

論文 通り変位波形におけるバラツキが 軌道座屈強度の確率特性に及ぼす影響

阿部 和久¹・水野 雄太²・紅露 一寛³

¹正会員 新潟大学教授 工学部社会基盤工学プログラム (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地)
E-mail: abe@eng.niigata-u.ac.jp (Corresponding Author)

²新潟大学工学部 (研究当時) (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地)

³正会員 新潟大学教授 工学部社会基盤工学プログラム (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地)
E-mail: kouro@eng.niigata-u.ac.jp

軌道の初期通り変位波形におけるバラツキが、飛び移り座屈時のレール温度(座屈強度)の確率分布特性に及ぼす影響について調べた。そのために、通り変位波形を所定の距離相関に従うランダム波形として多数生成し、数値軌道モデルを用いてモンテカルロシミュレーションを実施した。通り変位波形の距離相関における標準偏差と相関長を各々変化させて、それらが飛び移り座屈温度の確率分布に及ぼす影響について調べた。また、飛び移り座屈に基づいた軌道の安定性評価の有効性についても、座屈確率の観点から考察した。

Key Words: Monte Carlo simulation, probability density function, snap through buckling, rail thermal stress

1. はじめに

レール継ぎ目は軌道破壊や振動・騒音の原因となり軌道における弱点箇所の一つである。その解消にはロングレールの導入が有効となるものの、ロングレールは長区間にわたりまくらぎを介し道床によって拘束され、その中央部に不動区間を有するため、温度変化に伴うレール軸力の発生が不可避となる。その結果、夏季の高温時において軌道座屈を誘発する危険性が増す。したがって、ロングレール軌道では座屈の適切な管理と対策とが重要である。

軸力ゼロの状態からのレール相対温度(以下レール温度という)に対する軌道のつり合い経路(レール温度-たわみ曲線)は図-1の様に与えられ、極大点(A)から極小点(B)に至る間では不安定なつり合い状態が存在する。実際には、前者にまでレール温度が到達すると安定なつり合い経路が消失するため、力学状態は安定解を与えるC点に飛び移り、その結果大きなレールたわみが瞬時に発生することとなる。このような座屈形態を飛び移り座屈と呼ぶ。

従来、軌道管理上の座屈安定性は、B点の最低座屈強さ(温度)に基づいて評価されてきた¹⁾。当該点におけるレール温度は不安定解がとり得る最低温度を与えるため、レール温度がその値を超えることの無い様に座屈耐力を確保することで座屈発生を確実に防ぐことができる。しかし、最低座屈強さと飛び移り座屈点におけるレール温度との間には少なからず開きが有り、加えて座屈発生までは軌道に大きな変位が生じないこと

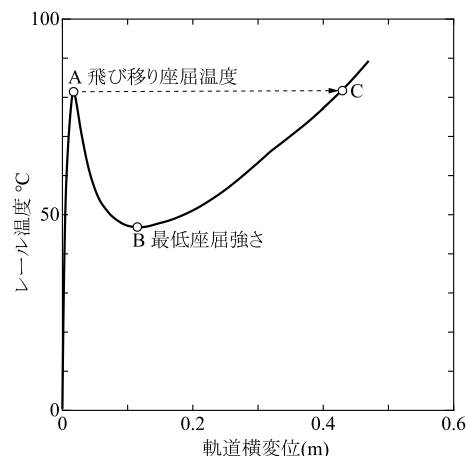


図-1 軌道横変位のつり合い経路の例

から、本来は飛び移り座屈温度に基づき軌道安定性を評価するのが合理的と考えられる。そのため近年、飛び移り座屈に基づいた軌道の安定性評価に向けた検討がなされ始めている^{2),3)}。

なお、完全に真直ぐな軌道の場合、図-2に示す様に座屈形態は不安定分岐座屈⁴⁾で与えられる。一方、通り変位(初期不整)存在下では、それが上述の飛び移り座屈へと変化する。当該の分岐形態は初期不整鋭敏性を有し、わずかな通り変位下であっても、飛び移り座屈時の温度は分岐座屈温度に比べ大きく低下する⁵⁾(図-2)。したがって、座屈安定性評価の際には、レール通り変位における初期不整の適切な考慮が必要となる。

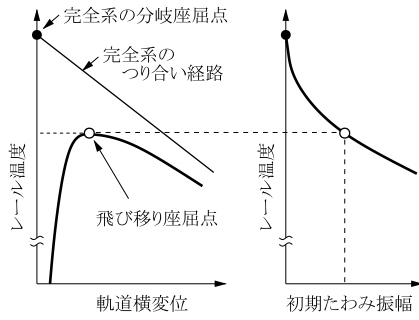


図-2 飛び移り座屈の初期不整鋭敏性

実軌道の通り変位はランダムな波形を有している。しかし従来は、座屈波形に準ずる特定の通り変位波形設定の下、確定論的な座屈温度の算出が一般に行われている。したがって、従来の飛び移り座屈の検討において、果たして現実の軌道座屈耐力が適切に評価されているのか疑問である。

上述のように、座屈温度がランダムな通り変位波形に強く依存するという事実に鑑みると、それ自体も確率論的に議論するのが適切に思われる。加えて、近年は精緻な数値モデルにより軌道を表現可能となっており、特定の波形に基づいて検討する必然性は、もはや無いと考えられる。

そこで本研究では、数値軌道モデルを対象に、レールに対して所定の統計的バラツキを有する通り変位波形を設定して軌道座屈のモンテカルロシミュレーションを実施し、座屈温度(強度)の確率分布を求める。なお、軌道構造には様々な不確定因子が存在するが、飛び移り座屈は特に通り変位に対して鋭敏であると考えられるため、その統計量と座屈確率との関係に焦点を絞り検討する。具体的には、ランダムな通り変位波形生成の際に規定する距離相関の標準偏差と相関長の二つのパラメータを各々変化させ、それらの統計量が座屈温度の確率密度関数や所定の座屈確率を与えるレール温度などに及ぼす影響について調べ、さらに飛び移り座屈温度に基づいた軌道安定性評価の有効性について検討する。

2. 軌道座屈の初期不整鋭敏性

通り変位が軌道座屈にどのような影響を及ぼすのかを理解する上で、当該の座屈形態が有する初期不整鋭敏性は重要な力学特性である。ここでは、その概略について述べる。なお、本研究では直線ロングレール軌道を対象とする。

道床横抵抗力を軌道に沿って連続分布する作用力により近似すると、左右レールから構成される軌道系の

横方向変位(たわみ)に関するつり合い式は次式で与えられる。

$$EIw_{LR}'''' + N(w_{LR}'' + w_{LR0}'') + g(w_{LR}) = 0 \quad (1)$$

ここで、 w_{LR} は左右レールの弾性たわみの和、 w_{LR0} は左右レールの初期通り変位の和、 $(\quad)'$ は軌道長手方向の座標 x に関する微分を表し、 EI はレール 1 本当たりの曲げ剛性、 N はレール軸力(圧縮を正)、 g はまくらぎを連続支持モデルで近似した際の単位長さあたりに作用する道床横抵抗力(レール 2 本分)である。なお本節では、レール温度ではなく、軸力に基づいて定式化する。

道床横抵抗力 g が次の非線形性を有するものとする⁶⁾。

$$g(w_{LR}) = g_0 \frac{w_{LR}/2}{a + |w_{LR}|/2} \quad (2)$$

ここで、 g_0 は最終道床横抵抗力、 a は $g = g_0/2$ を与える変位 ($w_{LR}/2$) である。

座屈発生前後における、たわみが比較的小さな状態を対象とし、式 (2) を $w_{LR} = 0$ の近傍で次式により多項式近似する。

$$g \approx k_0 w_{LR} - k_n |w_{LR}| w_{LR} \quad (3)$$

ここで、 k_0, k_n はそれぞれ式 (2) の w_{LR} に関する展開係数であり、具体的には次式で与えられる。

$$k_0 = \frac{g_0}{2a}, \quad k_n = \frac{g_0}{4a^2} \quad (4)$$

式 (3) を (1) に代入すると次式を得る。

$$EIw_{LR}'''' + N(w_{LR}'' + w_{LR0}'') + k_0 w_{LR} - k_n |w_{LR}| w_{LR} = 0 \quad (5)$$

式 (5) の初期通り変位として、次式で与えられる波数 k の波形成分を考える。

$$w_{LR0}(x) = W_0 \cos kx \quad (6)$$

ここで、 W_0 は波形振幅である。

式 (5) では係数 k_n に関する項が w_{LR} の非線形項となっているので、式 (6) の初期通り変位に対する解は本来 k 以外の波数成分も持つ。しかし以下では十分に小さな変位を対象とし、 w_{LR} の主要項が次式の様に波数 k の成分で与えられるものと仮定する。

$$w_{LR}(x) = W \cos kx \quad (7)$$

ここで、 W は変位振幅である。

式 (6), (7) を (5) に代入して、 $|\cos kx| \cos kx \approx 8/3\pi \cdot \cos kx$ と近似すると次式を得る。

$$(EI k^4 - N k^2 + k_0)W - N k^2 W_0 - \frac{8k_n}{3\pi} W^2 = 0 \quad (8)$$

式 (8) より、完全系 ($W_0=0$) のつり合い式は次の 2 式で与えられる。

$$\begin{aligned} W &= 0, \\ \frac{8k_n}{3\pi} W &= EI k^4 - N k^2 + k_0 \end{aligned} \quad (9)$$

式(9)第2式より、自明な解 $W=0$ の基本つり合い経路上における分岐座屈軸力 N_{cr} は次式で与えられる。

$$N_{cr} = EI k^2 + \frac{k_0}{k^2} \quad (10)$$

式(10)の座屈軸力は波数 k に依存している。実際には、 N_{cr} の最小値 N_m が分岐座屈軸力を与える。式(10)より、 N_m およびその時の波数 k_m は次式で与えられる。

$$N_m = 2\sqrt{k_0 EI}, \quad k_m = \sqrt[4]{\frac{k_0}{EI}} \quad (11)$$

式(11)より、分岐座屈軸力と座屈モードの波数は、レールの曲げ剛性 EI と $w_{LR} = 0$ における道床横抵抗力の接線剛性 k_0 で決まることわかる。

また軸力 N を、式(10)の分岐座屈軸力 N_{cr} とそこからの増分 ν に分離して、 $N = N_{cr} + \nu$ と表すと、式(9)第2式より次式を得る。

$$\frac{8k_n}{3\pi} W = -k^2 \nu \quad (12)$$

式(12)より、完全系における分岐座屈後のつり合い経路は次式で与えられる。

$$N = N_{cr} - \frac{8k_n}{3\pi k^2} W \quad (13)$$

この分岐点からのつり合い経路は、図-2に示した「完全系のつり合い経路」に対応するものである。

次に、初期通り変位振幅 W_0 がゼロでない場合について考える。式(8)において、 $N = N_{cr} + \nu$ とおくと次式を得る。

$$(EI k^4 - N_{cr} k^2 + k_0 - \nu k^2) W - (N_{cr} + \nu) k^2 W_0 - \frac{8k_n}{3\pi} W^2 = 0 \quad (14)$$

ここで、 $EI k^4 - N_{cr} k^2 + k_0 = 0$ であり、また $\nu W_0 \approx 0$ と近似すると次式を得る。

$$k^2 \nu = -N_{cr} k^2 \frac{W_0}{W} - \frac{8k_n}{3\pi} W \quad (15)$$

式(15)は $W_0 \neq 0$ におけるつり合い経路を与える。飛び移り座屈は、当該経路上の極大点で発生する。そこで、式(15)の両辺を W について微分し、 $d\nu/dW = 0$ とおき、飛び移り座屈点における W を求めると次式を得る。

$$W = \frac{k}{2} \left(\frac{3\pi N_{cr}}{2k_n} W_0 \right)^{1/2} \quad (16)$$

式(16)をつり合い式(15)に代入し、 ν について解くと次式を得る。

$$\nu = -\frac{4}{k} \sqrt{\frac{2k_n N_{cr}}{3\pi}} W_0^{1/2} \quad (17)$$

式(17)を $N = N_{cr} + \nu$ に代入し、式(11)の最小分岐座屈軸力を与える波数 k_m を波数 k として用いると、次に示す飛び移り座屈時の軸力 N と初期通り変位振幅 W_0 との関係式が得られる。

$$N = N_m - 8\sqrt{\frac{k_n EI}{3\pi}} W_0^{1/2} \quad (18)$$

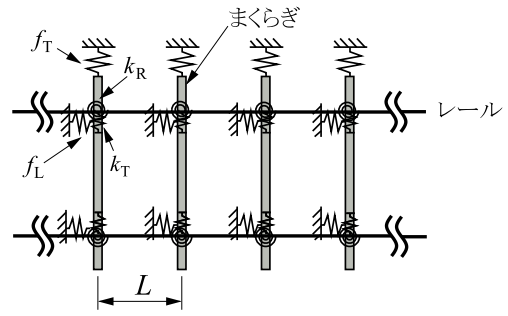


図-3 軌道のモデル化

式(18)より、飛び移り座屈時の軸力は、 W_0 の1/2乗に比例して低下することがわかる。この座屈荷重低下曲線は、図-2の右図に対応しており、僅かな W_0 の存在下でも座屈軸力が N_m から大幅に低下することを示唆している。このような座屈特性のことを初期不整鋭敏性と呼ぶ。

また、式(18)右辺第2項目には、道床横抵抗力における非線形項 k_n が含まれている。このことより、当該の非線形性の存在によって、軌道の座屈形態が初期不整に鋭敏な飛び移り座屈で与えられることが理解できる。なお k_n が正値をとる条件は、軌道横変位と道床横抵抗力との関係が上に凸な曲線で与えられる場合に対応する。よって、道床横抵抗力が式(2)に示される様な上限値 g_0 に漸近するものではなく、 w_{LR} と共に無限に増大する曲線で与えられる場合でも、それが上に凸である限り飛び移り座屈を生ずることがわかる。このことは軌道座屈の数値シミュレーションによって容易に確認することができる。

式(11)より、分岐座屈モードは一定波長・一定振幅の波形で与えられる。しかし、実軌道で認められる座屈では、局所的に振幅が大きくなる波形が現れる。これは局所化と呼ばれる破壊現象の一つとして解釈することができる。なお、その詳細については文献5)を参照されたい。

3. モンテカルロシミュレーションの概要

(1) 軌道のモデル化

左右レールとまくらぎから構成される軌きょうを図-3の様にモデル化する。レールは、横方向たわみと長手方向の伸縮を考慮した Euler ばりにより表現する。まくらぎは等間隔 L で配置し、横方向と軌道長手方向変位を考慮した剛な棒として与える。レール締結部には、回転バネ k_R と横方向バネ k_T を設定する。また、まくらぎに作用する道床横抵抗力 f_T と縦抵抗力 f_L について

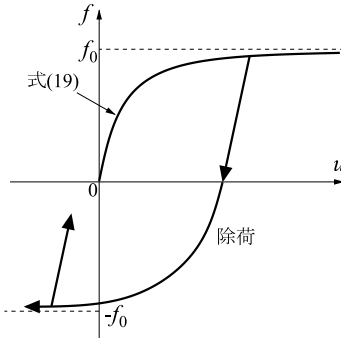


図-4 道床横・縦抵抗力の載・除荷曲線

は、式 (2) と同様に次の非線形式で与える。

$$\begin{aligned} f_T &= f_{0T} \frac{u_{ST}}{a_T + |u_{ST}|}, \\ f_L &= f_{0L} \frac{u_{SL}}{a_L + |u_{SL}|} \end{aligned} \quad (19)$$

ここで、 u_{ST}, u_{SL} はまくらぎの横変位と軌道長手方向変位、 f_{0T}, f_{0L} は最終道床横・縦抵抗力、 a_T, a_L は作用力が最終道床抵抗力の 1/2 を与える時の変位である。ただし、道床横抵抗力はまくらぎ 1 本分に対応するのに対し、道床縦抵抗力は図-3 に示す様にレール 1 本分 (まくらぎ 1/2 本分) に対応している。

なお、式 (19) の道床横・縦抵抗力とまくらぎ変位との関係は、図-4 の様な骨格曲線で与えられ、最終道床横・縦抵抗力 f_{0T}, f_{0L} に漸近する。また、除荷時は図中に示した様に、作用力がゼロになるまで初期剛性 ($f_{0T}/a_T, f_{0L}/a_L$) で戻り、その後骨格曲線に沿って逆方向に抵抗力が作用するように設定した。

(2) 通り変位波形の生成

本研究では、レールに所定の確率特性に従うランダムな通り変位波形を設定して、軌道の座屈解析を実施する。以下にその設定手順について簡単に述べる。

軌道検測装置により過去に取得された通り変位の 10m 弦正矢データ⁷⁾ から、原波形の距離に関する自己相関関数 (距離相関) は概ね次式で表すことができる。

$$R(x) = \sigma^2 e^{-(x/d)^2} \quad (20)$$

ここで、 σ と d は通り変位波形の標準偏差と相関長 (相関性が存在する距離の代表値) である。なお、ある区間において得られた既存の検測データに関しては、標準偏差と相関長がそれぞれ 1cm 以下、および 1.7m 程度と推定された。

長さ l の軌道区間を M 個のはり要素により、 x 軸方向に等分割する場合を考える。その際に、 i 番節点の x 座標 x_i を次式で与えるものとする。

$$x_i = i\Delta x, \quad (i = 0, \dots, M), \quad \Delta x = \frac{l}{M} \quad (21)$$

レール通り変位波形の x_i における値を w_{0i} とし、その離散データを成分に持つベクトルを $\{\mathbf{W}_0\}$ とおく。すると、当該ベクトルに関する分散・共分散行列 $[\mathbf{C}]$ は次式で与えられる。

$$[\mathbf{C}] = E(\mathbf{W}_0 \cdot \mathbf{W}_0^T) \quad (22)$$

ここで、 $E(\cdot)$ は期待値を、また $(\cdot)^T$ は転置を表す。

式 (20) より、行列 $[\mathbf{C}]$ の成分 c_{ij} は次式で与えられる。

$$c_{ij} = \sigma^2 e^{-(|i-j|\Delta x/d)^2} \quad (23)$$

$[\mathbf{C}]$ に関して次の固有値問題を設定する。

$$[\mathbf{C}]\{\phi_i\} = \lambda_i\{\phi_i\} \quad (24)$$

なお、 $[\mathbf{C}]$ は実対称行列であるので、固有値 λ_i は実数値をとり、固有ベクトルは互いに直交する。よって、固有ベクトルを規格化 ($\|\phi_i\| = 1$) すると、当該ベクトルは正規直交基底を構成する。

通り変位波形ベクトル $\{\mathbf{W}_0\}$ を、期待値がゼロであり、且つ式 (22) の分散・共分散行列で与えられる正規確率過程に従うものとする、 $\{\mathbf{W}_0\}$ は次式により生成することができる⁸⁾。

$$\{\mathbf{W}_0\} = [\Phi][\Lambda^{1/2}]\{\xi\} \quad (25)$$

ここで、 $[\Lambda^{1/2}]$ は正の固有値の平方根 $\sqrt{\lambda_i}$ を対角項に持つ対角行列、 $[\Phi]$ はそれに対応する固有ベクトル $\{\phi_i\}$ を縦ベクトル成分に持つ行列である。また、 $\{\xi\}$ は、期待値ゼロ、分散 1 の標準正規乱数を成分に持つベクトルである。

以上の手順により、左右レールそれぞれに対してランダムな通り変位波形を設定する。

(3) モンテカルロ法における軌道座屈解析

本研究では、式 (20) に従うランダムな通り変位波形を式 (25) に基づき多数生成し、各々の波形の下で軌道座屈解析を行い飛び移り座屈温度を求める、モンテカルロシミュレーションを実施する。

その際の軌道座屈解析では、有限変位理論に基づきレールをはり要素 (有限要素) で離散化する。なお、通り変位をランダムな波形で設定する場合、座屈発生箇所が事前に特定できないため、所定のはり要素節点のたわみを制御変数とした変位増分解析は適用できない。そこで、節点変位ベクトルとレール温度とで与えられる一般座標空間において弧長増分法⁹⁾ を適用し、つり合い経路上の飛び移り座屈点をレール温度の極大点として探索する手法を構築した。ただし、1 ステップ目のみ温度増分を規定し、それ以降におけるつり合い経路の探索方向を設定した。

(4) 確率密度関数の設定

モンテカルロシミュレーション結果より、座屈時のレール温度の確率密度関数を求める。軌道座屈においては、理論上座屈温度がとり得る最大値が式 (11) の分岐座屈点によって決まる。一方、最小値は最低座屈温度で与えられる。その値は通り変位形状に幾分依存すると考えられるが、以下のシミュレーション結果に示す様に、飛び移り座屈温度の下限値は概ね特定可能である。したがって、座屈温度の確率分布には上限と下限とが存在すると考えて良い。そこで、確率密度関数には、有限な分布域を持つベータ分布を適用することとした。

ベータ分布¹⁰⁾の確率密度関数 $p(t)$ は次式で与えられる。

$$p(t) = \frac{(t - t_1)^{q-1}(t_2 - t)^{r-1}}{B(q, r)(t_2 - t_1)^{q+r-1}}, \quad (t_1 \leq t \leq t_2), \quad (26)$$

$$B(q, r) = \frac{\Gamma(q)\Gamma(r)}{\Gamma(q+r)}$$

ここで、 t_1, t_2 は分布域の下限と上限、 q, r は分布のパラメータ、 $\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数である。

q, r は、座屈温度分布の期待値 μ_t と分散 σ_t^2 から次式により決定することができる。

$$q = \frac{\mu_t - t_1}{t_2 - t_1} \left\{ \frac{1}{\sigma_t^2} (\mu_t - t_1)(t_2 - \mu_t) - 1 \right\}, \quad (27)$$

$$r = \frac{t_2 - \mu_t}{t_2 - t_1} \left\{ \frac{1}{\sigma_t^2} (\mu_t - t_1)(t_2 - \mu_t) - 1 \right\}$$

なお、モンテカルロシミュレーションにより得られる座屈温度の上限値は、式 (11) より得られる理論上の上限値に比べ低い値をとった。そのため、確率密度関数の分布域の上・下限値共に、シミュレーション結果に基づき適宜設定することとした。

(5) 異なる軌道長における座屈確率

本研究では一定の軌道長の下で座屈温度の確率分布を求める。なお、軌道長が異なれば、当然全区間にわたる座屈発生確率は異なるものとなる。ただし、ある軌道長の下で座屈確率が一旦得られたならば、異なる軌道長におけるそれは理論的に導出することができる。以下では、レール軸力が概ね一定値をとる不動区間において軌道座屈が発生するものと仮定して議論を進める。

長さ l_R の不動区間において、温度 t までに飛び移り座屈を生ずる確率 $P_{l_R}(t)$ は次式で与えられる。

$$P_{l_R}(t) = \int_{t_1}^t p_{l_R}(t) dt \quad (28)$$

ここで、 $p_{l_R}(t)$ は不動区間長が l_R の時に得られた座屈温度の確率密度関数である。

すると、当該軌道が温度 t まで座屈しない確率 $\bar{P}_{l_R}(t)$ は次式で与えられる。

$$\bar{P}_{l_R}(t) = 1 - P_{l_R}(t) \quad (29)$$

表-1 軌道系の各種設定値

EI	($\text{N}\cdot\text{m}^2$)	6.63×10^5
EA	(GPa)	1.32
α	($1/^\circ\text{C}$)	12×10^{-6}
L	(m)	0.6
k_T	(MN/m)	40.0
k_R	(kN·m/rad)	20.0
f_{0T}	(kN)	5.5
a_T	(mm)	1.0
f_{0L}	(kN)	2.5
a_L	(mm)	1.0

同様の力学状態にある長さ $n \times l_R$ の軌道が温度 t まで座屈しない確率は、 n 個ある長さ l_R の区間全てが座屈しない確率であるので、それは次式で与えられる。

$$\bar{P}_{nl_R}(t) = \bar{P}_{l_R}^n(t) = \{1 - P_{l_R}(t)\}^n \quad (30)$$

ただし、各区間における座屈発生は互いに独立であるものと仮定する。

したがって、不動区間長 $n \times l_R$ の軌道が温度 t 以下で座屈する確率は次式で与えられる。

$$P_{nl_R}(t) = 1 - \{1 - P_{l_R}(t)\}^n \quad (31)$$

また、確率密度関数は、式 (31) を微分することで次式によって与えることができる。

$$p_{nl_R}(t) = n\{1 - P_{l_R}(t)\}^{n-1} p_{l_R}(t) \quad (32)$$

4. 解析結果

(1) 軌道構造の解析条件

図-3 に示したとおり、軌道を左右レールと離散まくらぎから構成される軌きょうによりモデル化した。以下の解析では 50kN レールを想定し、レールや道床横・縦抵抗力に関する各種設定値を表-1 の様に与えた。なお表-1 において、 EA, α はレールの伸び剛性と線膨張係数である。

左右レール共にまくらぎ 1 区間 (0.6m) 当りをはり要素で 2 等分割し、軌道をまくらぎ 1200 区間 (720m) で与えた。軌道座屈解析において、レール両端に固定条件を課す場合、それによる力学条件の擾乱が座屈域や座屈形状などに影響を及ぼすことが懸念される。そのため本解析では、軌道 (レール) 両端は変位拘束せず、道床縦抵抗力の作用下で伸縮を許容する様に設定した。なお、その際の不動区間については、以下に示す解析例により確認する。

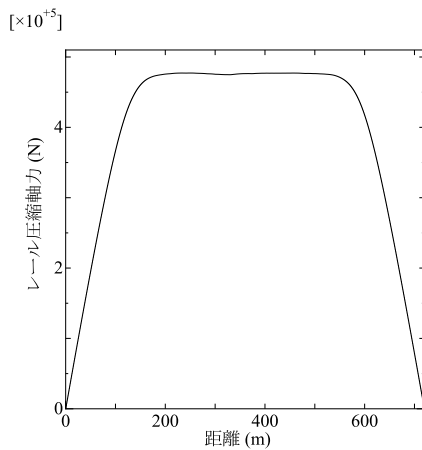


図-5 レール軸力分布の例 (レール温度 30℃)

(2) 通り変位波形の標準偏差が座屈確率に及ぼす影響

通り変位波形の距離相関式 (20) において、標準偏差 σ を 3~8mm の範囲で設定し、それが飛び移り座屈温度の確率分布等に及ぼす影響について調べる。なお、距離相関関数における相関長 d は 1.7m に固定した。

結果を示す前に、 $\sigma = 5\text{mm}$ で生成した通り変位波形の下で、レール温度 30℃ において得られたレールの軸力分布の一例を図-5 に示す。図より、レール両端の 200m 前後で軸力が一様に増減しており、可動区間を形成している様子が窺える。また、中央の 300m 程の範囲が不動区間となっていることが確認できる。

次に、モンテカルロシミュレーションにおける解析ケース数が、確率分布に及ぼす影響について検討する。 $\sigma = 4\text{mm}$ の場合を対象に、座屈解析を 100, 1000 および 5000 ケース行って得られた座屈確率 (累積分布関数 : レール温度とその温度以下で座屈を生ずる確率との関係) を図-6 に示す。図より、座屈確率が 10^{-3} (0.1%) の場合においても、100 ケースと 5000 ケースにおける温度差は 1℃ 程度であり、ケース数の影響が比較的小さいことが確認できる。よって、以下の計算では解析ケース数を 1000 に設定した。

通り変位波形の標準偏差と確率密度関数の分布形状との関係を図-7 に示す。図より、標準偏差が増加するにつれて、座屈温度の分布域が低温度側に移動していることがわかる。また、それと共に確率密度関数の分散も減少しており、最低座屈温度から飛び移り座屈温度までの温度差が次第に小さくなっている様子が窺える。通り変位の標準偏差 σ の変化に対する座屈温度分布域の低下度合いは、 σ が小さい程顕著となっている。このことより、ランダムな通り変位波形の場合、2. に述べた初期不整鋭敏性が通り変位波形の統計量である σ に反映されていることがわかる。

続いて、レール温度と座屈確率との関係に、通り変

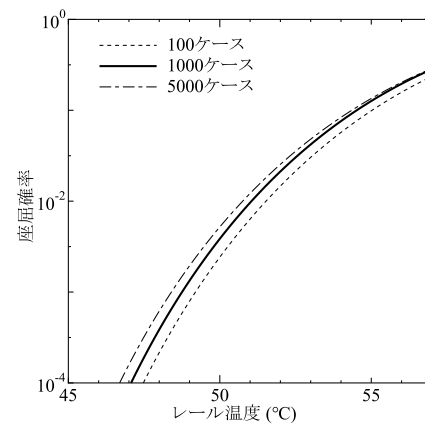


図-6 解析ケース数が座屈確率に及ぼす影響 ($\sigma = 4\text{mm}$)

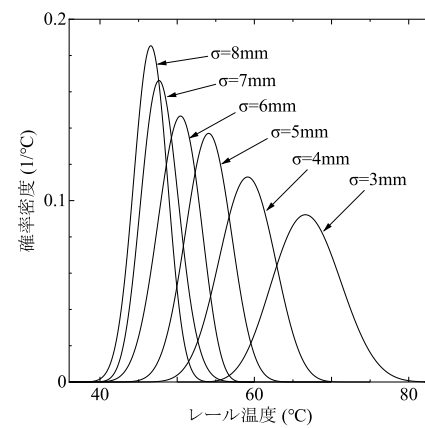


図-7 通り変位の標準偏差 σ が確率密度関数に及ぼす影響 ($d = 1.7\text{m}$)

位波形の標準偏差 σ が及ぼす影響を図-8 に示す。なお、図には $\sigma = 3, 4, 5, 8\text{mm}$ の場合を示した。確率密度関数と同様に、レール温度と座屈確率との関係は σ に大きく依存することが確認できる。また、図示の座屈確率の範囲内においては、標準偏差 σ の増加による座屈時のレール温度低下量は、座屈確率のレベルによらず概ね一定値を示しており、 $\sigma = 3\text{mm}$ と 8mm とでは、同じ座屈確率を与えるレール温度に 15℃ 以上の差が認められる。

図-8 における座屈温度の、最低座屈温度に対する安全余裕を議論するためには、最低座屈温度を把握しておく必要がある。図-9 は $\sigma = 5\text{mm}$ におけるレール変位とレール温度との関係の一例を示したものである。なお、通り変位はランダムな波形で与えられているため、座屈の際にレールたわみが増大する箇所を事前に特定することができない。そのため、図-9 の横軸は、各レール温度におけるレール節点変位の絶対最大値をプロットしたものとなっている。図-7 から、 $\sigma = 5\text{mm}$ では座屈温度低下が比較的大きく、確率密度関数の分布域の

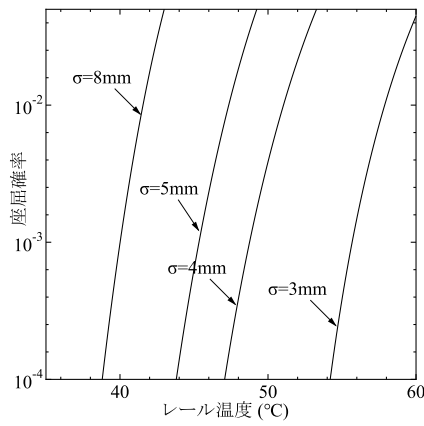


図-8 通り変位の標準偏差 σ がレール温度と座屈確率との関係に及ぼす影響 ($d=1.7\text{m}$)

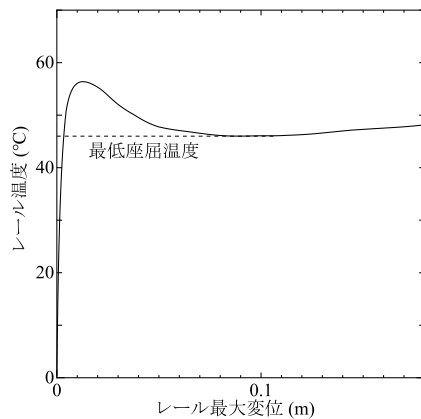


図-9 $\sigma=5\text{mm}$ の通り変位波形で得られた最低座屈温度の例 ($d=1.7\text{m}$)

下限値が、図-9 に示した当該の標準偏差 σ における最低座屈温度 (約 45℃) に比較的接近していることが窺える。ただし、図-8 の座屈レール温度が図-9 の最低座屈温度より低温領域にも存在していることから、本来それより低い温度をとるべき最低座屈温度も通り変位波形に依存して多少変動するものと推測される。その一方、 $\sigma=3\sim 5\text{mm}$ の範囲では、最低座屈強さは概ね 45℃程度であり、大きな差異は認められなかった。

図-8 より、 $\sigma=4\text{mm}$ の場合、例えば座屈確率 0.1% に対応するレール温度は約 49℃であり、上述の最低座屈温度に比べ 4℃程度の開きが存在している。一方、 $\sigma=3\text{mm}$ の場合では、座屈確率 0.1% に対応するレール温度が約 56℃であるのに対し、解析結果における最低座屈温度は約 45℃と推定されるので、11℃程の温度差を有している。この結果を見る限り、 σ が 3mm 程度と小さい軌道ではある程度の安全余裕が確保できているが、何より σ が 1mm 異なるだけで同じ座屈確率を与えるレール温度が 7℃も違うことから、飛び移り座屈に基づいた

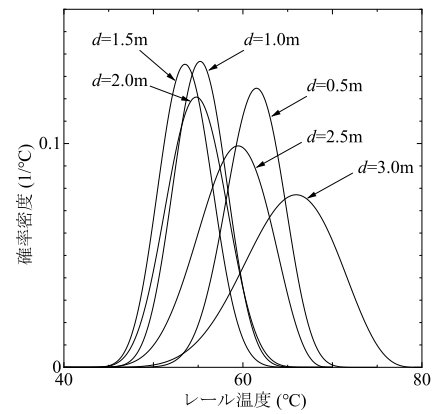


図-10 通り変位の相関長 d が確率密度関数に及ぼす影響 ($\sigma=5\text{mm}$)

安定性評価に際しては、通り変位波形の標準偏差の適切な把握が必要となることに留意すべきである。

(3) 通り変位波形の相関長が座屈確率に及ぼす影響

式 (20) における相関長 d が座屈確率に及ぼす影響について調べる。なお、通り変位波形の標準偏差 σ は 5mm で固定し、 d を 0.5m から 3.0m まで変化させた。得られた確率密度関数を図-10 に示す。

レール温度の分布域 (および最頻値) は $d=1.5\text{m}$ 付近で最小値を示している。これは、座屈波形の主要な波数成分が、 d を 1.5m 付近に設定した場合のランダム波形において最も多く含まれていることによるものと考えられる。ちなみに、式 (20) の距離相関に従う波形が有する波数成分特性は、距離相関の Fourier 変換 $S(k)$ (強度スペクトル) で評価でき¹¹⁾、それは次式で与えられる。

$$S(k) = \sqrt{\pi} d \sigma^2 e^{-(dk/2)^2} \quad (33)$$

すると、ある波数 k の下で S が最大となる相関長 d は、式 (33) より次式で与えられる。

$$d = \frac{\sqrt{2}}{k} \quad (34)$$

式 (11) で与えられる分岐座屈モードの波数を式 (34) に代入して、本解析条件下で S を最大にする相関長 d を求めると約 1.0m となる。飛び移り座屈時の座屈波形における主要な波数成分は、式 (11) で与えられる分岐座屈モードの波数に比べ幾分小さ目 (波長は長目) になると考えられる⁵⁾。したがって、その場合に S を最大化させる d は 1.0m より長くなり、図-10 の結果と概ね符合する。

最後に、レール温度と座屈確率との関係に、初期通り変位波形の相関長が及ぼす影響を図-11 に示す。相関長がレール温度と座屈確率の関係に及ぼす影響は、標準偏差に比べ小さい。それでも、 $d=0.5\text{m}$ と 1.5m とで 5℃以上の温度差が認められ、座屈安定性の評価に当り、

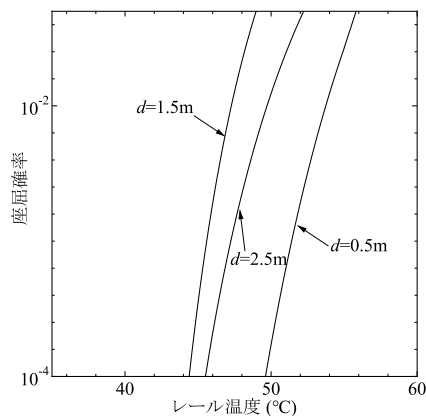


図-11 通り変位の相関長 d がレール温度と座屈確率との関係に及ぼす影響 ($\sigma=5\text{mm}$)

相関長の適切な把握も重要であることがわかる。

5. おわりに

軌道の通り変位波形におけるバラツキが、飛び移り座屈時のレール温度(座屈強度)の確率分布特性に及ぼす影響について検討した。そのために、通り変位波形を所定の距離相関に従うランダム波形で与え、数値軌道モデルによる座屈解析を実施した。さらに、当該解析を多数の通り変位波形に対し行い、座屈時におけるレール温度の確率分布を求めた。その結果、飛び移り座屈温度の確率分布における分散は決して小さくはなく、距離相関を規定する標準偏差と相関長の両者の影響を受け、特に前者に対して鋭敏であることがわかった。

また、所定の飛び移り座屈確率に対するレール温度と、最低座屈温度との差についても調べた。座屈確率の設定値にもよるが、両者間の差異は、4mm以上の通り変位標準偏差に対しては決して大きくはなかった。こ

れらの結果は軌道条件により多少変動するが、定性的傾向は変わらないものと考えられる。なお、本研究では通り変位の標準偏差に基づいて議論したので、例えば $\sigma=5\text{mm}$ の波形であっても、その値を上回る初期通り変位が存在している。そのため、通り変位の絶対最大値を 5mm で規定した場合に比べ、確率的に評価された安全余裕は小さくなる。今後は、通り変位波形振幅の最大値を規定した場合等についても検討する必要がある。

参考文献

- 1) 鉄道総合技術研究所 編：鉄道構造物等設計標準・同解説 軌道構造, 11 章 ロングレール, 丸善出版, 2012.
- 2) 西宮裕騎, 片岡宏夫: 座屈発生点を考慮したロングレールの座屈安定性の評価法に関する一考察, 鉄道工学シンポジウム論文集, 第 20 号, 9-15, 2016.
- 3) 藪中嘉彦, 高尾賢一, 吉川秀平: 杭工法による道床横抵抗増加メカニズムと座屈発生点を考慮した座屈安定性の検証, 鉄道工学シンポジウム論文集, 第 23 号, 261-266, 2019.
- 4) トムソン, J.M.T 著, 吉澤修治, 柳田英二 訳: 安定性とカタストロフ, 産業図書, 1985.
- 5) 阿部和久, 田中洋介, 西宮裕騎, 紅露一寛: レール温度座屈時の分岐過程に関する一考察, 鉄道力学論文集, No.13, 7-14, 2009.
- 6) 宮井 徹: エネルギー法による軌道座屈の数値解析, 鉄道技術研究報告, No.1271, 1984.
- 7) 千葉颯兵, 阿部和久, 小松佳弘, 紅露一寛: 通り変位測定データに基づくレール軸力推定法に関する理論的検討, J-RAIL2017, CD-ROM, S2-14-4, 2017.
- 8) 樋口知之, 上野玄太, 中野慎也, 中村和幸, 吉田 亮: データ同化入門, 朝倉書店, A.6, 2011.
- 9) 岩崎英治, 松野純一, 長井正嗣: 弧長法のための一反復解法と弧長自動設定法, 応用力学論文集, Vol.5, pp.207-216, 2002.
- 10) Xiu, D. and Karniadakis, G.E.: The Wiener-Askey polynomial chaos for stochastic differential equations, SIAM, J. Sci. Comput., 24(2), 619-644, 2002.
- 11) Newland, D.E.: An introduction to random vibrations, Spectral & wavelet analysis, Chap.5, Dover Public., 1993.

(2020. 4. 3受付)

INFLUENCE OF STOCHASTICITY IN LATERAL RAIL DEFLECTION ON PROBABILISTIC NATURE OF TRACK BUCKLING TEMPERATURE

Kazuhisa ABE, Yuta MIZUNO and Kazuhiro KORO

Influence of the stochasticity in initial lateral deflection of continuous welded rails on the probability characteristics of snap through buckling of the track is investigated. To this end, the Monte Carlo simulation is performed, in which a number of initial lateral deflections are generated as stationary random process according to an autocorrelation function. Through the numerical simulation, influence of statistical parameters of the autocorrelation function on the probability distribution of rail buckling temperature is examined. Furthermore, from the viewpoint of the buckling probability, efficiency of the evaluation method for track stability based on the snap through buckling is discussed.