

論文 パッド減衰が軌道分散特性に及ぼす影響

阿部 和久¹・袴田 翔太²・紅露 一寛³

¹正会員 新潟大学教授 工学部社会基盤工学プログラム (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地)
E-mail: abe@eng.niigata-u.ac.jp (Corresponding Author)

²学生員 新潟大学大学院自然科学研究科 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地)

³正会員 新潟大学教授 工学部社会基盤工学プログラム (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地)
E-mail: kouro@eng.niigata-u.ac.jp

軌道パッドとまくらぎ下パッドの減衰が軌道の分散特性に及ぼす影響について検討した。具体的には、複素 Floquet 波数平面と周波数とで構成される 3 次元空間内で分散曲線を求め、減衰の導入により分布性状が大きく変化するモードについて調べた。また、パッド類の減衰を周波数に依存しない一定値の loss factor で与えた場合と、Voigt モデルで表現した場合とを対象に、減衰モデルの違いが分散特性に及ぼす影響についても検討した。

Key Words: *periodic track, dispersion analysis, damping mode, complex wavenumber, Block S-S*

1. はじめに

軌道系の振動応答の理解は、軌道破壊や振動の低減策、状態推定に基づく軌道管理などを講ずる上で有用となる。そのためには、軌道に沿って伝播する波動モードの分散特性を把握することが重要である。分散曲線は、物体内を伝播する波動モードが存在する波数と周波数との関係を与える点の集合により構成される。まくらぎにより等間隔に離散支持されたロングレールは、無限周期構造としてモデル化することができる。この様な周期構造における分散曲線が有する特徴として、如何なる波動も伝播し得ない周波数帯が無数に存在することが挙げられる¹⁾。当該の周波数帯をストップバンド、逆に波動モードが存在する周波数帯をパスバンドと呼ぶ。パスバンド内の伝播波動モードは、加振力などによって外部からエネルギーを入力しなくても、減衰することなく無限遠まで伝播するモードとして定義できる。したがって、当該モードを求める通常の分散解析では無減衰系が対象となる。

軌道構造における共振周波数や、走行車輪との連成下で励起され易い波動などの動的な基本特性を把握する上で、分散曲線は不可欠と言ってもよい。そのため、国外の研究者により、軌道系の様な 1 次元周期構造のモデル化と、それに基づいた分散解析事例が多数報告されている。Mead²⁾ は、剛な離散支持点に回転バネが設けられた無限長 Euler ばりを対象に、動的三連モーメント式に基づいた伝播モードの固有方程式を導出し、分散解析を行っている。その結果に基づき、走行荷重と卓越周波

数との関係について議論している。また Tassilly³⁾ は、質量・曲げ剛性・支持剛性等が周期変動する Winkler ばりを対象に、周期構造を構成する 1 ユニット両端点間に関する伝達行列を導出し、その固有値問題から分散曲線を求めている。

これらの論文では、周期的なはり構造を検討対象としてはいるが、必ずしも軌道構造に限定したものとはなっていない。レールの分散解析を目的としたものとしては、Thompson⁴⁾ の研究が挙げられる。当該論文では有限要素法を用いた解法を構成している。離散支持条件とはなっていないものの、レール断面をはりと板要素で表現し、断面変形も考慮している。その結果、1500 Hz 以上の周波数域ではレールの断面変形が顕著となるため、当該周波数が通常のはりモデルの適用限界となること等が示されている。軌道を離散支持構造としてモデル化した分散解析例は、Hosking ら⁵⁾ によって示されている。当該論文では伝達行列に関する固有値問題に基づいた分散解析が行われ、具体例として縦まくらぎ軌道を対象とした検討結果が示されている。なお、1964 年から 1995 年までの間に Southampton 大学を中心に行われた、はりや板、円筒シェル等の周期構造の分散解析に関する研究について、Mead⁶⁾ により詳細なレビューが行われている。

文献 4) を除く上述の論文では、断面の変形効果を見逃した Euler ばりモデルが用いられている。なお、Euler ばりでは、せん断たわみが考慮されていない。そのため、高周波数域における波動モードでは、たわみ波長のレール断面高さに対する比率が比較的小さくなり、その

結果せん断たわみの影響が無視し得なくなると考えられる⁷⁾. そこで, 著者らの研究グループ⁸⁾では, レールを Timoshenko ばりモデルで表現し, せん断たわみ成分を考慮したはり要素により離散化し, 50kgN レールを対象に分散解析を行った. その結果, 500 Hz 以上の周波数域の分散曲線において, Euler ばりと Timoshenko ばりとの差異が顕著になることがわかった. さらに, 軌道の分散曲線は2種類に分類でき, 最低周波数域に位置するパスバンド内のモードではまくらぎが大きく振動し, それより上のパスバンド域の分散曲線ではレール内を伝播する波動モードが支配的となることを確認した. また, 文献9)では, レール振動として鉛直たわみに加え, 水平たわみや振り成分も考慮した3次元 Timoshenko ばりモデルを用い, レール軸力が分散特性に及ぼす影響について調べた.

周期構造の分散曲線における波数は, 当該構造の周期性を規定する最小単位(ユニットセル)両端における波動モードの位相差と関係づけられる. この位相差のことを伝播定数(propagation constant)と呼び, それを周期長 L で除したものを Floquet 波数³⁾と呼ぶ. 分散曲線は, Floquet 波数と周波数で与えられる空間内で定義される. 無減衰系の伝播波動モードを与える分散曲線の Floquet 波数は実数値をとる. なお, 本来分散曲線には, Floquet 波数が複素数値をとるものも存在する. 当該モードはストップバンド内に分布し, その振幅は距離と共に指数関数的に減衰する. 既往の研究の多くでは, このモードについても言及がなされている.

過去に行われた分散解析では無減衰系を対象としているものがほとんどである. しかし, 実際の軌道系には減衰が存在するため, 減衰を有する軌道系の分散解析も有用と考えられる. なお, この場合, 無限遠まで伝播するモードは消滅し, 分散曲線が有する Floquet 波数は一般に複素数で与えられることとなる. 連続支持モデルを対象に軌道パッドと道床に減衰を設定した下での分散解析が, Wu と Thompson¹⁰⁾により試みられている. しかし, 本論文で示す様に, 減衰下の分散曲線は複雑な構造を有し, 全ての分散曲線を探索することは容易でなく, 既往の研究では詳細な検討はなされていない.

そこで本研究では, 軌道パッドとまくらぎ下パッドに減衰を設定し, その下での分散解析を試みる. その際に, 軌道の自由振動解を Fourier 級数展開で与え, それより波動モードに関する固有方程式を導出する. なお前述のとおり, 各周波数における固有 Floquet 波数は複素数値をとり, 加えてその固有方程式は Floquet 波数に関する陰的な非線形方程式として与えられる. この複素固有値を効率的に求めるために, 非線形固有値問題に対する数値解法である Block S-S 法¹¹⁾に準ずる

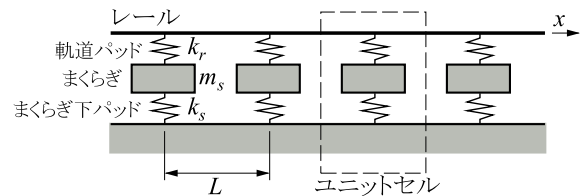


図-1 軌道モデル

計算法¹²⁾を用いる. これにより, 所定の領域内の分散曲線を全て探索することが可能となる. 求められた分散曲線は, 複素波数平面と周波数とで構成される3次元空間中の点集合として与えられる. その結果に基づき, パッド類の減衰が分散曲線の分布性状やモード減衰に及ぼす影響について調べ, 減衰し易いモードや, 逆にパッド減衰の影響を受けにくいモードなどについて考察する. また, 時間域解析で通常用いられる様な, 弾性バネとダンパーを並列した Voigt モデルでパッドを表現する場合と, 周波数に依存しない loss factor で表現する場合とについて, それらが分散曲線に及ぼす影響について比較検討する.

2. 波動モード条件式の導出

(1) 軌道モデル

本研究で対象とする軌道モデルを図-1に示す. ここでは分散解析が目的となるので, 円振動数 ω の下での自由振動問題について考える. 無限長レールは Timoshenko ばりモデルで与え, 鉛直たわみ振動を対象とする. まくらぎ間隔を L とし, レール1本に対応するまくらぎ1/2本を質量 m_s の質点で表す. 軌道パッドとまくらぎ下パッドについては, それぞれ複素剛性 k_r, k_s で与えるものとする. なお, 当該の軌道系は剛な基盤上に置かれているものとする.

(2) 軌道系の運動方程式

図-1に示した軌道モデルにおけるレール (Timoshenko ばり) の自由振動問題は, 円振動数 ω の下での運動方程式により与えられる.

$$GAK \left[\psi'(x) - u''(x) \right] - \rho A \omega^2 u(x) + k_e u(x) \delta_L(x) = 0,$$

$$GAK \left[\psi(x) - u'(x) \right] - \rho I \omega^2 \psi(x) - EI \psi''(x) = 0$$

(1)

ここで, u, ψ はレールたわみおよび断面回転角, x は図-1に示す様にとった軌道長手方向座標, $(\cdot)'$ は x に関する微分 ($d(\cdot)/dx$) である. また, G はせん断弾性係数, K はせん断係数, A はレール断面積, ρ は密度, I は断面二次モーメントである. $\delta_L(x)$ は, レール支持点 ($x = nL, n \in \mathbb{Z}$) に分布するデルタ関数列, k_e はまく

らぎ・パッド類より与えられる動的等価剛性であり, 式(1)第一式最後の項 $k_e u \delta_L$ はまくらぎ支持部からレールに作用する一連の反力を表している. なお, 動的等価剛性 k_e は次式で与えられる.

$$k_e = \frac{k_r(k_s - m_s \omega^2)}{k_r + k_s - m_s \omega^2} \quad (2)$$

円振動数 ω における周期軌道系の定常解に対して, 次の Floquet 原理⁶⁾ が成り立つ.

$$u(x+L) = e^{-i\kappa L} u(x), \quad \psi(x+L) = e^{-i\kappa L} \psi(x) \quad (3)$$

ここで, κ は Floquet 波数であり, その実数成分については式(3)に示すとおり $2\pi/L$ の周期性が成り立つ.

(3) 波動モードの固有方程式

式(1)の解が式(3)の関係を満たす様に, 本研究では u, ψ を次式により Fourier 級数で表現する.

$$\begin{aligned} u(x; \kappa) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n(\omega, \kappa) e^{-iz_n x}, \\ \psi(x; \kappa) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \psi_n(\omega, \kappa) e^{-iz_n x}, \end{aligned} \quad (4)$$

$$z_n := \frac{2n\pi}{L} + \kappa$$

ここで, u, ψ が Floquet 波数 κ をパラメータに持つことを明示するために, これらを $u(x; \kappa), \psi(x; \kappa)$ と表記している. また, u_n, ψ_n は Fourier 級数の展開係数である.

式(1)における $\delta_L(x)$ は周期長 L の周期関数であり, 次式により表すことができる.

$$\delta_L(x) = \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-i\frac{2n\pi}{L}x} = \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{i\frac{2n\pi}{L}x} \quad (5)$$

さらに, 式(3)の周期条件より, 本問題は図-1の様にまくらぎ一区間で与えられるユニットセル内に限定して議論することができる. 当該ユニットセルのまくらぎ支持位置を $x=0$ ととると, ユニットセル内に関しては $\delta_L(x) = 0$ ($x \neq 0$) が成り立つので, $\delta_L(x)$ は次式のように表すことができる.

$$\begin{aligned} \delta_L(x) &= e^{-i\kappa x} \times \delta_L(x) \\ &= \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-iz_n x} \end{aligned} \quad (6)$$

すると, 式(5), (6)より, 式(1)第1式における $u \delta_L$

の項は, 次式の様に簡約できる¹³⁾.

$$\begin{aligned} u(x; \kappa) \delta_L(x) &= \frac{1}{L} \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} u_n e^{-iz_n x} e^{i\frac{2m\pi}{L}x} \\ &= \frac{1}{L} \sum_{n,m=-\infty}^{\infty} u_n e^{-i[\frac{2\pi}{L}(n-m) + \kappa]x} \\ &= \frac{1}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} u_{n+m} \right) e^{-iz_n x} \quad (7) \\ &= Z \delta_L(x), \\ Z &:= \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n \end{aligned}$$

式(4), (7)を式(1)に代入すると, Fourier 係数について次の方程式を得る.

$$GAK(-iz_n \psi_n + z_n^2 u_n) - \rho A \omega^2 u_n + \frac{k_e}{L} Z = 0, \quad (8)$$

$$GAK(\psi_n + iz_n u_n) - \rho I \omega^2 \psi_n + EI z_n^2 \psi_n = 0$$

式(8)より ψ_n を消去して, u_n について解くと次式を得る.

$$\begin{aligned} u_n &= -\frac{k_e}{L} \cdot \frac{Z}{X_n}, \\ X_n &:= GAK z_n^2 - \rho A \omega^2 - \frac{(GAK z_n)^2}{GAK - \rho I \omega^2 + EI z_n^2} \end{aligned} \quad (9)$$

式(9)の右辺の Z は, 式(7)に示すとおり u_n の総和で与えられる. したがって, 式(9)は未だ u_n について求解が完了していない. そこで, 式(9)の両辺に対し, n についての総和をとる¹³⁾ と次の関係を得る.

$$\left(1 + \frac{k_e}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{X_n} \right) Z = 0 \quad (10)$$

式(7)に示したとおり, Z は u_n の総和により与えられている. すると, 式(4)より, さらに次の関係が成り立つ.

$$Z = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_n = u(0; \kappa) \quad (11)$$

一般に, まくらぎ支持点においてもレールたわみはゼロとはならないので, $u(0; \kappa) = Z \neq 0$ である. したがって, 式(10)より次式を得る.

$$f(\kappa, \omega) := 1 + \frac{k_e}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{X_n} = 0 \quad (12)$$

式(12)が, 軌道内を伝播する波動モードの存在条件である. よって, 当該条件をみたく (κ, ω) 空間内の点集合として分散曲線が与えられることとなる.

3. 分散曲線の探索方法¹²⁾

本研究では, 分散曲線を式(12)より求める. 具体的には, 与えられた周波数 (ω) の下で式(12)をみたく κ を探索する. この操作を所定の範囲内の周波数に対して順次行うことで分散曲線を作成する.

なお、前述のとおり、パッド類に減衰を設定しそれらを複素剛性で表現する場合、式(12)をみたす κ は複素数で与えられる。無減衰系であれば、伝播波動モードの分散曲線における κ は実数値をとる。したがって、 κ がとり得る範囲を実軸上に限定し、式(12)の根を求めればよい。具体的には、Newton法などを用いて $f(\kappa, \omega)$ のゼロ点を探索すれば十分である。一方、複素根を探索する場合、複素平面内に根が点在することとなる。勿論、Newton法によっても幾つかの根を見つけることは可能であるが、所定の範囲内に存在する全ての根を探索することは難しい。

そこで本研究では、一般の非線形固有値問題に対する数値解法であるBlock S-S法¹¹⁾に準ずる手法により κ を探索する。当該手法については文献12)に示したが、完全を期すため以下にその手順を示す。

$f=0$ の複素根 κ_j , ($j=1, 2, \dots$)は $1/f$ に対して特異点を与える。そこで、根 κ_j の探索を、 $1/f$ の特異点探索に置き換えて実施する。 $1/f$ が複素平面のある単連結域 Ω 内において M 個の特異点を持ち、それが次式のように与えられているものとする。

$$\frac{1}{f} = \sum_{j=1}^M \frac{v_j}{\kappa - \kappa_j} + g(\kappa) \quad (13)$$

ここで、 v_j は定数、 $g(\kappa)$ は $1/f$ の正則な関数項である。

μ_p を、領域 Ω の閉じた境界 Γ に沿った次の周回積分により定義する。

$$\mu_p := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{(\kappa - \gamma)^p}{f(\kappa, \omega)} d\kappa, \quad (p=0, 1, \dots) \quad (14)$$

ここで γ は任意の複素数(定数)である。

式(14)に式(13)を代入すると次式を得る。

$$\mu_p = \sum_{j=1}^M (\kappa_j - \gamma)^p v_j \quad (15)$$

μ_p を成分とする次のHankel行列を導入する。

$$[\mathbf{H}_N] = \begin{bmatrix} \mu_0 & \cdots & \mu_{N-1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{N-1} & \cdots & \mu_{2(N-1)} \end{bmatrix}, \quad (16)$$

$$[\mathbf{H}_N^<] = \begin{bmatrix} \mu_1 & \cdots & \mu_N \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_N & \cdots & \mu_{2N} \end{bmatrix}, \quad (N \geq M)$$

なお、 $[\mathbf{H}_N]$, $[\mathbf{H}_N^<]$ は、それぞれ次式の様に分解することができる。

$$[\mathbf{H}_N] = [\mathbf{V}_N \mathbf{D}_M \mathbf{V}_N^T], \quad (17)$$

$$[\mathbf{H}_N^<] = [\mathbf{V}_N \mathbf{D}_M \mathbf{\Lambda}_M \mathbf{V}_N^T]$$

ただし、 $[\mathbf{V}_N]$ は以下の行列とする。

$$[\mathbf{V}_N] = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \kappa_1 - \gamma & \cdots & \kappa_M - \gamma \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (\kappa_1 - \gamma)^{N-1} & \cdots & (\kappa_M - \gamma)^{N-1} \end{bmatrix} \quad (18)$$

また、 $[\mathbf{D}_M]$, $[\mathbf{\Lambda}_M]$ は、それぞれ v_j および $\kappa_j - \gamma$ を対角成分に持つ $M \times M$ の対角行列である。

式(16)の行列に関し、次の固有値問題を設定する。

$$[\mathbf{H}_N^< - \lambda \mathbf{H}_N] \{\phi_N\} = \{\mathbf{0}\} \quad (19)$$

式(19)に式(17), (18)を代入すると、当該固有値問題は次式の様に表すことができる。

$$[\mathbf{V}_N \mathbf{D}_M (\mathbf{\Lambda}_M - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{V}_N^T] \{\phi_N\} = \{\mathbf{0}\} \quad (20)$$

ここで、 $[\mathbf{I}]$ は恒等行列である。

式(20)より、式(19)の固有値 λ_j は次式で与えられることがわかる。

$$\lambda_j = \kappa_j - \gamma, \quad (j=1, \dots, M) \quad (21)$$

したがって、一旦、式(19)の固有値問題を解けば、領域 Ω 内に存在する式(12)の全ての根が $\kappa_j = \lambda_j + \gamma$ より求められることとなる。

なお、式(19)の固有値は一般に $N (\geq M)$ 個得られる。よって、その中から式(12)の根に対応するものを M 個抽出する必要がある。そのため、実際の計算では、まず $[\mathbf{H}_N]$ の特異値分解する。次に、特異値の中で絶対値がある閾値よりも大きなものの個数を求め、それを M として設定する。ただし、閾値は十分に小さいものとする。これにより、領域 Ω 内に存在する特異点(根)の数が決定される。最後に、式(16)の部分行列 $[\mathbf{H}_M]$, $[\mathbf{H}_M^<]$ を抽出し、式(19)の行列サイズを N から M に縮小して固有値問題を解けば良い。

4. 分散解析の結果

(1) 解析条件

本研究では50kgNレールを例に分散解析を行う。まくらぎ間隔 L は0.6 mとし、レール1本当りのまくらぎ質量 m_s は100 kgと設定した。また、軌道パッドとまくらぎ下パッドのバネ定数をそれぞれ80 MN/mおよび30 MN/mとする。

パッド減衰をloss factorで設定する場合、パッド類の複素剛性は次式により与えられる。

$$k_r = k_{r0}(1 + i\phi_r), \quad (22)$$

$$k_s = k_{s0}(1 + i\phi_s)$$

ここで、 k_{r0} , k_{s0} はそれぞれ軌道パッドとまくらぎ下パッドのバネ定数、 ϕ_r と ϕ_s は軌道パッドおよびまくらぎ下パッドのloss factorである。

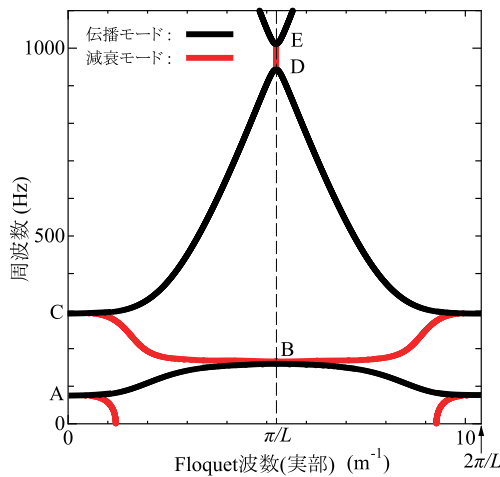


図-2 Floquet 波数実部-周波数平面における無減衰軌道の分散曲線

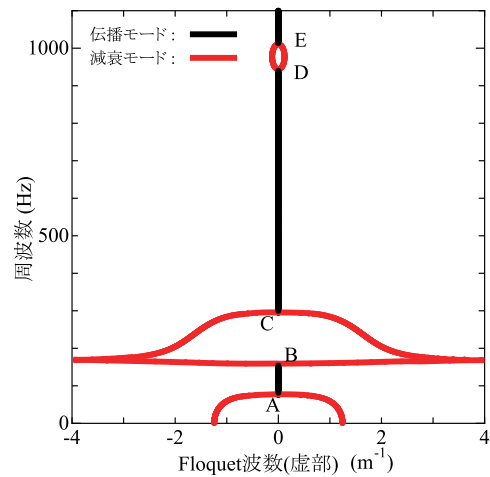


図-3 Floquet 波数虚部-周波数平面における無減衰軌道の分散曲線

一方、パッド類を Voigt モデルで表す場合、複素剛性は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} k_r &= k_{r0} + i\omega\eta_r, \\ k_s &= k_{s0} + i\omega\eta_s \end{aligned} \quad (23)$$

ここで、 η_r と η_s はそれぞれ軌道パッドおよびまくらぎ下パッドの減衰係数である。

式 (12) の級数展開は、精度を確認の上、 ± 10 項まで打ち切った。なお、分散曲線は Floquet 波数に関して $2\pi/L$ の周期性を有するため、その範囲内で無減衰系の分散曲線が求められる様に、式 (14) の積分経路 Γ を設定した。具体的には Γ を円形にとり、式 (14) における定数 γ と Γ の半径を共に π/L とした。これにより、実数値の κ に対し、 $0 < \kappa < 2\pi/L$ の範囲内の分散曲線が探索可能となる。また、 Γ 上に積分点を 1000 点取り、式 (14) の積分を台形公式により近似評価した。さらに、 $[\mathbf{H}_N]$ の特異値に対する切捨ての閾値は 10^{-10} に設定した。

(2) 無減衰軌道モデルの分散曲線

対象とした軌道モデルの基本特性を確認する目的で、パッド類を無減衰に設定して分散解析を行った。得られた分散曲線を、Floquet 波数の実部と周波数、および Floquet 波数の虚部と周波数とで与えられる平面に射影したものを、それぞれ図-2 と図-3 に示す。なお、これらの図では、Floquet 波数が実数値で与えられる伝播波動モードに対する分散曲線を黒色で、複素数で与えられる減衰モードを赤色で描画している。

図-2 に示すとおり、Floquet 波数実部に関する分散曲線は、 $\kappa = \pi/L$ に対して対称性を有している。これは、波動の伝播方向 (左右) に本質的差異が無いことを意味する。そのため、通常は $0 \leq \kappa \leq \pi/L$ の範囲内の

分散曲線のみ図示するが、ここでは Floquet 波数空間内の分散曲線一周期分全てを表示している。図-2 において、A-B 間の黒色の分散曲線はまくらぎが大きく振動するモードを、また C より高周波数域のものはレール振動が支配的となるモードを与える⁸⁾。ちなみに、A-B 間、C-D 間がパスバンド、A 以下、B-C 間、D-E 間がストップバンドを与える。伝播モードの分散曲線における接線の傾きは、波動の群速度を与える。したがって、各パスバンド端の傾きがゼロとなる点 A, B, C, D, E におけるモードは定在波を与える。軌道をこれらの周波数で調和加振した時、波動が遠方へ伝播し得ないため、入力エネルギーは加振点近傍に蓄積される。その結果、バンド端周波数は共振点を与える。また、D 点はレール支持点に節を持つ pinned-pinned モードに対応する。一方、E 点はレール支持点に腹を、スパン中央に節を持つ共振モードを与える。ただし、いずれもまくらぎ間隔を $1/2$ 波長とした定在波である。

伝播波動モードが存在しないストップバンド内には赤色で示した複素波数の分散曲線が分布している。図-3 では、それらが Floquet 波数虚数軸に関して対称に分布している。A 点以下のストップバンド内に分布する減衰モードの分散曲線は、周波数がゼロとなる点まで伸びている。図-2、図-3 より、周波数ゼロにおける当該モードの Floquet 波数は実部・虚部共に等しく約 1.2 m^{-1} となっている。なお、本軌道の静的まくらぎ支持剛性を $k_{e0} = k_{r0}k_{s0}/(k_{r0} + k_{s0})$ とおくと、等価な Euler ばり連続支持モデルのたわみに関する微分方程式の特性根 (波数) k は次式で与えられる。

$$k = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt[4]{\frac{k_{e0}}{EIL}} (1 \pm i) \quad (24)$$

本軌道条件における式 (24) の波数の実部・虚部の絶対値は等しく約 1.23 m^{-1} となり、上述の分散曲線が周波

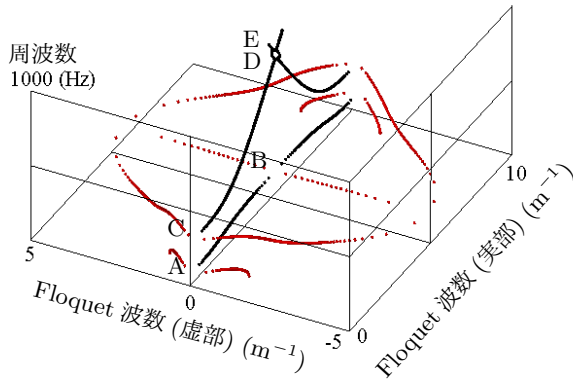


図-4 複素波数-周波数における無減衰軌道の分散曲線

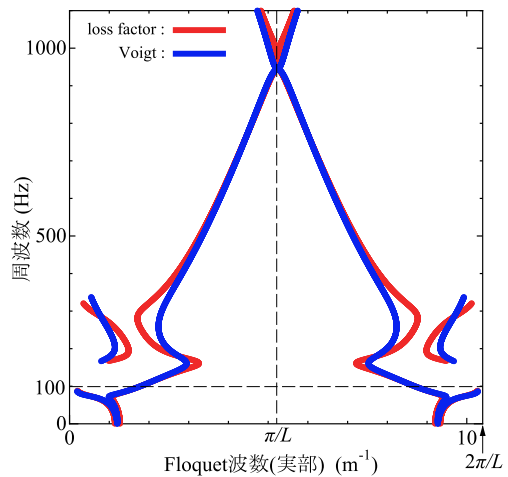


図-6 パッド減衰が分散曲線に及ぼす影響 (Floquet 波数実部-周波数平面における減衰軌道の分散曲線)

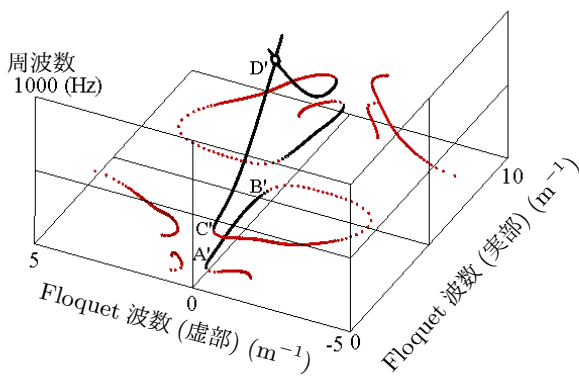


図-5 複素波数-周波数における減衰軌道の分散曲線 ($\phi_r = \phi_s = 0.01$)

数ゼロで静的たわみの同次解を与えることがわかる。

図-2, 図-3 から, 分散曲線がどの様に分布しているのかが概ね理解できる. しかし, 特にストップバンド内に存在する減衰モードの分散曲線が複素波数-周波数空間内でどの様に分布しているのかを想像することは必ずしも容易でない. そこで, 分散曲線の3次元分布の様子を図-4 に示す. この図より, 図-3 で B 点から虚数軸方向にほぼ水平に伸びていた分散曲線が, 図-2 の B 点から紙面垂直方向に分岐していることがわかる. またそれが, C 点から伸びる減衰モードの分散曲線と, $\kappa = \pi/L(1 \pm i)$ 付近で交差する様子も確認できる.

(3) パッド減衰が分散曲線に及ぼす影響

パッド減衰によって分散曲線がどの様に変化するかを確認する目的で, まず式 (22) の loss factor ϕ_r, ϕ_s を 0.01 に設定し, 極わずかな減衰を導入して分散解析を行った. ちなみに, パッド類の loss factor は通常 0.2 前後の値を持つ^{10),14)}. 図-2, 図-3 の様な Floquet 波数の実数軸, 虚数軸方向に射影した図で見ると, 無

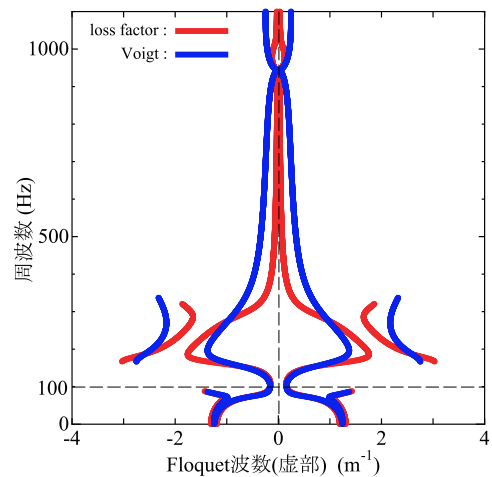


図-7 パッド減衰が分散曲線に及ぼす影響 (Floquet 波数虚部-周波数平面における減衰軌道の分散曲線)

減衰系の分散曲線との差異はほとんど認められなかった. そのため, 複素波数-周波数で与えられる3次元空間内に表示したもののみを図-5 に示す. なお, この分散曲線には本来減衰モードのみ存在し, したがってその Floquet 波数は一般に複素数値で与えられる. 図-5 では, Floquet 波数虚部の絶対値が $0.2 m^{-1}$ 以下の比較的減衰の少ない分散曲線について黒色で表示している. 式 (24) の静的連続支持ばりの特性根から始まり, 図-4 の A に相当する点 A' を経由して点 B' を通過し, Floquet 波数複素数域を大きく周回して点 C' に至り, pinned-pinned モードの点 D' まで連続した一本の分散曲線につながっている様子が確認できる. また, 図-4 の無減衰系の分散曲線には Floquet 波数の実部・虚部方向に対称性が認められたが, 図-5 ではその対称性が低下している.

次に、パッド類の loss factor を 0.2 に設定して求めた分散曲線を、Floquet 波数の実部と周波数、および虚部と周波数とで与えられる平面に射影したものを、それぞれ図-6 と図-7 に赤線で示す。なお、これらの図には、後の議論のためにパッド類を Voigt モデルで表現して求めた分散曲線も青線で示している。図-6、図-7 より、パッド類の減衰導入によって 400 Hz 以下の分散曲線が大きく変形を受けている様子がわかる。一方、400 Hz 以上の分散曲線における変化は比較的小さい。前述のとおり、図-2 に示した A-B 間の伝播波動モードは、比較的大きなまくらぎ振動を伴うものであり、そのため大きな伸縮を受けるパッド類の減衰の影響が低周波数域で顕著に現れたものと考えられる。これに対し、C 点より高周波数域に分布する分散曲線は、レールが独立して振動する伝播モードで特徴付けられるものであり、パッドの減衰の影響が比較的小さいものと推測される。このことは、図-7 において、400 Hz 以上の周波数域に分布する分散曲線の Floquet 波数虚部がゼロに近く、波動の空間減衰が小さいことから確認できる。

また、複素波数平面-周波数で与えられる 3 次元空間内で分散曲線を描画したものを図-8 に示す。この図からも、パッド類に減衰を導入することによって、低周波数域における分散曲線が大きく変化し、その分布域が極端に縮小されていることがわかる。なお、pinned-pinned モード (図-2 の D 点) はレール支持点を節とした定在波モードであり、パッド類の伸縮を伴わないため、その剛性や減衰の影響を受けない。これに対して図-2 の E 点に相当する定在波モードではレール支持点がレール振動の腹に位置するため、支持構造の影響を受ける。そのため図-8 において、前者については 2 本の分散曲線が Floquet 波数実部-周波数平面内で交差して依然無減衰定在波モードを与えているのに対し、後者では分散曲線の交点が消滅し、交差せずに分離して減衰モードを与えている。

(4) 減衰モデルの違いが分散曲線に及ぼす影響

パッド類の減衰を式 (23) の Voigt モデルで設定した場合を、式 (22) の loss factor で設定した場合と比較する。Voigt モデルの減衰が、100 Hz において loss factor を 0.2 とした場合と一致する様に、式 (23) の減衰係数 η_r , η_s を設定して求めた分散曲線を図-6、図-7 中に青線で示している。これらの図より、両減衰モデルに基づいて求めた分散曲線が 100 Hz で一致している様子が確認できる。

Floquet 波数実部を横軸として表示した図-6 では、減衰モデルの違いによる影響が 300 Hz 前後の周波数帯で明瞭に現れているものの、それ以外の周波数域では顕著な差異は認められない。一方、Floquet 波数虚部を横

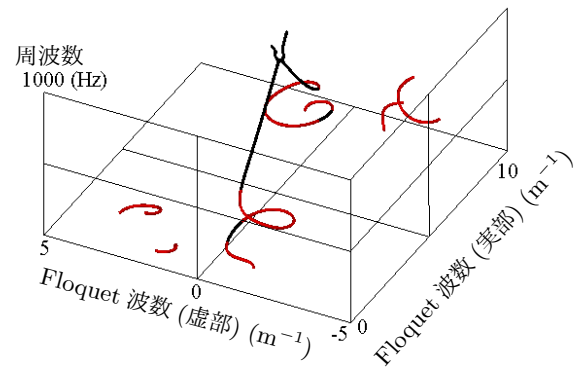


図-8 複素波数-周波数における減衰軌道の分散曲線 ($\phi_r = \phi_s = 0.2$)

軸に表示した図-7 では、100 Hz 以上の周波数域において減衰モデルの差異が顕著に現れている。Voigt モデルに対応する loss factor は周波数に比例する。したがって、100 Hz を基準に減衰係数を設定した本解析の場合、それより高周波数域では、一定の loss factor の下に求めた分散曲線に比べ減衰が過剰となる。ちなみに、500 Hz における Voigt モデルの減衰を loss factor に換算すると、100 Hz の 5 倍の 1.0 に相当する。4.(3) に述べたとおり、loss factor を 0.2 に設定しても、400 Hz 以上の波動モードの減衰は比較的小きな値をとっていた。これに対し、Voigt モデルで求めた分散曲線の Floquet 波数虚部 (図-7 の青線) は、低周波数域に比べ依然小さな値を示しているとは言え、赤線の loss factor モデルに比べると大きな値となっており、波動伝播過程においてより大きな減衰を伴うことが推測できる。

文献 14) では、500 Hz 程度までパッド類の loss factor はほぼ一定値をとり、それ以上では緩やかに増加することが示されている。Voigt モデルでは、このような減衰特性を表現することができないので、図-7 に示したとおり、レール内を伝播する波動の減衰特性を広い周波数域にわたり適切に再現することは困難と考えられる。

5. おわりに

パッド類の減衰が軌道の分散特性に及ぼす影響について、数理モデルに基づき検討した。パッド類の減衰を周波数に依存しない一定の loss factor でモデル化する場合、減衰の影響は 400 Hz 以下の周波数域における大きなまくらぎ振動を伴うモードで顕著となる一方、より高周波数域に分布するレール振動が支配的となるモードでは比較的軽微となることがわかった。また、複素 Floquet 波数平面と周波数とで与えられる 3 次元空間内で分散曲線の分布を確認したところ、減衰導入に

よって、まくらぎが大きく振動するモードとレール振動が支配的となる伝播波動モードとが単一の分散曲線で連結され、前者のモードが存在する 400 Hz 以下の低周波数域においてその分布域の狭小化が認められた。

さらに、パッド減衰のモデル化の違いが分散特性に及ぼす影響についても調べた。具体的には、loss factor モデルと Voigt モデルとを比較した。その結果、Voigt モデルでは、それと等価な loss factor が周波数に比例して増加するため、高周波数域において波動の減衰が過大に評価される傾向が確認された。このことより、パッド類のモデル化において Voigt ユニットが一般に用いられる時間域解析の場合、広範な周波数域にわたる軌道系の動特性(減衰特性)を評価する際には、減衰係数の設定に注意を要するものと考えられる。

REFERENCES

- 1) Brillouin, L. : Wave propagation in periodic structures, Dover Publications, Inc., 1953.
- 2) Mead, D.J. : Free wave propagation in periodically supported, infinite beam, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.31, No.2, pp. 181-197, 1970.
- 3) Tassilly, E. : Propagation of bending waves in a periodic beam, *Int. J. Engng Sci.*, Vol.25, No.1, pp. 85-94, 1987.
- 4) Thompson, D.J. : Wheel-Rail noise generation, Part III: Rail vibration, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.161, No.3, pp. 421-446, 1993.
- 5) Hosking, R.J., Husain, S.A. and Milinazzo, F. : Natural flexural vibrations of a continuous beam on discrete elastic supports, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.272, pp. 169-185, 2004.
- 6) Mead, D.J. : Wave propagation in continuous periodic structures: Research contributions from Southampton, 1964-1995, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.190, No.3, pp. 495-524, 1996.
- 7) Knothe, K.L., Strzyzakowski, Z. and Willner, K. : Rail vibrations in the high frequency range, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.169, pp. 111-123, 1994.
- 8) 阿部和久, 古屋卓稔, 紅露一寛 : まくらぎ支持された無限長レールの波動伝播解析, 応用力学論文集, Vol.10, pp. 1029-1036, 2007. [Abe, K., Furuya, T. and Koro, K.: Wave propagation in an infinite rail discretely supported by sleepers, *Journal of Applied Mechanics JSCE*, Vol.10, pp. 1029-1036, 2007.]
- 9) 清水紗希, 阿部和久, 相川 明, 紅露一寛 : 3次元はり要素を用いた軸力を受ける軌道系の波動伝播解析, 鉄道力学論文集, 第14号, pp. 75-82, 2010. [Shimizu, S., Abe, K., Aikawa, A. and Koro, K.: Wave propagation analysis by 3-D beam elements for an infinite track having axially loaded rails, *Journal of Railway Mechanics, JSCE*, No.14, pp. 75-82, 2010.]
- 10) Wu, T.X. and Thompson, D.J. : A double timoshenko beam model for vertical vibration analysis of railway track at high frequencies, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.224, No.2, pp. 329-348, 1999.
- 11) Asakura, J., Sakurai, T., Tadano, H., Ikegami, T. and Kimura, K. : A numerical method for nonlinear eigenvalue problems using contour integrals, *SIAM Letters*, Vol.1, pp. 52-55, 2009.
- 12) 阿部和久, 山田高也, 古田 勝, 末原美智子, 紅露一寛 : 地下鉄トンネル・地盤連成系の三次元加振応答解析, 土木学会論文集 A2(応用力学), Vol.74, No.2, pp. I_523-I_534, 2018. [Abe, K., Yamada, K., Furuta, M., Suehara, M. and Koro, K.: A 3-D analysis method for dynamic soil/subway tunnel interaction problems, *Journal of JSCE (A2)*, Vol.74, No.2, pp. I_523-I_534, 2018.]
- 13) Abe, K., Chida, Y., Quinay, P.E.B. and Koro, K. : Dynamic instability of a wheel moving on a discretely supported infinite rail, *Journal of Sound and Vibration*, Vol.333, No.15, pp. 3413-3427, 2014.
- 14) Thompson, D. : Railway noise and vibration, Chap.3, Elsevier, 2009.

(Received April 1, 2022)

(Accepted June 3, 2022)

INFLUENCE OF PAD DAMPING ON TRACK DISPERSION CURVES

Kazuhisa ABE, Shota HAKAMADA and Kazuhiro KORO

Influence of pad damping on the wave propagation properties is investigated for a periodic track model. For this purpose, the dispersion curves are obtained in three-dimensional space given by the complex-wavenumber plane and real frequency, and wave modes which are sensitive to the damping of pads are identified. Furthermore, the dispersion curves obtained for two types of damping models given by the constant loss factor and the spring-damper model are compared and influence of the damping modeling on the mode damping is examined.