下側変位発生時にのみ生じるひび割れ開口に伴った固有振動数の変動挙動を表すため、下側変位時に 1, それ以外は 0 を取るダミー変数 δ_m を導入した。橋りょう支間中央変位 z_m は TVF-ARX モデルにより式(7)および(8)として定式化される。

$$z_m = \mathbf{A}_m \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{Z}_m \boldsymbol{\beta}_m + \epsilon_m \quad (7)$$

$$\boldsymbol{\beta}_m = \mathbf{c} + \boldsymbol{\eta} z_{m-1} \delta_m + \boldsymbol{\gamma} \mathbf{A}_m^2 + \boldsymbol{\nu}_m \quad (8)$$

$$(m = 1, \dots, M - 1)$$

$$\boldsymbol{\eta} = [\eta_1, \eta_2] \quad (9a)$$

$$\boldsymbol{\gamma} = [\gamma_1, \gamma_2] \quad (9b)$$

$$\delta_m = \begin{cases} 0 & (z_m > 0) \\ 1 & (z_m \leq 0) \end{cases} \quad (9c)$$

$$\epsilon_m \sim N(0, \sigma_\epsilon^2) \quad (9d)$$

$$\boldsymbol{\nu}_m \sim N(0, \boldsymbol{\Sigma}_\nu) \quad (9e)$$

ここで、 $m = 1, \dots, M$ は離散時点、 z_m は時点 m における橋りょう変位応答、 $\mathbf{Z}_m = [z_{m-1}, z_{m-2}]$ 、 $\boldsymbol{\beta}_m = [\beta_{1,m}, \beta_{2,m}]^T$ は自己相関を表す AR 係数、 $\mathbf{A}_m \boldsymbol{\alpha}$ は外生変数項、 ϵ_m は観測誤差、 $\boldsymbol{\nu}_m$ はシステム誤差であり、平均 0、分散 σ_ϵ^2 と $\boldsymbol{\Sigma}_\nu$ に従う互いに独立な正規分布である。 \mathbf{c} は定数項ベクトル、 $\boldsymbol{\eta}$ は振幅依存項の係数ベクトル、 $\boldsymbol{\gamma}$ は相互作用依存項の係数ベクトルを表す。 \mathbf{A}_m として考慮されるモード外力は静止輪重のみを考慮した。

推計手順を以下に示す。式(7)および(8)は未知パラメータが階層化された階層ベイズモデルであるが、未知パラメータ $\boldsymbol{\beta}_m$ を一旦ある値 $\tilde{\boldsymbol{\beta}}_m$ に固定（完備化）することで、MCMC (Markov chain Monte Carlo method) 法の一つであるギブスサンプリングにより順次未知パラメータをサンプリングできる。すなわち完備化された $\tilde{\boldsymbol{\beta}}_m$ を式(7)に

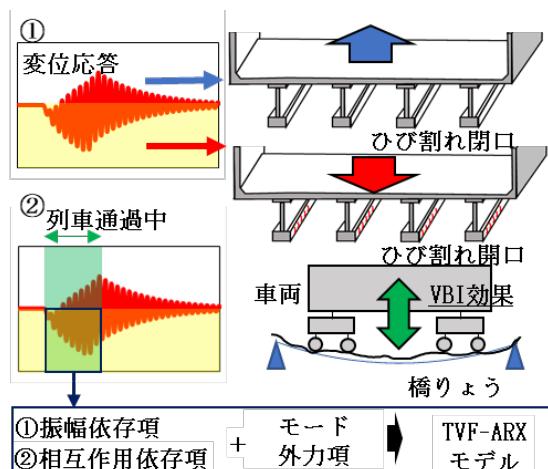


図-5 TVF-ARX モデルの概要図

用いれば、式(7)は $z_m - \mathbf{Z}_m \boldsymbol{\beta}_m$ に対するモード外力 \mathbf{A}_m の線形回帰式となるため、未知パラメータ $\boldsymbol{\theta} = [\sigma_\epsilon, \boldsymbol{\Sigma}_\nu, \boldsymbol{\alpha}]$ の条件付き事後分布を解析的に導出できる。

階層化された式(8)についてもパラメータ $\boldsymbol{\beta}_m$ がある値 $\tilde{\boldsymbol{\beta}}_m$ を持つ（すなわち、完備化された）とき、 $\tilde{\boldsymbol{\beta}}_m$ を模擬的な観測値、 $\mathbf{X}_m = [z_{m-1} \ A_m^2]^T$ を説明変数とした線形回帰式に帰着する。この回帰式の未知パラメータは定数項 \mathbf{c} と係数ベクトル $\boldsymbol{\eta}$ および $\boldsymbol{\gamma}$ 、そして誤差項 $\boldsymbol{\nu}_m$ の分散 $\boldsymbol{\Sigma}_\nu$ である。ここで、誤差項 $\boldsymbol{\nu}_m$ の分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}_\nu$ の非対角項が 0（すなわち、 $\beta_{1,m}$ と $\beta_{2,m}$ が $m = 1, \dots, M$ について互いに独立）であると仮定すれば、式(8)は $\beta_{1,m}$ と $\beta_{2,m}$ に関する 2 つの独立した回帰式となる。ここで、本研究の目的である振幅依存項と相互作用項の係数 $\boldsymbol{\eta}$ および $\boldsymbol{\gamma}$ をベイズ線形回帰により不確実性を考慮して推計する。上述の通り、式(8)は $\beta_{1,m}$ と $\beta_{2,m}$ に関して独立であるため、各式に対応した振幅依存項と相互作用項の係数を重みパラメータ $\mathbf{w}_1 = [\eta_1, \gamma_1]$ および $\mathbf{w}_2 = [\eta_2, \gamma_2]$ と定義する。重みパラメータ \mathbf{w}_1 および \mathbf{w}_2 の事前分布 $p(\mathbf{w}_1)$ および $p(\mathbf{w}_2)$ に式(10)、式(11)の平均 0、共分散 $\sigma_1^2 \mathbf{I}$ 、 $\sigma_2^2 \mathbf{I}$ からなる事前分布を設定すれば、よく知られるように分布の共役性により事後分布を解析的に導出できる。

$$p(\mathbf{w}_1) = N(\mathbf{w}_1 | 0, \sigma_1^2 \mathbf{I}) \quad (10)$$

$$p(\mathbf{w}_2) = N(\mathbf{w}_2 | 0, \sigma_2^2 \mathbf{I}) \quad (11)$$

$\tilde{\boldsymbol{\beta}} = [\tilde{\boldsymbol{\beta}}_1, \tilde{\boldsymbol{\beta}}_2, \dots, \tilde{\boldsymbol{\beta}}_m]^T$ 、 $\mathbf{X} = [\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_m]^T$ とすれば、事後分布 $p(\mathbf{w} | \tilde{\boldsymbol{\beta}}, \mathbf{X})$ は、式(12)となる。

$$p(\mathbf{w} | \tilde{\boldsymbol{\beta}}, \mathbf{X}) = N(\mathbf{w} | \hat{\xi}, \hat{\boldsymbol{\Sigma}}) \quad (12)$$

この時、 $\tilde{\boldsymbol{\beta}}_m$ ($m = 1, \dots, M$) の分散を σ_y^2 とすれば、 $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1}$ と $\hat{\xi}$ は式(13)と式(14)となる。なお、 $\phi(\mathbf{A})$ はベクトル \mathbf{A} のうち対応する要素ごとの演算処理を、 $\boldsymbol{\Sigma}_w$ は対角成分に $\sigma_1^2 \mathbf{I}$ および $\sigma_2^2 \mathbf{I}$ を有する分散共分散行列を表す。

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}}^{-1} = \sigma_y^{-2} \sum_{m=2}^M \phi(\mathbf{X}) \phi(\mathbf{X})^T + \boldsymbol{\Sigma}_w^{-2} \mathbf{I} \quad (13)$$

$$\hat{\xi} = \hat{\boldsymbol{\Sigma}} \sigma_y^{-2} \sum_{m=1}^{M-1} \tilde{\boldsymbol{\beta}} \phi(\mathbf{X}) \quad (14)$$

以上より重みパラメータ \mathbf{w} を介して推計された係数 $\boldsymbol{\eta}$ および $\boldsymbol{\gamma}$ の期待値、および代数的に導出される定数項 \mathbf{c} の推計値を式(8)に代入することで、完備化されていた $\tilde{\boldsymbol{\beta}}_m$ を更新できる。更新された $\tilde{\boldsymbol{\beta}}_m$ を用いることで、次回ステップの未知パラメータ $\boldsymbol{\theta} = [\sigma_\epsilon, \boldsymbol{\Sigma}_\nu, \boldsymbol{\alpha}]$ のサンプリングを行うことができる。上記の処理は $\boldsymbol{\beta}_m$ の事前分布（式(8)）のパラメータがさらに事前分布を有する階層ベイズモデルであり、上記の推計手順により確率的な詳細釣り合い条件を満たすため、十分な数のサンプリングにより事後分布へ収束することが理論的に保証される。また、本モデルの結果として特に重要な振幅依存項

と相互作用項の係数 η および γ にベイズ推計を導入したことで、これらの最尤推定値に加えて不確実性も評価可能となる。

なお、TVF-ARX モデルにおいても時点 m における瞬間固有振動数および瞬間パワースペクトル $PS_{f,m}$ は式(5)および(6)と同様に算出できる。

TVF-ARX モデルの推計アルゴリズムは Matlab R2021b 上に実装した。以下ではシミュレーションモデルで作成したいいくつかの波形に対して TVF-ARX モデルの推計を行なうが、入力波形データは 0.01 秒刻みの 10 秒間の波形データに統一した。また、MCMC 法における繰り返しサンプリングでは、定常分布への収束までのサンプリング（バーンイン）を 1000 回とし、その後の 3000 回のサンプルを事後分布からのサンプルとして記録した。また、事前分布のパラメータは、 $\sigma_\epsilon^2 = 0.01$ 、 $\Sigma_v = 0.001E$ 、 $\sigma_1^2 = 0.01$ 、 $\sigma_2^2 = 0.001$ とした。なお、 E は単位行列である。事前分布は、基本的に期待値に対して分散を大きく設定し、無情報事前分布に近い設定とした。1 波形あたりに推計（4000 回のサンプリング）に要する計算時間はワークステーション環境（Core i9-9900K, 3.60GHz, 実装メモリ 128GB, 64 ビット OS）において 8~10 秒であった。既存の Bayesian TV-ARX 法は同様のワークステーション環境における 1 波形あたりの推計に要する計算時間が 28~32 秒であったことから、時変 AR 係数の時間関数化により、3 倍程度の推計速度の高速化が達成された。TVF-ARX モデルによる推計精度に関しては次章で数値シミュレーションにより検証を行なった。

4. シミュレーションによる精度検証

(1) 波形の作成方法

列車通過時の変位応答は、走行列車と桁の動的相互作用を考慮したモデルである 2 次元 VBI モデル^{5,6}と桁上に移動荷重を載荷したモデルである ML モデルを用いて作成した。VBI モデルは、車両を質点・ばね・ダンパーから構成される 6 自由度とし、橋りょうを曲げ 1 次モードの 1 自由度でモデル化したものである。本研究では、梁の 1 次曲げモードのモード剛性が変位振幅により変化する非線形性⁹を考慮したシミュレーションを実施した。このモデリングは、ひび割れを有するコンクリート橋の挙動を詳細に表現できるわけではないが、共振時の実際の変位波形をおおむね再現することができるため⁹、提案手法の精度を検証する目的であれば十分に効果があると考えられる。本研究では、橋りょうの剛性に関して、上方変位時には線形、下方変位時にのみ変位に依存した剛性の低下を仮定した。本研究では、既往研究^{7,9}を参考に下側振幅 1mm あたり、1 次モードのモード剛性を

0.014kN/m 低下する（本解析では最大変位 18mm 時に 2.8Hz が 2.45Hz まで低下する）設定とした。なお、列車速度は共振速度に近い 235km/h とした。線形時の条件として、橋りょうの固有振動数 2.8Hz、モード減衰比 2%，支間長 29.2m、単位長質量 22.2t/m、車両の軸重 130kN、車両数 8 両、車両長 25m とし、得られた橋りょう支間中央変位波形とモード外力を TVF-ARX モデルに入力し固有振動数の変動および各項のパラメータの事後分布を推定した。

(2) 検証結果

ここでは、ひび割れを有する VBI モデル（VBI-crack）、ひび割れのない VBI モデル（VBI-no-crack）およびひび割れを有する ML モデル（ML-crack）で生成した波形への適用結果について述べる。

図-6 にひび割れを有するケース（VBI-crack）の入力変位波形（黒線）および推定変位応答（赤点線），図-7 に VBI-crack ケースにおける瞬間固有振動数およびパワース

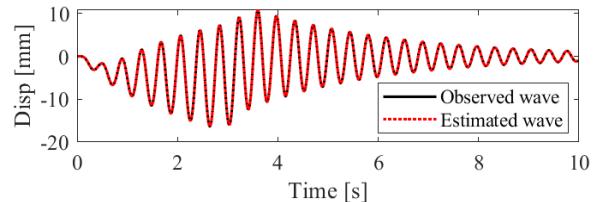


図-6 入力変位応答と推定変位応答

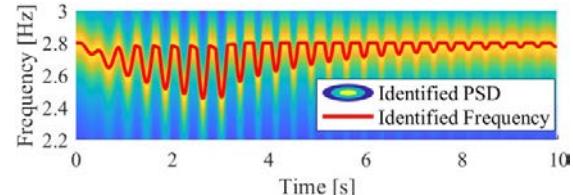


図-7 瞬間固有振動数推定結果

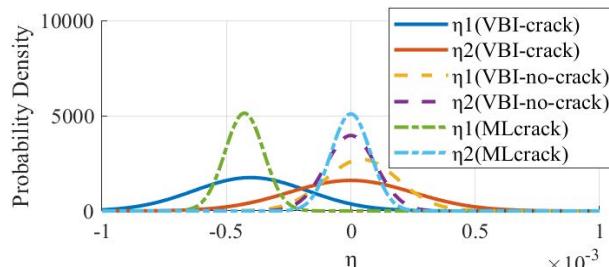


図-8 振幅依存項 η の推定事後分布推定結果

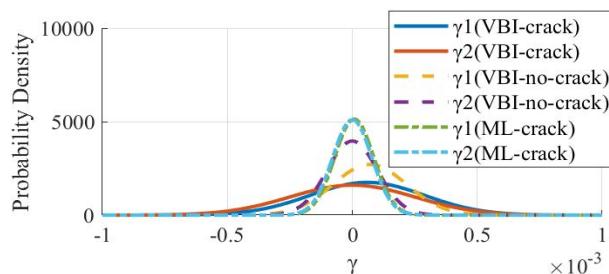


図-9 相互作用依存項 γ の事後分布推定結果

ペクトルの推定値, 図-8, 図-9 に各解析ケースで推定された振幅依存項 η と相互作用依存項 γ の事後分布を示す。

図-6 および図-7 より, 当然ながら推定された TVF-ARX モデルの変位波形はシミュレーションにより作成した変位波形と一致するとともに, 下側変位振幅に依存して瞬間に固有振動数が低下する挙動を推計できることを確認できる. また, 図-7 ではシミュレーションでの設定通り, 列車通過時に 2.4Hz 付近まで固有振動数が瞬間に低下する. 図-8 はひび割れ依存項の係数 η の事後分布を示す. 相互作用の有無に依らず, ひび割れがある場合に 0 を中心に分布した η_1 の事後分布は, ひび割れがある場合に負側にシフトする. なお, η_2 はひび割れの有無に依らずすべて 0 を中心に分布した. 図-9 は相互作用項の係数 γ の事後分布を示す. 相互作用を考慮した VBI-crack と VBI-no-crack では相互作用依存項 γ_1 が正に分

布するが, ML-crack では 0 を中心に分布する. これらの適用結果より, 本研究で提案する TVF-ARX モデルでは, 固有振動数の変動に占めるひび割れによる振幅依存効果と相互作用効果を各項の事後分布として分離可能であることがわかる.

(3) 剛性低下量の評価

実際の高速鉄道橋では, 対象とする橋りょうの種類や時期によりひび割れ量は異なるとともに, どの程度の剛性低下から検知可能であるかが重要となる. そこで, ここでは, 1 次モードのモード剛性の低下量を変化させた複数のシミュレーションを実施し, これらの波形を入力として時変固有振動数の推計を行ったを複数ケース作成した. 前節で用いた VBI-crack ケースは, ひび割れによる剛性低下量を下側振幅 1mm あたり, 0.014kN/m 低下

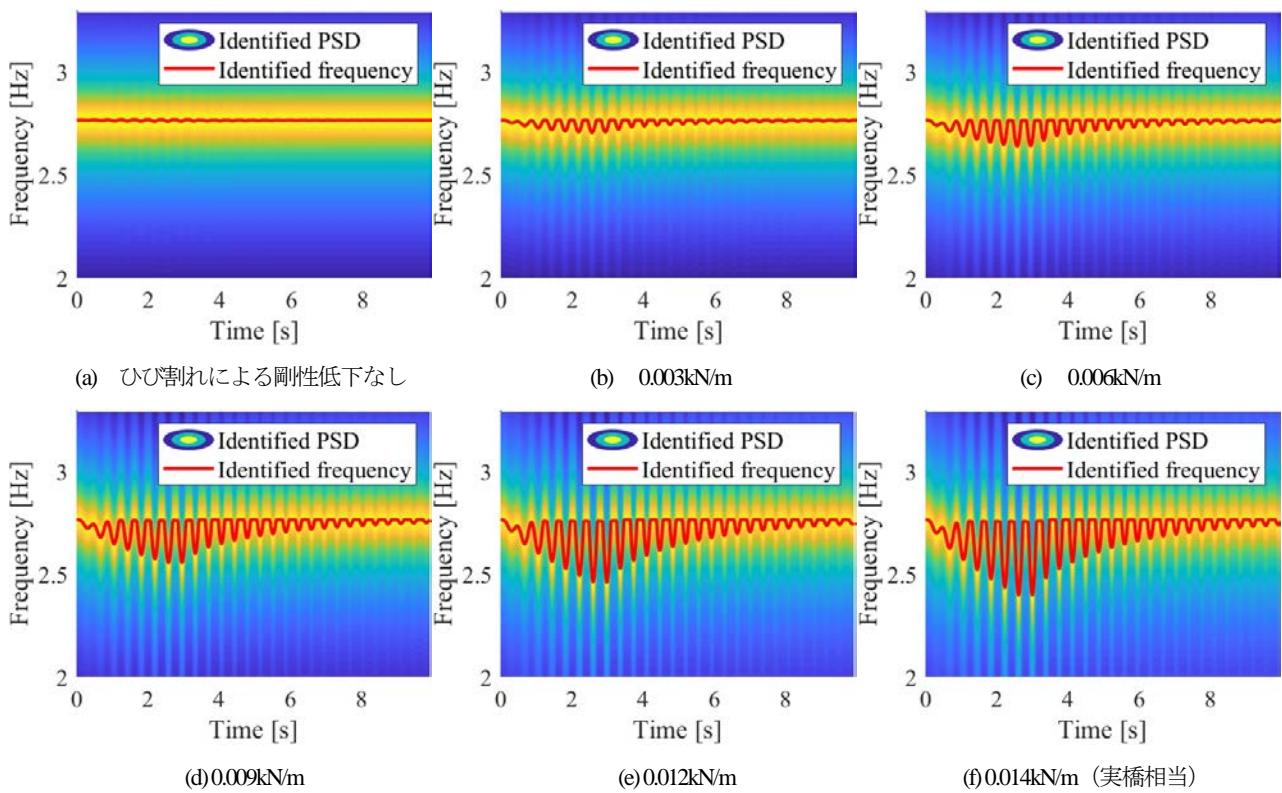


図-10 剛性低下量の異なる場合の瞬間固有振動数の推定結果

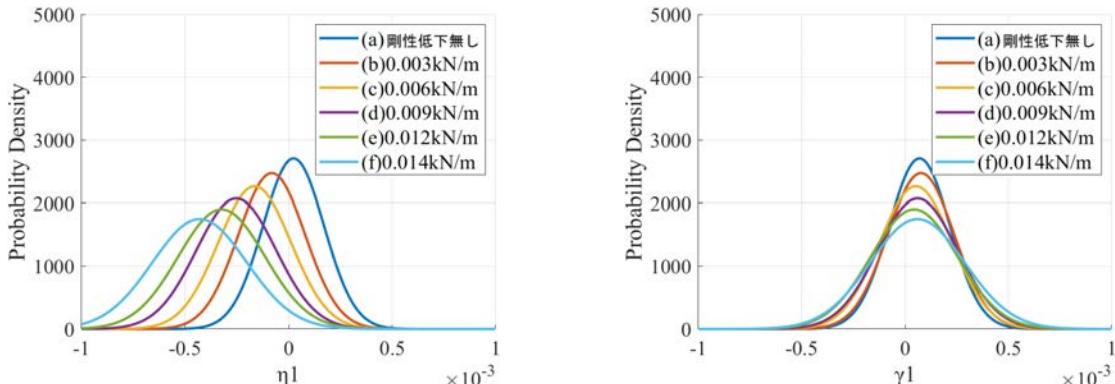


図-11 振幅依存項 η_1 の事後分布と相互作用依存項 γ_1 の事後分布の推計結果

すると設定した。加えて、剛性低下量を 0.012kN/m, 0.009kN/m, 0.006kN/m, 0.003kN/m, 0.00kN/m (VBI-no-crack) と変化させた計 6 種類のシミュレーションモデルに対して TVF-ARX のパラメータを推計した。なお、列車速度はすべて 235km/h である。

図-10 はひび割れによる剛性低下量を段階的に変化させた際の瞬間固有振動数の推計結果である。まず、(a)では設定した固有振動数 2.8Hz 付近を変動せずに推移する推計結果が得られており、ひび割れが無い場合も提案手法によりひび割れが無いことを評価できることがわかる。桁剛性の低下量を段階的に変化させた(b)から(f)までの各ケースについては、桁剛性低下量の変化とともに、固有振動数の低下量が段階的に大きくなる傾向が確認できる。したがって、実橋りょう相当 (0.014kN/m) の約 1/4~1/5 程度の剛性低下であっても高精度に評価できる。

図-11 は各ケースにおける振幅依存項と相互作用依存項の事後分布を示す。図-11 左は振幅依存項 η_1 の推計結果である。前節のケース(a)とケース(f)の比較では、ひび割れによる剛性低下がある場合に振幅依存項 η_1 が負側にシフトする傾向が確認された。剛性低下率を変化させた(b)から(e)までの 4 ケースは(a)と(f)の 2 つのケースの間を埋めるように段階的に期待値が負側へシフトすることを確認できる。よって、振幅依存項 η_1 の事後分布 (の期待値) からひび割れによる剛性低下の程度を予測できる可能性がある。特に提案手法ではベイズ推計を用いたため推計結果が事後分布として得られる。したがって、事後分布の統計的な仮説検定や分布間の距離を指標に用いることで剛性低下の有無の自動的判定を実現できる可能性がある。この点については今後検討を進めることとしたい。

最後に、図-11 右は相互作用依存項 γ_1 の事後分布の推計結果を示す。前節で述べたように相互作用依存項 γ_1 は VBI 効果を反映する。今回はコンクリート桁を対象としたため、車両との質量比が大きく影響する VBI 効果による固有振動数の変動はわずかであるが、(a)から(f)までのすべてのケースにおいて期待値が正側へわずかにシフトしていることが確認できる。

これらの結果より、数値解析での限られた検証ではあるが、桁の剛性低下量に依らず固有振動数の瞬間的な低下挙動が推計可能であることに加え、振幅依存項 η_1 の事後分布がひび割れによる剛性低下量を反映することが確認された。

5.まとめ

既往研究で提案された TV-ARX モデルとその階層ベイズ推計からなる Bayesian TV-ARX 法では、固有振動数の

瞬間的な低下を評価できるものの、ひび割れに基づく振幅依存効果と車両との相互作用による相互作用依存効果を分離できないという課題があった。本研究ではこれを改良するために、AR 係数の時間的な変動を関数として定式化した TVF-ARX モデルを提案し、それを実装することによって、以下の成果を得た。

- ・ 時変 AR 係数に振幅依存項と相互作用項の線形結合式を導入した Bayesian TVF-ARX 法を実装し、推計速度の高速化に加え、既存手法と同様に瞬間的な固有振動数の低下を推計できることを示した。
- ・ VBI モデルと ML モデルの両者で作成したシミュレーション波形に本手法を適用した結果、ひび割れによる剛性低下は振幅依存項 η_1 の事後分布が負側にシフトする一方、VBI 効果による相互作用依存項 γ_1 は正側にシフトする結果が得られた。
- ・ 剛性低下量を段階的に変化させたシミュレーション波形に本手法を適用した結果、剛性低下量が大きい波形ほど、推計された振幅依存項 η_1 の事後分布が負側にシフトする傾向が見られた。

本研究で残された課題を以下に示す。まず、振幅依存項の事後分布から、ひび割れによる剛性低下の有無や剛性低下量を自動的に判定する手法については追加の検討が必要である。また、静的変位が支配的な場合は、振幅依存項と相互作用依存項が判別できなくなる可能性があるため、列車速度の影響 (特に低速走行の場合) についてより詳細に検討する必要がある。さらに、実際の橋梁では軌道変位や計測ノイズが計測応答に含まれることが予想されるため、これらを考慮した VBI シミュレーション波形への適用性についても追加で検討する必要がある。これらに加え、今後、実測波形への適用を通じて実務的な適用性および有効性についても検証を進めていく予定である。

REFERENCES

- 1) 真鍋英規, 川谷泰山, 玉越隆史, 石尾真理, 春田健作 : PC 梁部材におけるひび割れ性状に及ぼす繰返し載荷の影響に関する研究, コンクリート構造物の補修, 補強, アップグレード論文報告集, Vol. 9, pp. 417-424, 2009. [Manabe, H. Kawatani, T. Tamakoshi, T. Ishio, M. and Haruta, K. : Study on Cracks Properties of Prestressed Concrete Beams Under Cyclic Load, *Journal of JSMS on Concrete Structure Scenarios*, Vol.9, pp.417-424, 2009.]
- 2) 藤江幸人, 井口重信, 松田芳範, 小林薰 : 新幹線走行に伴う PRC 単純桁の振動について, コンクリート工学年次論文集, Vol.30, No.3, pp.1081-1086, 2008. [Fujie, Y. Iguchi, N. Matsuda, Y. Kobayashi, K. : Vibration of PRC simple girder caused by running of Shinkansen, *Proceedings of the Japan Concrete Institute*, Vol.30, No.3, pp.1081-1086, 2008.]
- 3) 中須賀淳貴, 水谷司, 山本悠人, 内田雅人, 蘇迪, 長山

- 智則, 藤野陽三: 新幹線高架橋 PRC 枠の大振幅振動メカニズムの解明と構造特性の長期トレンドの分析, 構造工学論文集, Vol. 62A, pp. 42-49, 2016. [Nakasuka, J. Mizutani, T. Yamamoto, Y. Uchida, M. Su, D. Naganaya, T. Fujino, Y.: Analysis of large amplitude vibration mechanism of Shinkansen PRC girder bridges and the long-term trend of their structural characteristics, *Journal of structural engineering*, Vol. 62A, pp. 42-49, 2016.]
- 4) 後藤恵一, 大澤章吾, 上半文昭, 築島大輔, 箕浦慎太郎: 共振の発生した鉄道PRC桁の補強対策, 補修, 補強, アップグレード論文報告集, Vol. 17, pp. 551- 556, 2017. [Gotou, K. Oosawa, S. Uehan, F. Tukushima, D. Minoura, S. : Reinforcement measures for railroad PRC girders with resonance, *Journal of JSMS on Concrete Structure Scenarios*, Vol. 17, pp. 551-556, 2017.]
- 5) 松岡弘大, 徳永宗正, 築島大輔, 後藤恵一: 共振PRC桁の支点補強追加時における動的応答評価, コンクリート工学年次論文集, Vol.41, No.2, pp.1219-1214, 2019. [Matsuoka, K. Tokunaga, M. Tukushima, D. Gotou, K. : Evaluation of Dynamic Response of Resonant PRC Girders with Additional Fulcrum Reinforcement, *Proceedings of the Japan Concrete Institute*, Vol. 41, No.2, pp. 1219-1214, 2019.]
- 6) Matsuoka, K., Kaito, K. and Sogabe, M.: Bayesian time- frequency analysis of the vehicle-bridge dynamic interaction effect on simple-supported resonant railway bridges, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. 135, No. 106373, 2020.
- 7) Matsuoka, K., Tokunaga, M. and Kaito, K.: Bayesian estimation of instantaneous frequency reduction on cracked concrete railway bridges under high-speed train passage, *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol 161, No.107944, 2021.
- 8) 竹本靖: プレストレスト鉄筋コンクリート (PRC) 建築の設計法, コンクリート工学論文集, Vol.19, No.7, pp. 66-71, 1981. [Takemoto, Y. : Design Methods for Prestressed Reinforced Concrete (PRC) Buildings, *Proceedings of the Japan Concrete Institute*, Vol.19, No.7, pp. 66-71, 1981.]
- 9) 松岡弘大, 徳永宗正, 貝戸清之: Bayesian TV-ARX モデルによる走行列車荷重下のひび割れ開閉に伴う桁剛性変動評価, 土木学会論文集 A2, Vol.76, No.2, pp.I_3-I_14, 2020. [Matsuoka, K. Tokunaga, M. Kaito, K. Evaluation of girder stiffness fluctuation due to crack breathing under train passages using Bayesian TV-ARX model, *Proceedings of Japan Society of Civil Engineers A2*, Vol. 76, No. 2, pp. I_3 - I_14, 2020.]
- 10) Frühwirth - Schnatter, S.: Data augmentation and dynamic linear models, *Journal of Time Series Analysis*, Vol. 15, No.2, pp. 183-202, 1994.
- 11) Carter, C. K. and Kohn, R.: On Gibbs sampling for statespace models, *Biometrika*, Vol. 81, No. 3, pp. 541-553, 1994.

(Received March 31, 2023)

(Accepted June 9, 2023)

IDENTIFICATION METHOD OF TIME-VARYING FREQUENCY FOR RAILWAY CONCRETE BRIDGES UNDER TRAIN PASSAGE

Naohiro IDA, Kodai MATSUOKA and Kiyoyuki KAITO

Bayesian TV-ARX method has been proposed as a time-frequency analysis method to identify the time-varying bridge frequency based on the measured displacement response during train passing; however, it was not possible to separate the crack opening effect and the train-bridge interaction effects, which both affect the bridge frequency reduction. In this study, TVF-ARX model is formulated by introducing an amplitude-dependent term and an interaction-dependent term into the system equation of the TV-ARX model, which has been modeled as a random walk process. The method was applied to several numerical calculated bridge displacement under resonance situation, and it was confirmed that not only can the instantaneous decrease in bridge frequency be estimated with high accuracy, but also the two effects can be separated.