

論文 バラスト道床における 複数の材料物性値の空間的ばらつきを 同時に考慮した軌道振動解析

紅露一寛¹・阿部和久²

¹ 正会員 博士(工学) 新潟大学教授 工学部工学科社会基盤工学プログラム (〒950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050)
E-mail: kouro@eng.niigata-u.ac.jp

² 正会員 工博 新潟大学教授 工学部工学科社会基盤工学プログラム (〒950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050)
E-mail: abe@eng.niigata-u.ac.jp

バラスト道床における複数の材料物性値の空間的ばらつきを同時に考慮した軌道振動解析を行った。特に、動弾性体としてモデル化したバラスト道床の Young 率と質量密度の空間的ばらつきがまくらぎ・道床間作用力、レール・車輪接触力に及ぼす影響について検討した。バラスト道床の物性値の空間的ばらつきは Karhunen-Loeve 展開でモデル化し、スペクトル確率有限要素法と時間域 Green 関数法によりばらつきを考慮した動的応答を評価・考慮した。振動解析では、2 種類の材料物性値が互いに独立の場合と、完全相関の場合を検討の対象とした。その結果、走行速度 100km/h 程度の設定では、車輪走行時の動的作用の影響が比較的小さく、解析結果に対してはバラスト道床の Young 率の空間的ばらつきの影響が支配的であった。そのため、バラスト道床の Young 率と質量密度の空間的ばらつきを独立、完全相関いずれとしても解析結果にはほとんど影響しないことがわかった。

Key Words : *spatial variation of ballast Young's modulus and density, wheel-track vibration, Spectral stochastic FEM*

1. はじめに

鉄道は、輸送力の大きな陸上交通手段として、国内外で広く利用されている。鉄道における軌道では、2 本のレールを離散的に配置されるまくらぎで支持し、まくらぎの周囲および下部には粒径が数センチの碎石粒子の集合体からなるバラスト道床が敷設される「バラスト軌道」が採用されることが多い。バラスト道床は、碎石と空隙からなる非均質材料であり、その力学挙動は碎石粒子の粒径、配置、接触状態のばらつきの影響を受けて、道床内で空間的なばらつきを有するものである。粒径がバラスト道床の層厚に比べて相対的に大きい場合、そのばらつきの度合いは小さくないものと推測される。しかし、設計時には、何らかの均質化によってバラスト道床の力学挙動をモデル化し、決定論的な取り扱いの下で力学応答を評価することが一般的である^{1),2)}。

一方、軌道の構成部材の材料物性値や形状特性値が何らかのばらつきを有する限り、力学応答の評価結果にはバラスト軌道の「力学応答のばらつき」として伝播する。その結果、設計段階で試みられる各種の数値シミュレーションにより得られた各種作用力や変位、変形量は、入力情報である構成部材の材料物性値・形状特性値と同様、ばらつきをもったものとして考える必要がある。ばらつきの混入は解析により得られた各種

物理量の過小評価をもたらす危険性もあり、また入力情報からのばらつきの伝播傾向やばらつきを有する定量予測値（事象）の発現傾向を定量的に評価することは、軌道設計の高度化に資するものと考えられる。

これまで、軌道系の各種シミュレーションにおいて種々の「ばらつき」の影響を考慮したものはさほど多くない。特に、軌道系の数値シミュレーションにおけるバラスト材の材料物性値の空間的ばらつきの取り扱い、せん断剛性を考慮した Kelvin foundation 上に置かれた無限長はりとして軌道系をモデル化したうえで、鉛直方向の支持剛性に確率論的空間変動を与え、それにより励起される振動応答の評価を試みた Andersen ら³⁾のほか、バラスト材の Young 率の空間的ばらつきの影響をスペクトル確率有限要素法により定量評価することを試みた著者ら⁴⁾により検討されているに過ぎない。しかし、これらの研究ではいずれも弾性挙動を表現する弾性係数や支持ばね定数の空間的ばらつきを取り扱ったにすぎず、動弾性応答に影響を及ぼす質量密度の空間的ばらつきを弾性係数の空間的ばらつきと同時に考慮した軌道振動解析は行われていない。また、複数の材料物性値の空間的ばらつきを同時に考慮した解析も未着手である。

そこで本研究では、軌道の構成要素の中でも力学特性のばらつきが相対的に大きいと考えられるバラスト

道床に注目し、その複数の材料物性値、特に Young 率と質量密度の空間的ばらつきがまくらぎ・道床間作用力と車輪・レール接触力に及ぼす影響について検討する。車輪・軌道系の振動解析モデルは、文献^{4),5)}に示したはり・ばね・質点系のモデルを採用することとし、バラスト道床のみを2次元動弾性連続体でモデル化する。また、バラスト道床の Young 率と質量密度の空間的ばらつきをそれぞれ Karhunen-Loeve 展開で表現したうえで、2種類の物性値が互いに独立、または完全相関となる場合を考え、動的応答はスペクトル確率有限要素法⁶⁾を用いて解く。確率空間での離散化には polynomial chaos を用いる。当該の連成振動解析モデルを用いて、バラスト道床沈下の発生源外力であるまくらぎ・道床間作用力と軌道系の振動を励起するレール・車輪接触力を対象に、バラスト道床の Young 率および質量密度の空間的なばらつきの影響について検討する。

2. 複数の材料物性値の空間的ばらつきを有するバラスト道床の動的応答の評価

本研究では、複数の材料物性値において空間的ばらつきを有するバラスト道床の動的応答を評価するために、スペクトル確率有限要素法を用いる。以下では、バラスト材の Young 率 E_b と質量密度 ρ_b の空間的ばらつきを考慮する場合について、定式化と離散化について説明する。

バラスト道床の領域 Ω_b を考え、その動弾性応答を評価する。バラスト材の Young 率を E_b 、Poisson 比を ν_b 、質量密度を ρ_b とし、物体力を無視できるものとする、次の弱形式を得る。

$$\int_{\Omega_b} \rho_b \ddot{u}_i \delta u_i d\Omega_b + \int_{\Omega_b} \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} d\Omega_b = \int_{\Gamma_{bt}} t_i \delta u_i d\Gamma_b \quad (1)$$

ここで、 Γ_{bt} はバラスト道床領域の表面力規定部分境界であり、変位規定部分境界 Γ_{bu} との間には、 $\Gamma_{bt} \cup \Gamma_{bu} = \Gamma_b$ (全境界)、 $\Gamma_{bt} \cap \Gamma_{bu} = \emptyset$ が成り立つ。 u_i は変位ベクトル、 δu_i は仮想変位ベクトル、 t_i は表面力ベクトルである。応力テンソル σ_{ij} 、仮想ひずみテンソル $\delta \varepsilon_{ij}$ は次式で定義される。

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= E_{ijkl}^b \varepsilon_{kl}, \quad \varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \\ \delta \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \delta u_j}{\partial x_i} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

弾性係数テンソル E_{ijkl}^b は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} E_{ijkl}^b &= \lambda_b \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu_b (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \\ &= E_b \left[\frac{\nu_b \delta_{ij} \delta_{kl}}{(1 + \nu_b)(1 - 2\nu_b)} + \frac{\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}}{2(1 + \nu_b)} \right] \\ &= E_b \Lambda_{ijkl}^b \end{aligned} \quad (3)$$

(1) Young 率と質量密度とが互いに独立である場合

前述のように、空間的ばらつきの影響を考慮するのは Young 率と質量密度の2つの物性値である。空間的ばらつきは Karhunen-Loeve 展開を用いて表現する。空間的ばらつきを有する2種類の材料物性値 E_b 、 ρ_b が互いに独立であると仮定できる場合には、 $\mathbf{x} \in \Omega_b$ として、

$$\begin{aligned} E_b &= \bar{E}_b + \sum_{k=1}^{N_E} \xi_k \sqrt{\lambda_k^b} f_{E,k}^b(\mathbf{x}) \\ \rho_b &= \bar{\rho}_b + \sum_{k=1}^{N_\rho} \zeta_k \sqrt{\omega_k^b} f_{\rho,k}^b(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、 $\bar{E}_b$ 、 $\bar{\rho}_b$ は E_b 、 ρ_b の期待値であり、 λ_k^b 、 $f_{E,k}^b$ は E_b に関する共分散関数 C_E の固有値と固有関数、 ω_k^b 、 $f_{\rho,k}^b$ は ρ_b に関する共分散関数 C_ρ の固有値と固有関数、 ξ_k 、 ζ_k は互いに独立な標準正規確率変数である。

式(1)に式(2)、(3)、(4)を代入すると、

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_b} \bar{\rho}_b \ddot{u}_i \delta u_i d\Omega_b + \sum_{k=1}^{N_\rho} \zeta_k \int_{\Omega_b} \sqrt{\omega_k^b} f_{\rho,k}^b \ddot{u}_i \delta u_i d\Omega_b \\ &+ \int_{\Omega_b} \delta \varepsilon_{ij} \bar{E}_b \Lambda_{ijkl}^b \varepsilon_{kl} d\Omega_b \\ &+ \sum_{k=1}^{N_E} \xi_k \int_{\Omega_b} \delta \varepsilon_{ij} \sqrt{\lambda_k^b} f_{E,k}^b \Lambda_{ijkl}^b \varepsilon_{kl} d\Omega_b \\ &= \int_{\Gamma_{bt}} t_i \delta u_i d\Gamma_b \end{aligned} \quad (5)$$

を得る。解析領域 Ω_b において変位 u_i と仮想変位 δu_i に有限要素近似を導入したうえで、節点変位ベクトル $\mathbf{U}$ と表面力に関する等価節点力ベクトル $\mathbf{F}$ に次式の polynomial chaos 展開を適用し、

$$\{\mathbf{U}\} = \sum_{J=1}^{N_{PC}} \phi_J(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\zeta}) \{\mathbf{U}_J\}, \quad \{\mathbf{F}\} = \sum_{J=1}^{N_{PC}} \phi_J(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\zeta}) \{\mathbf{F}_J\} \quad (6)$$

polynomial chaos ϕ_I ($I = 1, 2, \dots, N_{PC}$) を重みとした確率空間での Galerkin 法を適用すると、次の連立常微分方程式を得る。Rayleigh 減衰項を付加して、

$$\begin{aligned} &\sum_{J=1}^{N_{PC}} [\mathbf{M}_{IJ}] \{\ddot{\mathbf{U}}_J\} + \sum_{J=1}^{N_{PC}} [\mathbf{C}_{IJ}] \{\dot{\mathbf{U}}_J\} \\ &+ \sum_{J=1}^{N_{PC}} [\mathbf{K}_{IJ}] \{\mathbf{U}_J\} = \sum_{J=1}^{N_{PC}} \langle \phi_I \phi_J \rangle \{\mathbf{F}_J\} \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、 $I = 1, 2, \dots, N_{PC}$ であり、式(7)の係数行列は、

$$[\mathbf{M}_{IJ}] = \langle \phi_I \phi_J \rangle [\mathbf{M}_0] + \sum_{k=1}^{N_\rho} \langle \zeta_k \phi_I \phi_J \rangle [\mathbf{M}_k] \quad (8)$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{C}_{IJ}] &= \langle \phi_I \phi_J \rangle [\alpha \mathbf{M}_0 + \beta \mathbf{K}_0] \\ &+ \sum_{k=1}^{N_\rho} \langle \zeta_k \phi_I \phi_J \rangle [\alpha \mathbf{M}_k] + \sum_{k=1}^{N_E} \langle \xi_k \phi_I \phi_J \rangle [\beta \mathbf{K}_k] \end{aligned} \quad (9)$$

$$[K_{IJ}] = \langle \phi_I \phi_J \rangle [K_0] + \sum_{k=1}^{N_E} \langle \xi_k \phi_I \phi_J \rangle [K_k] \quad (10)$$

となる. α, β は Rayleigh 減衰のパラメータであり, 式 (8)-(10) の各行列は次式で定義される.

$$\begin{aligned} [M_0] &= \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Omega_b^{(e)}} \bar{\rho} [N]^T [N] d\Omega_b \\ [M_k] &= \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Omega_b^{(e)}} \sqrt{\omega_k^b} f_{\rho,k}^b [N]^T [N] d\Omega_b \\ [K_0] &= \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Omega_b^{(e)}} \bar{E}_b [B]^T [\Lambda^b] [B] d\Omega_b \\ [K_k] &= \sum_{e=1}^{N_e} \int_{\Omega_b^{(e)}} \sqrt{\lambda_k^b} f_{E,k}^b [B]^T [\Lambda^b] [B] d\Omega_b \end{aligned} \quad (11)$$

ここで, $[N]$ は有限要素の補間関数を収納した行列, $[B]$ は領域内の節点変位から要素内ひずみ値を与える行列, $[\Lambda^b]$ は 4 階のテンソル Λ_{ijkl} の成分を収納した行列であり, N_e は要素数, $\Omega_b^{(e)}$ は要素 e の領域である.

式 (7) を直接時間積分することで, 材料物性値の空間的ばらつきを有するバラスト道床の動弾性応答を評価することができる.

(2) Young 率と質量密度とが完全相関である場合

一方, 2 種類の材料物性値 E_b, ρ_b の空間的ばらつきが完全相関であると仮定する場合, E_b, ρ_b の共分散関数 C_{E_b}, C_{ρ_b} において $C_{\rho_b} = q C_{E_b}$ (q : 定数) が成り立ち, E_b, ρ_b は同一の確率変数 ξ_k を用いて

$$\begin{aligned} E_b &= \bar{E}_b + \sum_{k=1}^{N_{KL}} \xi_k \sqrt{\lambda_k^b} f_{E,k}^b(\mathbf{x}) \\ \rho_b &= \bar{\rho}_b + \sum_{k=1}^{N_{KL}} \xi_k \sqrt{\omega_k^b} f_{\rho,k}^b(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (12)$$

で与えられる. ここで, $\mathbf{x} \in \Omega_b$, N_{KL} は Karhunen-Loeve 展開の展開項数であり, $f_{E,k}^b = f_{\rho,k}^b$ となる.

式 (1) に式 (2), (3), (12) を代入すると,

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_b} \bar{\rho}_b \ddot{u}_i \delta u_i d\Omega_b + \sum_{k=1}^{N_{KL}} \xi_k \int_{\Omega_b} \sqrt{\omega_k^b} f_{\rho,k}^b \ddot{u}_i \delta u_i d\Omega_b \\ &+ \int_{\Omega_b} \delta \varepsilon_{ij} \bar{E}_b \Lambda_{ijkl}^b \varepsilon_{kl} d\Omega_b \\ &+ \sum_{k=1}^{N_{KL}} \xi_k \int_{\Omega_b} \delta \varepsilon_{ij} \sqrt{\lambda_k^b} f_{E,k}^b \Lambda_{ijkl}^b \varepsilon_{kl} d\Omega_b \\ &= \int_{\Gamma_{bt}} t_i \delta u_i d\Gamma_b \end{aligned} \quad (13)$$

を得る. 解析領域 Ω_b において変位 u_i と仮想変位 δu_i に有限要素近似を導入したうえで, 節点変位ベクトル $\mathbf{U}$ と表面力に関する等価節点力ベクトル $\mathbf{F}$ に次式の

polynomial chaos 展開を適用し,

$$\{\mathbf{U}\} = \sum_{J=1}^{N_{PC}} \phi_J(\boldsymbol{\xi}) \{\mathbf{U}_J\}, \quad \{\mathbf{F}\} = \sum_{J=1}^{N_{PC}} \phi_J(\boldsymbol{\xi}) \{\mathbf{F}_J\} \quad (14)$$

polynomial chaos ϕ_I ($I = 1, 2, \dots, N_{PC}$) を重みとした確率空間での Galerkin 法を適用すると, 次の連立常微分方程式を得る. $I = 1, 2, \dots, N_{PC}$ として,

$$\begin{aligned} &\sum_{J=1}^{N_{PC}} [M_{IJ}] \{\ddot{\mathbf{U}}_J\} + \sum_{J=1}^{N_{PC}} [C_{IJ}] \{\dot{\mathbf{U}}_J\} \\ &+ \sum_{J=1}^{N_{PC}} [K_{IJ}] \{\mathbf{U}_J\} = \sum_{J=1}^{N_{PC}} \langle \phi_I \phi_J \rangle \{\mathbf{F}_J\} \end{aligned} \quad (15)$$

式 (15) の係数行列は,

$$[M_{IJ}] = \langle \phi_I \phi_J \rangle [M_0] + \sum_{k=1}^{N_{KL}} \langle \xi_k \phi_I \phi_J \rangle [M_k] \quad (16)$$

$$\begin{aligned} [C_{IJ}] &= \langle \phi_I \phi_J \rangle [\alpha M_0 + \beta K_0] \\ &+ \sum_{k=1}^{N_{KL}} [\langle \xi_k \phi_I \phi_J \rangle [\alpha M_k] + \langle \xi_k \phi_I \phi_J \rangle [\beta K_k]] \end{aligned} \quad (17)$$

$$[K_{IJ}] = \langle \phi_I \phi_J \rangle [K_0] + \sum_{k=1}^{N_{KL}} \langle \xi_k \phi_I \phi_J \rangle [K_k] \quad (18)$$

となる. 式 (15) を直接時間積分することで, 材料物性値の空間的ばらつきを有するバラスト道床の動弾性応答を評価することができる.

(3) バラスト道床上面での鉛直変位の評価

本研究では, バラスト道床の動的応答を動弾性連続体モデルにより表現し, 車輪・軌道系全体の連成振動応答はスペクトル確率有限要素法を用いて評価する. このとき, 道床部の離散化により得られた代数方程式と, それ以外の各構成要素における離散化方程式とをそのまま連立すると, 道床部の方程式の規模が小さくなく, 解析時の計算負荷が懸念される. そこで本研究では, 各まくらぎとバラスト道床との間に生じる相互作用力をまくらぎ鉛直変位とまくらぎ敷設位置でのバラスト道床上面鉛直変位との相対変位から Voigt ユニットを用いて評価することとし, 各まくらぎ位置でのバラスト道床上面鉛直変位 $u_{b,i}$ ($i = 1, 2, \dots, N_{slp}$) を時間域 Green 関数法⁴⁾を用いて評価する.

まず, 本研究では, 各まくらぎ・道床間作用力 $F_{s,j}$ ($j = 1, 2, \dots, N_{slp}$) をばね定数 k_s , 減衰係数 η_s の Voigt ユニットでモデル化する. このとき, 各まくらぎ・道床間作用力は合力の意味で定義されるため, バラスト道床には各まくらぎ幅 $w_{s,j}$ で等分布の表面力 $F_{s,j}/w_{s,j}$ として作用するものとする. このとき, j 番まくらぎ位置での道床上面鉛直変位 $u_{b,j}$ ($j = 1, 2, \dots, N_{slp}$) は, 重

ね合わせの原理と畳み込み積分により次式で表すことができる。

$$u_{b,i}(t) = \sum_{k=1}^{N_{slp}} \int_0^{t^+} F_{s,j}(\tau) G_f^*(x_i, x_j, t - \tau) d\tau \quad (19)$$

時間域 Green 関数 $G_f^*(x_i, x_j, \tau)$ は、時刻 $t = 0$ に j 番まくらぎ位置 $x = x_j$ なる点に、まくらぎ・道床間作用力 $F_{s,j}$ が作用したときの、時刻 $t = \tau$ での i 番まくらぎ直下 ($x = x_i$) の鉛直方向の道床上面変位と定義する。式 (19) において、入力空間的ばらつきの影響から、 $u_{b,i}$ は動的応答に変動成分を有する。

$$u_{b,i}(\xi, \zeta, t) = \sum_{j=1}^{N_{slp}} \int_0^{t^+} F_{s,j}(\xi, \zeta, \tau) \cdot G_f^*(x_i, x_j, \xi, \zeta, t - \tau) d\tau \quad (20)$$

ここで、式 (20) において、道床上面変位 $u_{b,i}$ とまくらぎ・道床間作用力 $F_{s,j}$ を次の polynomial chaos 展開できるものとして、

$$u_{b,i}(\xi, \zeta, t) = \sum_{K=1}^{N_{PC}} \phi_K(\xi, \zeta) u_{b,i,K}(t) \quad (21)$$

$$F_{s,j}(\xi, \zeta, t) = \sum_{K=1}^{N_{PC}} \phi_K(\xi, \zeta) F_{s,j,K}(t) \quad (22)$$

式 (21) を式 (20) に代入し、両辺に polynomial chaos ϕ_N を乗じて確率空間で重み付き内積を考える。このとき、polynomial chaos の直交性と重ね合わせの原理から、 $u_{b,i}$ の展開係数 $u_{b,i,K}$ は次式で与えられる。

$$\bar{u}_{b,i,K}(t) = \sum_{j=1}^{N_{slp}} \sum_{N=1}^{N_{PC}} \int_0^{t^+} F_{s,j,N}(\tau) G_{f,i,j,KN}^*(t - \tau) d\tau \quad (23)$$

ここで、 $G_{f,i,j,KN}^*$ は、時刻 $\tau = 0$ において j 番まくらぎ位置におけるまくらぎ・道床間作用力が $F_{s,j} = \delta(\tau = 0)\phi_N(\delta: \text{Dirac のデルタ関数})$ で与えられたときの、時刻 $\tau = t$ における i 番まくらぎ位置での道床上面変位 $u_{b,i}$ の PC 展開第 K 項目の展開係数と定義される。本研究では、時間域 Green 関数 $G_{f,i,j,KN}^*$ は、前小節で示した式 (7) または式 (15) を直接積分して解くことで、数値的に与えるものとする。

3. バラスト道床以外の軌道各部および車輪の振動解析モデル

本研究では、バラスト道床以外の軌道各部および車輪の振動応答は、文献^{4),5)}で構成した振動解析モデルで表現する。図-1 に示すように、まくらぎは質点、まくらぎ・道床間作用力と軌道パッド作用力は Voigt ユニット、レールは Euler ばりでそれぞれモデル化する。車輪は、一つの車輪を質点としてモデル化し、車体からの荷重作用は上載死荷重として考慮する。

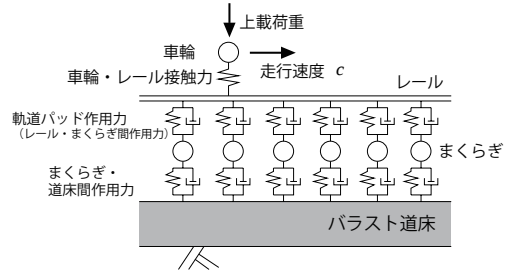


図-1 車輪・軌道系の連成振動解析モデル。

(1) まくらぎ・道床間作用力

まくらぎ・道床間作用力 $F_{s,i}$ ($i = 1, 2, \dots, N_{slp}$) は Voigt ユニットでその応答を表現する。このとき、 $F_{s,i}$ は次式で記述できる。

$$F_{s,i} = k_s(u_{slp,i} - u_{b,i}) + \eta_s(\dot{u}_{slp,i} - \dot{u}_{b,i}) \quad (24)$$

ここで、 k_s はばね定数、 η_s は減衰係数であり、 $u_{slp,i}$ は i 番まくらぎ鉛直変位、 $u_{b,i}$ は i 番まくらぎ位置におけるバラスト道床上面変位であり、下向きを正とする。式 (23) で示したように、バラスト道床における材料物性値に空間的ばらつきが存在する場合、ばらつきの影響が伝播する動的応答も確率変数として取り扱う必要があるため、確率空間において polynomial chaos 展開で近似している。そのため、軌道各部の変位や作用力もすべて $u_{b,i}$ やまくらぎ・道床間作用力 $F_{s,i}$ と同様の polynomial chaos 展開しておく必要がある。すなわち、式 (24) では、まくらぎ鉛直変位の polynomial chaos 展開を次式で定義しておく。

$$u_{slp,i} = \sum_{K=1}^{N_{PC}} \phi_K u_{slp,i,K} \quad (25)$$

式 (21), (22), (25) を式 (24) に代入し、polynomial chaos ϕ_N を両辺に乗じて確率空間で重み付き内積をとると、polynomial chaos の直交性から次式を得る。

$$F_{s,i,K} = k_s(u_{slp,i,K} - u_{b,i,K}) + \eta_s(\dot{u}_{slp,i,K} - \dot{u}_{b,i,K}) \quad (26)$$

(2) まくらぎ

まくらぎは、質量 m_{slp} の質点でモデル化する。 $i = 1, 2, \dots, N_{slp}$ として、運動方程式は次式で記述できる。

$$m_{slp} \ddot{u}_{slp,i} = F_{r,i} - F_{s,i} + m_{slp} g \quad (27)$$

ここで、 $F_{r,i}$ は軌道パッド作用力であり、 g は重力加速度である。軌道パッド作用力を次式の polynomial chaos 展開で与えておき、

$$F_{r,i} = \sum_{K=1}^{N_{PC}} \phi_K F_{r,i,K} \quad (28)$$

式 (25), (26), (28) を式 (27) に代入し, polynomial chaos ϕ_N を両辺に乗じて確率空間で重み付き内積をとると, polynomial chaos の直交性から次式を得る.

$$m_{slp}\ddot{u}_{slp,i,K} = \delta_{1K}m_{slp}g + F_{r,i,K} - F_{s,i,K} \quad (29)$$

(3) 軌道パッド作用力

ルール・まくらぎ間作用力 $F_{r,i}(i = 1, 2, \dots, N_{slp})$ は, Voigt ユニットを用い次式で評価する.

$$F_{r,i} = k_r(u_{r,i} - u_{slp,i}) + \eta_r(\dot{u}_{r,i} - \dot{u}_{slp,i}) \quad (30)$$

ここで, k_r , η_r はそれぞれ軌道パッドのばね定数, 減衰定数であり, $u_{r,i}$ は i 番軌道パッド直上のルール変位である. $F_{r,i}$, $u_{slp,i}$ と同様に, レール変位 $u_{r,i}$ を次式の polynomial Chaos 展開しておく,

$$u_{r,i} = \sum_{K=1}^{N_{PC}} \phi_K u_{r,i,K} \quad (31)$$

式 (25), (28), (31) を式 (30) に代入し, polynomial chaos ϕ_N を両辺に乗じて確率空間で重み付き内積をとると, polynomial chaos の直交性から次式を得る.

$$F_{r,i,k} = k_r(u_{r,i,K} - u_{slp,i,K}) + \eta_r(\dot{u}_{r,i,K} - \dot{u}_{slp,i,K}) \quad (32)$$

(4) レール

レールの動的応答は, Euler はりモデルで表現し, レール・車輪接触力は移動集中荷重, 軌道パッド作用力は集中荷重として離散的に作用するものとする. Hamilton の原理より,

$$\begin{aligned} & \int_0^L E_r I_r u_r'' \delta u_r'' dx + \int_0^L \rho_r A_r \ddot{u}_r \delta u_r dx \\ &= \sum_{j=1}^{N_{wh}} P_j(t) \delta u_r(x_{0,j} + ct) - \sum_{j=1}^{N_{slp}} F_{r,i}(t) \delta u_r(a_j) \end{aligned} \quad (33)$$

を得る. ここで, E_r , I_r , ρ_r , A_r はそれぞれレールの Young 率, 断面 2 次モーメント, 質量密度, 断面積であり, P_j はレール・車輪接触力, u_r はレールたわみ, δu_r は u_r の仮想成分である. $x_{0,j}$ は j 番目の車輪の初期位置座標, a_j は j 番目のまくらぎ位置の座標, c は車輪の走行速度である.

式 (33) に有限要素法を適用すると, 次の連立常微分方程式を得る.

$$[M_r]\{\ddot{u}_r\} + [K_r]\{u_r\} = [T]\{P\} - [G]\{F_r\} \quad (34)$$

ここで, $\{u_r\}$ はレールの節点変位ベクトル, $\{P\}$ は各車輪のレール・車輪接触力を成分として収納したベクトル, $\{F_r\}$ は軌道パッド作用力 $F_{r,i}$ を成分とするベ

クトルであり, $[M_r]$, $[K_r]$, $[T(t)]$, $[G]$ は次式で定義する.

$$\begin{aligned} [M_r] &= \sum_{e=1}^{N_e^{(r)}} \int_{\Omega_r^{(e)}} \rho_r A_r [N_{(r)}]^T [N_{(r)}] dx \\ [K_r] &= \sum_{e=1}^{N_e^{(r)}} \int_{\Omega_r^{(e)}} E_r I_r [N_{(r)}'']^T [N_{(r)}''] dx \\ [T] &= \sum_{e=1}^{N_e^{(r)}} \int_{\Omega_r^{(e)}} [N_{(r)}(x_0 + ct)]^T dx \\ [G] &= \sum_{e=1}^{N_e^{(r)}} \int_{\Omega_r^{(e)}} [N_{(r)}(a)]^T dx \end{aligned} \quad (35)$$

なお, $x_0 = \{x_{0,1}, x_{0,2}, \dots, x_{0,j}, \dots, x_{0,N_{wh}}\}$, $a = \{a_1, a_2, \dots, a_j, \dots, a_{N_{slp}}\}$ であり, $N_e^{(r)}$ はレールの有限要素総数, $[N_r]$ はレールの各要素での補間関数を成分に持つ行列, $[N_r'']$ は $[N_r]$ の 2 回微分からなる行列である.

式 (35) において, 他の構成要素の場合と同様に, $\{u_r\}$ と $\{P\}$ を次式のように polynomial chaos 展開を定義しておく.

$$\{u_r\} = \sum_{K=1}^{N_{PC}} \phi_K \{u_{r,K}\}, \quad \{P\} = \sum_{K=1}^{N_{PC}} \phi_K \{P_K\} \quad (36)$$

式 (28), (36) を式 (34) に代入し, polynomial chaos ϕ_N を両辺に乗じて確率空間で重み付き内積をとると, polynomial chaos の直交性から次式を得る.

$$\begin{aligned} [M_r]\{\ddot{u}_{r,K}\} + [K_r]\{u_{r,K}\} \\ = [T]\{P_K\} - [B]\{F_{r,K}\} \end{aligned} \quad (37)$$

(5) 車輪およびレール・車輪接触力

質点で動的応答を表現した車輪には, 上載荷重 P_w , 車輪重量 $m_{wh}g$, 車輪・レール間接触力 P_i ($i = 1, 2, \dots, N_{wh}$) が作用するものとする. このとき, 車輪の運動方程式は次のように記述できる.

$$m_{wh}\ddot{u}_{wh,i} = P_w - P_i + m_{wh}g \quad (38)$$

ここで, m_{wh} は車輪質量, $u_{wh,i}$ は i 番目の車輪の鉛直変位である. 他の構成要素と同様, 動的応答 $u_{wh,i}, P_i$ に Polynomial Chaos 展開を適用する.

$$u_{wh,i} = \sum_{K=1}^{N_{PC}} \phi_K u_{wh,i,K}, \quad P_i = \sum_{K=1}^{N_{PC}} \phi_K P_{i,K} \quad (39)$$

式 (39) を式 (38) に代入し, polynomial chaos ϕ_N を両辺に乗じて確率空間で重み付き内積をとると, polynomial chaos の直交性から次式を得る.

$$m_{wh}\ddot{u}_{wh,i,K} = -P_{i,K} + \delta_{1K}(P_w + m_{wh}g) \quad (40)$$

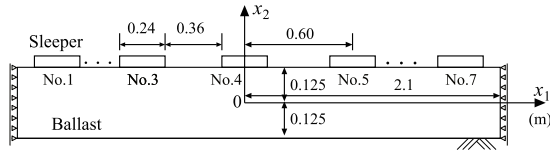


図-2 バラスト道床部の解析モデル

4. バラスト道床における複数の材料物性値の空間的ばらつきが軌道各部の動的応答に及ぼす影響

(1) 解析条件

バラスト道床における複数の材料物性値の空間的ばらつきが軌道各部の動的応答に及ぼす影響を検討するために、前節で示した手法を用いて車輪・軌道系の連成振動解析を行う。

軌道は、レールを 50kgN レール、まくらぎを PC まくらぎとしたバラスト軌道を対象とする。バラスト道床部の解析領域は、図-2 に示すような幅 4.2m、高さ 0.25m の長方形領域とし、領域の境界条件は、左右端では水平方向変位拘束、底面を鉛直・水平成分の完全拘束条件を設定する。まくらぎは 7 本 ($N_{slp} = 7$) が 0.6m 間隔に配置され、領域左から右へ順に No.1, No.2, ..., No.7 とナンバリングする。領域中央に位置するまくらぎは No.4 となる。解析対象領域の大きさは、車輪走行を考えると十分とはいえないが、スペクトル確率有限要素法を用いたバラスト上面変位の時間域 Green 関数の計算負荷が大きくなることから、今回は可能な限り解析領域を長く設定した解析条件として、上述の条件を設定することとした。車輪は、上載荷重を 65.170(kN) とし、まくらぎ解析領域左端から 0.6m の位置から右方向に 30m/s で走行させる。振動解析の時間刻み幅は $\Delta t = 5.0 \times 10^{-5}$ (s) とし、時間域 Green 関数の生成においても同条件に設定した。また、軌道各部の物性値および形状特性値は、既往の研究⁴⁾を参考に表-1 のように設定した。

バラスト道床の Young 率と質量密度の空間的ばらつきは、水平方向の空間的ばらつきのみを考慮する。共分散関数は次式で定義する。

$$C_{E_b}(x_1; y_1) = \sigma_{E_b}^2 \exp\left(-\frac{|x_1 - y_1|}{b_{E_b}}\right) \quad (41)$$

$$C_{\rho_b}(x_1; y_1) = \sigma_{\rho_b}^2 \exp\left(-\frac{|x_1 - y_1|}{b_{\rho_b}}\right) \quad (42)$$

ここで、 σ_{E_b} 、 σ_{ρ_b} はそれぞれバラスト材の Young 率、質量密度の標準偏差、 b_{E_b} 、 b_{ρ_b} はそれぞれバラスト材の Young 率、質量密度の空間的ばらつきに関する相関長さであり、 $\sigma_{E_b} = 0.1\bar{E}_b$ 、 $\sigma_{\rho_b} = 0.1\bar{\rho}_b$ 、 $b_{E_b} = b_{\rho_b} = 0.25$ (m) とした。

表-1 軌道各部の物性値の設定

(a) レール	
断面二次モーメント	$1960 \times 10^{-8} [\text{m}^{-4}]$
Young 率	210 [GPa]
質量密度	7850 [kg/m^3]
断面積	$64.29 \times 10^{-4} [\text{m}^2]$
(b) 車輪	
車輪質量	350 [kg]
上載荷重	65.170 [kN]
接触ばね定数	2 [GN/m]
(c) 軌道パッドおよびまくらぎ・道床間の物性値	
軌道パッドばね定数	110 [MN/m]
軌道パッド減衰定数	98 [kNsec/m]
まくらぎ・道床間ばね定数	10 [GN/m]
まくらぎ・道床間減衰係数	98 [kNsec/m]
(d) バラスト道床	
Young 率 E の期待値	88 [MPa]
Poisson 比	0.28
質量密度 ρ の期待値	$1.7 \times 10^3 [\text{kg}/\text{m}^3]$
Rayleigh 減衰パラメータ	$\alpha = 0, \beta = 1.0 \times 10^{-5}$

また、式 (4) における Karhunen-Loeve 展開の展開項数は $N_E = N_\rho = 4$ 、式 (12) における Karhunen-Loeve 展開の展開項数は $N_{KL} = 4$ に設定した。Polynomial chaos 展開の次数は 1 次としたため、polynomial chaos 展開の項数は、 E_b と ρ_b とが互いに独立の場合には $N_{PC} = N_E + N_\rho + 1 = 9$ 、完全相関の場合には $N_{PC} = N_{KL} + 1 = 5$ としている。このとき、polynomial chaos は、互いに独立の場合には、

$$\begin{aligned} \phi_1 &= 1, \phi_2 = \xi_1, \phi_3 = \xi_2, \phi_4 = \xi_3, \phi_5 = \xi_4, \\ \phi_6 &= \zeta_1, \phi_7 = \zeta_2, \phi_8 = \zeta_3, \phi_9 = \zeta_4 \end{aligned} \quad (43)$$

で与えられ、完全相関の場合には、

$$\phi_1 = 1, \phi_2 = \xi_1, \phi_3 = \xi_2, \phi_4 = \xi_3, \phi_5 = \xi_4 \quad (44)$$

で与えられる。

(2) まくらぎ・道床間作用力

まず、まくらぎ・道床間作用力に対するバラスト道床の Young 率・質量密度の空間的ばらつきの影響について検討する。図-3 は、解析領域中央に配置されたまくらぎ (No.4 まくらぎ) 位置におけるまくらぎ・道床間作用力の期待値、標準偏差と車輪走行位置座標との関係を図示したものである。なお、図の縦軸は、左側は期待値、右側は標準偏差の大きさを測るものとなっており、まくらぎ No.4 の直上に車輪が到達した時点では

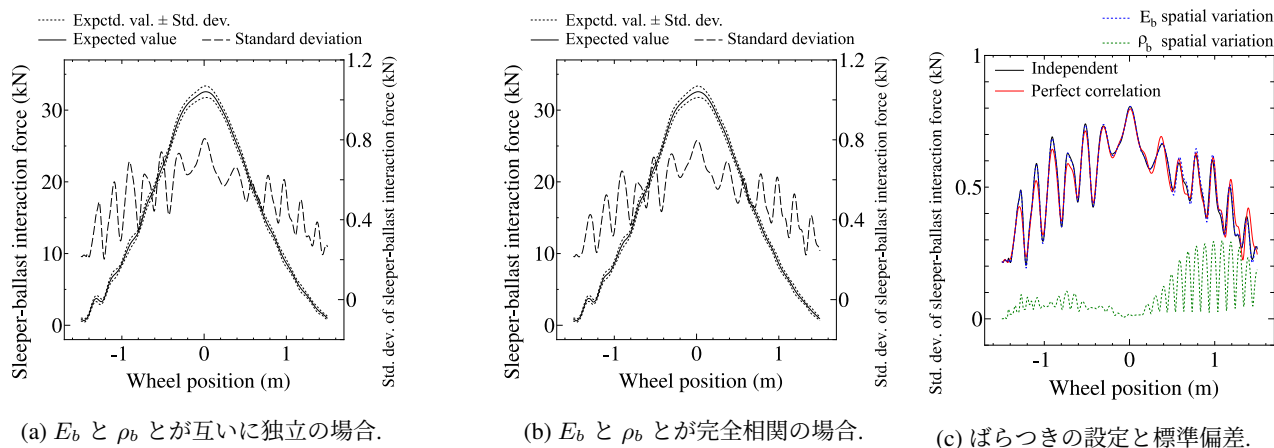


図-3 まくらぎ・道床間作用力の期待値、標準偏差と車輪走行位置座標の関係（まくらぎ No.4, 走行速度 $c=30\text{m/s}$, $\sigma_{E_b} = 0.1E_b$, $\sigma_{\rho_b} = 0.1\rho_b$ ）.

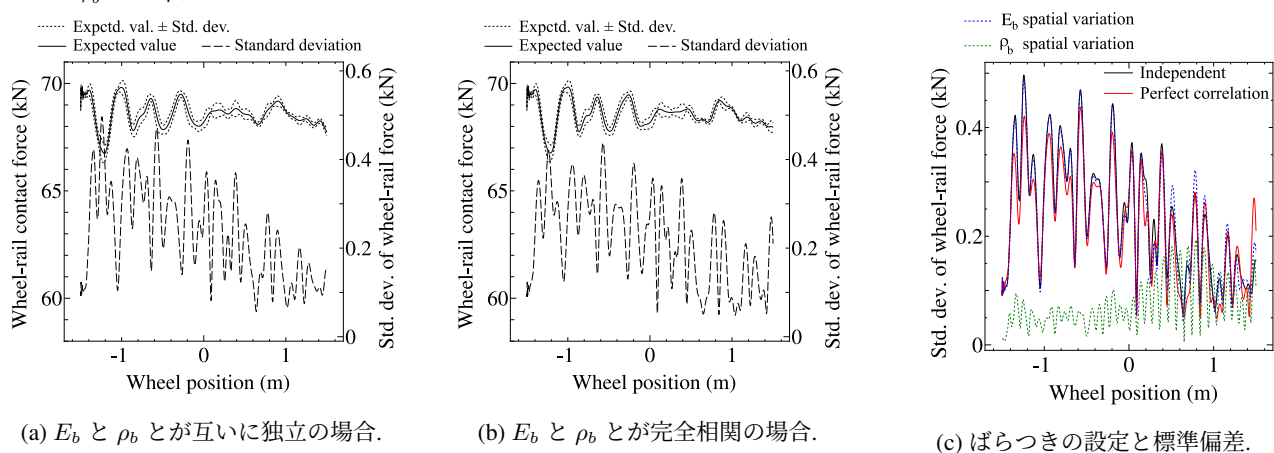


図-4 レール・車輪接触力の期待値、標準偏差と車輪走行位置座標の関係（まくらぎ No.4, 走行速度 $c=30\text{m/s}$, $\sigma_{E_b} = 0.1E_b$, $\sigma_{\rho_b} = 0.1\rho_b$ ）.

位置座標は $x_1 = 0$ となる．解析結果から，Young 率と質量密度のばらつきがいずれも変動係数 10%相当であるのに対し，まくらぎ・道床間作用力の解析結果では 3%程度のばらつきが発現している．期待値では車輪の始動時の過度応答が若干残っているが，ある程度車輪が走行することで過度応答は小さくなり，観測位置直上に車輪が到達した時点で最大作用力が発生している．標準偏差についても観測位置直上に車輪が到達したところで最大値を示す．標準偏差では短い周期で変動する成分が認められるが，この成分は低速走行時には低減する．そのため，車輪の走行速度の上昇により動的作用が大きくなることで発生する変動成分と考えることができる．なお，Young 率と質量密度の空間的ばらつきを考慮する場合，期待値・標準偏差のいずれについても，2 種類の相関の与え方の影響は非常に小さく，互いに独立，完全相関いずれの場合でも解析結果から評価されるばらつきの度合いはほぼ同程度であることがわかる．この原因は，図-3(c)に示すように，質量密度のばらつきの影響は非常に小さく，解析結果のばら

つきはもっぱら Young 率の空間的ばらつきの度合いにより決まっていることも一因と考えられる．質量密度のばらつきの影響が Young 率のばらつきの影響に比べて非常に小さいことの原因は不明である．まくらぎ・道床間作用力が材料物性値のばらつきを考慮するバラスト道床に直接作用する力であることから，減衰の影響やバラスト道床におけるまくらぎの敷設状態のモデル化の影響などについて不明な点も多く，これらについては今後の検討課題としたい．

なお，本論文では紙面の都合上割愛するが，軌道パッド作用力の期待値と標準偏差についても，同様の傾向を示す結果を得た．ただし，標準偏差における短い周期での応答の変動については，まくらぎ・道床間作用力の場合と比べ振幅が小さくなることを申し添えておく．

(3) レール・車輪接触力

次に，レール・車輪接触力に対するバラスト道床の Young 率と質量密度の空間的ばらつきの影響について検討する．図-4 は，レール・車輪接触力の期待値，標準偏差と車輪走行位置座標との関係を図示したもので

ある。レール・車輪接触力は、文献⁴⁾でも言及されているように、入力情報のばらつきを考えているバラスト道床から構成部材による隔たりが大きいこともあり、解析結果に含まれるばらつきの度合は非常に小さい。また、車輪始動時の過度応答の低減とともに、接触力の標準偏差が変動しながら減少する傾向を示している。解析結果からは、変動係数 10% 相当の Young 率・質量密度のばらつきに対して、レール・車輪接触力では変動係数に換算して 1% 程度以下のばらつきしか発現していない。レール・車輪接触力の標準偏差にも高周波の変動応答が認められ、この応答の周期はまくらぎ・道床間作用力の標準偏差において観測されるものよりも短い。応答が走行速度の上昇によって増幅する傾向は、まくらぎ・道床間作用力と同様である。なお、バラスト道床の Young 率と質量密度の空間的ばらつきの相関度合いの影響については、まくらぎ・道床間作用力の場合と同様、互いに独立、完全相関のいずれの場合も接触力の期待値、標準偏差には大きな違いは認められない、Young 率のみ、または質量密度のみ空間的ばらつきを考慮した場合の結果と比較すると、今回検討対象とした問題設定では、バラスト道床の Young 率の空間的ばらつきの影響が卓越しており、軌道振動解析結果においてバラスト道床の材料物性値のばらつきの影響を考慮する際には、Young 率のばらつきを検討することで十分である結論を得た。なお、まくらぎ・道床間作用力と同様、減衰やまくらぎ敷設状態のモデル化が動的応答へのばらつきの伝播・発現に及ぼす影響については不明な点も多く、今後の検討課題としたい。

5. おわりに

本研究では、バラスト道床における複数の材料物性値、特に Young 率と質量密度の空間的ばらつきが車輪・軌道系の連成振動解析結果、特にまくらぎ・道床間作用力および車輪・レール接触力に及ぼす影響について、数値実験を通して検討した。数値実験では、バラスト道床の Young 率と質量密度とが独立の場合、および完

全相関の場合を検討対象とした。その結果、今回対象とする解析条件は走行速度 100km/h 程度を想定したものであるが、衝撃応答の発生源は考慮していないこともあって、車輪走行時の動的作用の影響が比較的小さく、バラスト道床の物性値の空間的ばらつきの影響においては Young 率の空間的ばらつきの影響が支配的であった。そのため、バラスト道床の Young 率と質量密度のばらつきが同一の空間相関構造を有するものと考えたうえで、完全相関、互いに独立のいずれとして取り扱っても、作用力の動的応答のばらつきの評価にはほとんど影響しないことがわかった。なお、今回は複数の材料物性値の空間的ばらつきが軌道各部の作用力の時刻歴応答に及ぼす影響を定量評価することを試みるにとどまっているが、周波数特性についての検討も必要と思われる。今後は、この点の検討を行うとともに、衝撃応答が発生する軌道条件下での軌道構成部材の物性値・形状特性値のばらつきの影響を検討することとしたい。

謝辞

本研究は JSPS 科研費 19K04572 の助成を受けたものです。

参考文献

- 1) Knothe, K. & Grassie, S.L.: Modelling of railway track and vehicle/track interaction at high frequencies. *Vehicle System Dynamics*, Vol.22, pp.209-262, 1993.
- 2) Koro, K., Abe, K., Ishida, K. & Suzuki, T.: Timoshenko beam finite element for vehicle-track vibration analysis and its application to jointed railway track. *Proc. Instn. Mech. Engrs., Part F*, Vol.218, pp.159-172, 2004.
- 3) Andersen, L. & Nielsen, S.R.K.: Vibration of a track caused by variation of the foundation stiffness. *Prob. Engrg. Mech.*, Vol.18, pp.171-184, 2003.
- 4) 渡邉あゆみ, 紅露一寛: バラスト軌道の振動応答に及ぼすバラスト材の弾性係数の空間的ばらつきの影響, 土木学会論文集 A2 (応用力学), Vol.72(2), pp.I.265 - I.276, 2017.
- 5) 紅露一寛, 阿部和久, 石田 誠, 鈴木貴洋: レール継目部の衝撃応答解析における道床・路盤部のモデル化の影響. 土木学会応用力学論文集, Vol.7, pp.1313-1323, 2004.
- 6) Ghanem, R.G. & Spanos, P.G.: Stochastic finite elements. Dover, 1991.

(Received April 2, 2021)

(Accepted June 4, 2021)

WHEEL-TRACK VIBRATION ANALYSIS OF BALLASTED TRACK WITH SPATIAL VARIATION OF BALLAST MATERIAL PARAMETERS

Kazuhiro KORO and Kazuhisa ABE

The influence of spatial variation of ballast material parameters, Young's modulus and density, on vibration response of a ballasted railway track is investigated using the spectral stochastic FEM (SSFEM) based on a coupling of a beam-spring-mass system and a 2-D elastodynamic body. In the present SSFEM the dynamic response of ballast layer is considered using numerically generated Green's function. Through the SSFEM simulation on the vibration of the railway track with spatial 10% variation of Young's modulus and density, the variations of the sleeper-ballast force and the wheel-rail contact force are under a few percent of their maximum forces. The standard deviations of the forces are independent to the correlation of the two material parameters.