# 論文 通り変位測定データを用いた 軌道力学状態推定に関する基礎的検討

阿部 和久<sup>1</sup>·千葉 颯兵<sup>2</sup>·佐藤 拓郎<sup>3</sup>·小松 佳弘<sup>4</sup>·紅露 一寬<sup>5</sup>

<sup>1</sup>正会員 工博 新潟大学教授 工学部社会基盤工学プログラム (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地) E-mail: abe@eng.niigata-u.ac.jp

<sup>2</sup>学生員 (研究当時) 新潟大学大学院博士前期課程 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地)
 <sup>3</sup>学生員 新潟大学大学院博士前期課程 (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地)
 <sup>4</sup>正会員 東日本旅客鉄道 (株) 研究開発センター (〒 331-8513 さいたま市北区日進町 2-479)
 <sup>5</sup>正会員 博 (工) 新潟大学教授 工学部社会基盤工学プログラム (〒 950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地)

営業車に搭載された軌道検測装置により取得した軌道変位データの活用を想定して,軌道力学状態のモニタ リング手法に関する理論的検討を行った.具体的には、レール通り変位の変動に基づく、レール軸力と道床横抵 抗力分布の推定法を提案した.その際に,通り変位データに含まれる測定ノイズに対処するため,粒子フィル タの援用を試みた.その結果,通常の通り変位振幅下での適用には S/N 比のさらなる改善が必要であるものの, 比較的大きな通り変位の下では絶対軸力が推定可能であることを確認した.一方,道床横抵抗力分布について は、レール軸力と道床横剛性とが適切に推定できれば、十分な精度で評価可能であることがわかった.

Key Words: inertial mid-chord offset method, rail axial load, lateral resistance, particle filter

# 1. はじめに

鉄道軌道のロングレール化は,乗り心地の改善や,振 動・騒音の低減,保守作業の省力化などに有効となる など,多くの利点を有するため広く導入が進められて いる.しかし,ロングレールは定尺レールに比べ長い 区間にわたってまくらぎで拘束されており,著大な温 度軸力が作用し得るため,レール破断や座屈の危険性 を有している.また,座屈強度はバラスト道床による 軌道の拘束力に依存するため,レール軸力のみならず, 道床横抵抗力の把握と適切な管理も重要である.

現在,ひずみからレール軸力を求める直接ひずみ測 定法が,実用的な測定法として用いられている<sup>1)</sup>.ま た道床横抵抗力は,まくらぎに荷重を加えて変位させ ることで評価している.これらは,測定箇所が限定さ れたり,現場での作業を伴い膨大な時間と労力とを要 するため,全区間にわたる高頻度測定への適用は現実 的でない.

一方で,軌道の通り変位については,営業列車が軌道 上を走行する際に得られた加速度から10m弦正矢デー タを取得することにより,比較的良好な精度で高頻度・ 高密度に測定することが可能となっている<sup>2)</sup>.なおレー ル変位は,レール軸力と道床横抵抗力とを外力として 規定される.そのため,軌道変位が詳細にわかれば,こ れに基づいてレール軸力と道床横抵抗力とが推定可能 であると考えられる.そこで本研究では,営業列車に 搭載された検測装置によって日常的に測定される通り 変位データから、レール軸力と道床横抵抗力といった 力学状態を常時モニタリングするための手法について 基礎的検討を行う.具体的には、まずレール軸力を推 定するための理論を構築する.次に、数値モデルによ り軌道力学状態を再現し、その変位を擬似測定データ として用いて数値実験を行い、測定ノイズが推定精度 に及ぼす影響とその対処法について検討する.さらに、 道床横抵抗力の推定法を導出し、提案法の適用可能性 について議論する.

#### レール軸力推定法の原理

左右レールは締結装置を介してまくらぎに接合され ている.したがって、左右いずれか一方のレール作用 力がわかっても道床横抵抗力を与えず、それらの合力 を評価する必要がある.そのため、左右レール・まく らぎ連成系のつり合い状態について考える.

締結部における横作用力は、レールとまくらぎとの 相対変位に依存する.すると、左右レールの水平たわ みに関するつり合い式は次式で与えられる.

 $EIw_L''' + N(w_L'' + w_{L0}'') + k_r(w_L - w_s) = 0,$ (1)

 $EIw_{R}''' + N(w_{R}'' + w_{R0}'') + k_{r}(w_{R} - w_{s}) = 0$ ここで、レールは Euler ばりによりモデル化するものと し、E はレールのヤング率、I はレール弱軸回りの断面 二次モーメント、N は軸力 (圧縮を正)、 $w_{L}, w_{R}$  は左右 レールの弾性たわみ,  $w_{L0}$ ,  $w_{R0}$  は N=0 における初期 通り変位であり, ()' は軌道長手方向座標 x に関する微 分である.また,締結部のレール拘束力は本来離散的 に作用するが,ここではそれを連続支持モデルにより 近似表現している.なお,  $w_s$  はまくらぎ横変位,  $k_r$  は 締結部の横剛性 (単位長さ当たり) である.本論文では, 左右レール軸力は N で等しいものとする.また,「通り 変位」はたわみを意味する量として用いる.

式(1)にはまくらぎ横変位 w<sub>s</sub> が含まれている.道床 横抵抗力がまくらぎ横変位に関して線形ばね k<sub>s</sub> により 近似できるものと仮定すると,まくらぎのつり合い式 は次式で与えられる.

$$k_s w_s = k_r (w_L + w_R - 2w_s)$$
 (2)

式(2)を w<sub>s</sub>について解くと次式を得る.

$$w_s = \frac{k_r}{2k_r + k_s} (w_L + w_R) \tag{3}$$

式(3)を式(1)に代入して ws を消去すると次式を得る.

$$EIw_{L}^{\prime\prime\prime\prime} + N(w_{L}^{\prime\prime} + w_{L0}^{\prime\prime}) + k_{r}w_{L} - \frac{k_{r}^{2}}{2k_{r} + k_{s}}(w_{R} + w_{L}) = 0,$$

$$EIw_{R}^{\prime\prime\prime\prime} + N(w_{R}^{\prime\prime} + w_{R0}^{\prime\prime}) + k_{r}w_{R} - \frac{k_{r}^{2}}{2k_{r} + k_{s}}(w_{R} + w_{L}) = 0$$
(4)

さらに式(4)両式の和をとると次式を得る.

$$EIw_{LR}^{\prime\prime\prime\prime} + N(w_{LR}^{\prime\prime} + w_{LR0}^{\prime\prime}) + \tilde{k}_T w_{LR} = 0,$$
  

$$w_{LR} := w_L + w_R, \quad w_{LR0} := w_{L0} + w_{R0},$$
  

$$\tilde{\iota} = \frac{2k_r^2}{2k_r^2}$$
(5)

$$k_T := k_r - \frac{2k_r}{2k_r + k_s}$$

一方, 軸力が  $N + \Delta N$  であるときのつり合い式は, たわみ増分  $\Delta w_{LR}$ を用い次式により与えられる.

$$EI(w_{LR}''' + \Delta w_{LR}''') + (N + \Delta N)(w_{LR}'' + \Delta w_{LR}'' + w_{LR0}'') + \tilde{k}_T(w_{LR} + \Delta w_{LR}) = 0$$
(6)

式(6)から式(5)第1式を引くと次式を得る.

$$EI\Delta w_{LR}^{\prime\prime\prime\prime} + (N + \Delta N)\Delta w_{LR}^{\prime\prime} + \Delta N(w_{LR}^{\prime\prime} + w_{LR0}^{\prime\prime}) + \tilde{k}_T \Delta w_{LR} = 0$$
(7)

さらに式 (7) の *x* に関する Fourier 変換より次式を 得る.

$$\Delta N(\hat{w}_{LR} + \hat{w}_{LR0})k^2$$

$$= \{EIk^4 - (N + \Delta N)k^2 + \tilde{k}_T\}\Delta \hat{w}_{LR}$$
(8)

ここで*k* は波数,() はレール長手方向に関する Fourier 変換を意味する.

式(8)を整理して次式を得る.

$$k^{2} \frac{\hat{w}_{LR} + \hat{w}_{LR0}}{\Delta \hat{w}_{LR}} = \frac{1}{\Delta N} \{ EIk^{4} - (N + \Delta N)k^{2} + \tilde{k}_{T} \}$$
(9)



図-1 式 (9) の 4 次関数とその最小値を与える波数 km

式 (9) 左辺は,通り変位の測定データとその差分を Fourier 変換することで求めることができる.式 (9) 右 辺より,これは次のように波数 k の 4 次関数で与えら れる.

$$k^{2} \frac{\hat{w}_{LR} + \hat{w}_{LR0}}{\Delta \hat{w}_{LR}} := f(k) = ak^{4} - bk^{2} + c \qquad (10)$$

なお前述のとおり,検測装置を用いることによって, 通り変位 w ではなく 10m 弦正矢データ z が取得され る.しかし,それと通り変位の Fourier 変換とには次の 関係が存在する.

$$\hat{z} = (1 - \cos kl)\hat{w} \tag{11}$$

ここで、10m 弦正矢の場合 l=5m である.したがって、  $k = 2n\pi/l, n \in \mathbb{Z}$ となる波数を除き、10m 弦正矢によ る式 (10) 左辺のスペクトル比は、通り変位のそれに理 論上一致する.そのため、以下では基本的に通り変位 データを対象として定式化を進める.

式 (10) 右辺の 4 次関数と,その係数 a, b, c,および極 小値を与える波数  $k_m$  との関係は,概略図–1 に示す様 になる.なお,波数  $k_m$  と絶対軸力  $N + \Delta N$ ,未知係 数 a, b らの関係は次式で与えられる.

$$k_m = \sqrt{\frac{N + \Delta N}{2EI}} = \sqrt{\frac{b}{2a}} \tag{12}$$

式 (9), (10) および (12) より次式を得る.

$$N + \Delta N = EI\frac{b}{a}, \quad \tilde{k}_T = \Delta Nc$$
 (13)

以上より,通り変位データの Fourier 変換より未知係 数 a,b,cを最小二乗法等により決定し, $k_m$ を求めれば, 軸力  $N + \Delta N$ (同様に N) および軌道横剛性  $\tilde{k}_T$  を推定 することができる.

## 3. 数値モデルによる検証

#### (1) 数値モデル

2. に述べた測定原理の正当性を検証するために,軌 道モデルによる数値実験を実施した.軌道は弾性連続



図-2 数値実験結果 (ノイズ無し)



図-3 軸力推定結果 (ノイズ無し)

支持された Euler ばりとしてモデル化する.これをはり 要素で離散化し,初期通り変位とレール軸力を設定し て変形解析を行う.

式(5)に対応する離散化求解方程式は次式で与えられる.

$$[\mathbf{K}_1 + \hat{k}_T \mathbf{I}_0 - N\mathbf{K}_2]\{\mathbf{W}\} = N[\mathbf{K}_2]\{\mathbf{W}_0\}$$
(14)

ここで, [**K**<sub>1</sub>], [**K**<sub>2</sub>] は,それぞれ  $EIw_{LR}^{''''}$ ,  $w_{LR}^{''}$ を離 散化して得られる行列である.また, {**W**}, {**W**<sub>0</sub>} は, それぞれ  $w_{LR}$  と  $w_{LR0}$  に関する節点ベクトルである. さらに  $\tilde{k}_T$ [**I**<sub>0</sub>] は,  $\tilde{k}_T w_{LR}$ の項を離散化して得られる行 列である.

#### (2) 解析結果

50kgN レールを対象に,数値モデルの軌道長を200m とし,0.25mのはり要素で離散化した.通り変位は0.25m 間隔で測定するものとし,はり要素各節点におけるた わみより擬似測定データを作成した.また,左右レー ルから構成される軌道系を考えた場合の軌道横剛性 $\tilde{k}_T$ 



図-4 数値実験結果 (σε=0.1mm のノイズ有り)

は 2MN/m<sup>2</sup> と設定した.

たわみ解の Fourier 変換より  $k^2(\hat{w} + \hat{w}_0)/\Delta \hat{w}$  を求め た一例を図-2 に示す.なお,図には式(9)右辺の理論 曲線を実線で示した.数値実験結果には長波長成分に 乱れが認められるが,これは有限長で軌道をモデル化 したためと考えられる.スペクトル比には多少の変動 が認められるものの,概ね理論どおり式(9)右辺の4次 曲線が得られている.

次に,式(13)より軸力を推定した結果を図-3 に示 す.なお,10m弦正矢データの場合,式(11)より波数 が $k \approx 1.26(1/m)$ で感度がゼロとなる.このことを念頭 に,ここではそれ以下の波数域データを用いている.図 より,いずれの軸力においても,前述の理論によって 極めて高い精度で軸力推定がなされており,当該理論 の正当性が確認できる.

続いて,全通り変位に  $\sigma_{\varepsilon}$ =0.1mm のホワイトノイズ を加えた場合を対象に,式(10) 左辺のスペクトル比を 求めた例を図-4 に示す.なお,図中の曲線はプロット 点の最小二乗近似より得られた 4 次曲線である.当該 曲線の最小点は正の波数域には無く,適切な軸力推定 がなされていない.式(10) 左辺より軸力推定する場合 に,上述の問題を生ずる主な原因は,分母が通り変位 増分の Fourier 変換で与えられていることにあると考え られる.この場合,当該量は微小値をとり,ノイズと 同オーダーとなり得る.

実際の軌道で得られる通り変位データには,さらに 大きなノイズ ( $\sigma_{\varepsilon} \approx 0.5$ mm)<sup>3)</sup> が含まれているものと 考えられる.したがって,本手法を用いる場合,ノイ ズに対する適切な処理が不可欠である.

# 4. 粒子フィルタに基づく推定法

測定データにはノイズが含まれており,前述のよう に本推定法ではその影響を除去する必要がある.よっ て,未知量推定においては,これらを確率変数として 捉え,適切に処理することが望まれる.本研究ではベ イズ推定手法の一つである粒子フィルタ<sup>4)</sup>の適用につ いて検討する.

#### (1) 軸力推定問題の設定

ある時刻における通り変位を $w_{LR1}$ ,その際に作用している軸力を $N_1$ とする.また,時間経過後における通り変位を $w_{LR2}$ ,そのときの軸力を $N_2$ とすると,式(9)と同様に次式が成り立つ.

$$k^{2} \frac{\hat{w}_{LR1} + \hat{w}_{LR0}}{\Delta \hat{w}_{LR}} = \frac{1}{\Delta N} (EIk^{4} - N_{2}k^{2} + \tilde{k}_{T})$$

$$k^{2} \frac{\hat{w}_{LR2} + \hat{w}_{LR0}}{\Delta \hat{w}_{LR}} = \frac{1}{\Delta N} (EIk^{4} - N_{1}k^{2} + \tilde{k}_{T})$$

$$\Xi \Xi \mathfrak{C}, \quad \Delta N = N_{2} - N_{1} \mathfrak{C} \mathfrak{B} \mathfrak{Z}.$$
(15)

測定データは列車が同一軌道を複数回走行して得ら れる時系列データ $w_{LR1} + w_{LR0}, w_{LR2} + w_{LR0}$ を計測 量としている.よって、この2つのデータを同等に活 用する目的で、軸力推定に用いる式を、式(15)におけ る両式の総和平均より得られる次式に修正する.

$$k^{2} \frac{w_{LR1} + w_{LR2} + 2w_{LR0}}{2\Delta \hat{w}_{LR}}$$

$$= \frac{1}{\Delta N} \{ EIk^{4} - 0.5(N_{1} + N_{2})k^{2} + \tilde{k}_{T} \}$$
(16)

以上の準備の下,本推定問題を次式により設定する.

$$X_t = X_{t-1},$$
  

$$y_t = G_t(X_t) + \varepsilon_t$$
(17)

ここで、 $X_t$  は推定すべき未知量を成分とするベクトル であり、 $\varepsilon_t$  は通り変位測定データにおけるノイズによ る当該 Fourier スペクトル比への影響項である.なお、 t は時間ステップである.2つの連続測定データに基づ く推定を対象とする場合、 $X_t$  は次式で構成される.

$$X_t = \{N_1, N_2, \tilde{k}_T\}$$
(18)

 $y_t$  は通り変位測定データの Fourier 変換の比 (スペクト ル比) であり,関数  $G_t(X_t)$  は式 (16) 右辺で与えられる もので,未知量である軸力  $N_i(i = 1, 2)$ ,および軌道横 剛性  $\tilde{k}_T$  から次式により表すことができる.

$$G_t(X_t) = \frac{1}{\Delta N} [EIk^4 - 0.5(N_1 + N_2)k^2 + \tilde{k}_T] \quad (19)$$

ベイズの定理に基づいた推定手法として,粒子フィ ルタの他にカルマンフィルタ<sup>4)</sup>など幾つかの手法が提 案されている.カルマンフィルタは,基本的にシステ ムの状態と観測との間に線形性が成立することを前提 としている.式(17)では,システムモデルに相当する 第1式は線形系(恒等式)で与えられている.一方,第



図-5式(16)によるスペクトル比の再現と正解との比較

2式で与えられる観測モデルは未知量について非線形関数となっている。そのため、システムモデル・観測モデルともに線形性を前提としない粒子フィルタが本推定問題に適していると考えられる。

なお,粒子フィルタでは,まず推定値の候補となり 得るような様々な $X_0 \equiv X_t$ を生成する.これは粒子と 呼ばれ,このとき生成した粒子の個数を粒子数と呼ぶ. 粒子フィルタはこれら粒子の集合により未知量の確率 分布を近似する手法である.具体的には,まず各粒子毎 に式(16)右辺を設定し,それと測定データより得られ た同式左辺との差異から前者の尤度を評価する.続い て,これに比例する様に各粒子数を再配分する.なお, 通常の時間発展問題の場合,この操作を繰り返して事 後確率分布を更新するが,本問題では2つの軸力を同 時推定することもあり,以降に示す解析例では1回の 操作で概ね収束している.

#### (2) 数値モデルに基づく推定精度の検討

3. の解析例と同じ軌道条件に対して本推定法を適用した.まず、左右レールの初期通り変位  $\{\mathbf{W}_{0L}\}, \{\mathbf{W}_{0R}\}$ を期待値ゼロ、標準偏差 $\sigma$ の Gauss 分布に従うものとして生成する.また、その際に距離相関関数を次式により規定した.

$$R(x) = \sigma^2 e^{-(x/a)^2}$$
(20)

ここで, *a* はレール初期通り変位の相関長である.以下の解析例では,まくらぎ間隔を一つの目安として 0.7m に設定した.

なお,解析では左右レールの通り変位の和を変数と して数値モデルを作成するため,初期通り変位の標準 偏差を $\sqrt{2\sigma}$ に設定し, $\{W_0\}$ を作成する.以下におい て,例えば標準偏差 1cm とは,解析ではレール2本分 として $\sqrt{2\times1cm}$ を設定していることを意味する. 以上のように作成した初期通り変位の下で弾性変位 を求め、さらにノイズを加えて得られた擬似測定デー タを Fourier 変換して、前述の粒子フィルタによる軸力  $N_1, N_2$ と軌道横剛性 $\tilde{k}_T$ の推定を試みた.初期状態の 粒子は、軸力と軌道横剛性の推定範囲をそれぞれ 0~ 500kN, 1.5~3.5MN/m<sup>2</sup>と設定して、各粒子におけるこ れらの値を一様乱数により与えた.

また,推定に用いる波数の範囲を  $0.5 \le k \le 2$  (1/m) とした.ちなみに,式(16)右辺に正解値を設定して得 られた曲線と, $\sigma_{\varepsilon}$ =0.5mmのホワイトノイズを含むデー タから求めた同式左辺を図-5 に示す.なお,擬似測定 データより求めたスペクトル比は,wavelet 変換により パルス状の変動成分を除去したものである.図-4 に示 した様に, $k \le 1$ (1/m)の波数域データではノイズの影 響が大きく推定が困難であったが, $k \le 2$ (1/m)までの 波数範囲を用いれば,概ね適切に再現し得ることが確 認できる.

前述のとおり,検測装置により入手されたデータは, 通り変位を10m 弦正矢に変換したものとなっている.こ の場合,波数が適切な精度で得られる範囲は概ね $k \le 1$ (1/m)であり, $k \approx 1.26$  (1/m)以上の成分を破棄してい ることになる.しかし図-5より,低波数成分は測定ノ イズの影響が大きいため推定での使用は難しく, $0.5 \le k \le 2(1/m)$ の範囲のデータが有効であるとの結論を得 た.以上より,10m 弦正矢データではなく,通り変位 データ自体を使用することが必要であると考えられる.

粒子数を 50000 個,測定ノイズの標準偏差を 0.5mm と設定した場合を対象に,初期通り変位の標準偏差 を 1~5cm まで変動させ,その差異が推定結果に及ぼ す影響について調べた.正解値は  $N_1, N_2$ =100, 200kN,  $\tilde{k}_T$ =2MN/m<sup>2</sup> と設定した.なお,事前の検討結果より, 粒子数を 10000 個以上に設定すれば推定精度が概ね一 定値に収束することを確認している.

結果を図-6~図-8に示す.初期粒子生成の際に乱数 を用いているため,同じ擬似測定データに対して解析 を行っても推定値は毎回異なる結果となる.そのため, 推定を5回実施し,その平均値と標準偏差を図中に示 している.また,図には正解値を水平線で示している. 初期通り変位の標準偏差が1~4cmに対しては,明確な 精度向上が認められないが,5cmのケースでは弾性た わみが比較的大きいこともあり,絶対軸力も含めた精 度が顕著に改善されており,実際に存在し得るレベル のノイズ下であっても良好な推定結果を得ることがで きている.

ただし,通常の状態における通り変位の標準偏差が 5cmにまで達することは稀であると考えられる.紙面 の制約上図示はしていないが,実軌道での軸力推定の ためにはノイズの標準偏差を0.1mm以下にする必要が



図-6 初期通り変位の標準偏差を変動させた場合の N1 推定値



図-7 初期通り変位の標準偏差を変動させた場合の N2 推定値

あり、測定精度のさらなる向上が望まれる.

#### 5. 道床横抵抗力分布の推定

#### (1) 問題の設定

前節までの検討結果より,レールの通り変位振幅が 比較的大きな場合においては,現在の測定精度の下で も絶対軸力が推定可能であるとの結論を得た.本節で は,絶対軸力と軌道横剛性とが良好な精度の下で推定 された場合を前提として,道床横抵抗力分布を評価す るための手法について検討する.そのために,まずは 対象とする問題について改めて整理する.

左右レールの横方向つり合い式は式(5)第1式で与え られる.レール締結剛性  $k_r$  は道床横剛性  $k_s$  に比べ一 般に十分大きな値を持つ.この場合, $\tilde{k}_T$  は次式により 近似することができる.

$$\tilde{k}_T \approx \frac{k_s}{2} \tag{21}$$



図-8 初期通り変位の標準偏差を変動させた場合の k<sub>T</sub> 推定値

よって,軌道横剛性 $\hat{k}_T$ の推定結果より道床横剛性 $k_s$ を概ね推定可能である.

式(21)を(5)に代入すると次式を得る.

$$EIw_{LR}^{''''} + N(w_{LR}^{''} + w_{LR0}^{''}) + \frac{k_s}{2}w_{LR} = 0$$
 (22)

式(22)をはり要素により離散化すると,式(14)と同 様にして次の連立一次方程式を得る.

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{W}\} = N[\mathbf{K}_2]\{\mathbf{W}_0\},$$
  
$$[\mathbf{K}] = [\mathbf{K}_1 + \frac{k_s}{2}\mathbf{I}_0 - N\mathbf{K}_2]$$
(23)

初期通り変位  $w_{LR0}({\mathbf{W}_0})$ が得られたならば,式(23) により弾性たわみ  $w_{LR}$ を求めることができ,さらに次 式より道床横抵抗力分布を算出することができる.

$$q_s = -\frac{k_s}{2} w_{LR} \tag{24}$$

したがって,道床横抵抗力分布の推定は,初期通り変 位の推定に帰着する.

ここでは,式(23)に基づいた {**W**<sub>0</sub>} の推定について 考える.

#### (2) 目的関数の設定と勾配の評価

左右レール通り変位の和より与えられる測定データ を  $\{\mathbf{y}_w\}$  とおく、 $\{\mathbf{y}_w\}$  と通り変位の節点ベクトルとの 関係は次式で与えられる.

$$\{\mathbf{y}_w\} = [\mathbf{B}]\{\mathbf{W}\} + \{\mathbf{W}_0\} + \{\boldsymbol{\varepsilon}\}$$
(25)

ここで, [**B**] は全節点変位ベクトルから測定点のたわみ に対応する成分のみ抽出する行列である. {*ε*} は各測点 における測定ノイズを成分とするベクトルであり,各 成分は互いに独立であるものとする.

{**y**<sub>w</sub>} が与えられた時の,未知量 {**W**<sub>0</sub>} の事後確率密 度関数は,ベイズの定理<sup>5)</sup> により次式で与えられる.

$$p(\mathbf{W}_0|\mathbf{y}_w) = \frac{p(\mathbf{W}_0)p(\mathbf{y}_w|\mathbf{W}_0)}{p(\mathbf{y}_w)}$$
(26)

ここで、 $p(\mathbf{W}_0)$ は初期通り変位の事前確率分布である.

測定データの確率分布  $p(\mathbf{y}_w)$  は定数であるので,事 後確率分布  $p(\mathbf{W}_0|\mathbf{y}_w)$  の最大値は式 (26) の右辺の分子 のみで決まる.これらが正規分布に従うものと仮定す ると,  $p(\mathbf{W}_0|\mathbf{y}_w)$  の指数部は次式に比例する.

$$J(\mathbf{W}_{0}) = \frac{1}{2} [\mathbf{W}_{0}^{T}] [\mathbf{M}^{-1}] \{\mathbf{W}_{0}\} + \frac{1}{2\sigma_{\varepsilon}^{2}} [\mathbf{y}_{w} - \mathbf{B}\mathbf{W} - \mathbf{W}_{0}]^{T} \{\mathbf{y}_{w} - \mathbf{B}\mathbf{W} - \mathbf{W}_{0}\}$$
(27)

ここで, [**M**] は左右レール通り変位和の先験的共分散 行列,  $\sigma_{\varepsilon}^{2}$  は測定データノイズの分散である.また,初 期通り変位 { $\mathbf{W}_{0}$ } は各節点のたわみ成分から成るベク トルであり,たわみ角成分は含まず,節点は測定点と一 致するように設定するものとする.なお,初期通り変 位とノイズの期待値はいずれもゼロとする.

 $p(\mathbf{W}_0|\mathbf{y}_w)$ の指数関数項は $e^{-J}$ で与えられるので,事後確率分布最大化はJの最小化に帰着する.以下では,初期通り変位の推定手法を,Jの最小化問題により設定する.その際に,勾配(感度) $\partial J/\partial W_0$ を効率的に求めるため,目的関数を次式により再定義する.

$$\tilde{J}(\mathbf{W}_{0}) = \frac{1}{2} [\mathbf{W}_{0}^{T}] [\mathbf{M}^{-1}] \{\mathbf{W}_{0}\}$$

$$+ \frac{1}{2\sigma_{\varepsilon}^{2}} \sum_{j}^{n} [\mathbf{y}_{wj} - \mathbf{B}\mathbf{W}_{j} - \mathbf{W}_{0}]^{T} \{\mathbf{y}_{wj} - \mathbf{B}\mathbf{W}_{j} - \mathbf{W}_{0}\}$$

$$+ \sum_{j}^{n} [\boldsymbol{\lambda}_{j}^{T}] \{\mathbf{K}_{j}\mathbf{W}_{j} - N_{j}\mathbf{K}_{2}\mathbf{B}^{T}\mathbf{W}_{0}\}$$
(28)

ここで, $(\cdot)_j$ は第 j 番測定データに関する値, $\{\lambda_j\}$ は 未定乗数ベクトルである.

 $\tilde{J}$ の { $\mathbf{W}_0$ } に関する変分は次式で与えられる.

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{J}}{\partial \mathbf{W}_{0}} \\ -\frac{1}{\sigma_{\varepsilon}^{2}} \sum_{j} [\mathbf{A}_{j}^{T} \mathbf{B}^{T} + \mathbf{I}] \{ \mathbf{y}_{wj} - \mathbf{B} \mathbf{W}_{j} - \mathbf{W}_{0} \} \\ + \sum_{j} [\mathbf{A}_{j}^{T} \mathbf{K}_{j}^{T} - N_{j} \mathbf{B} \mathbf{K}_{2}^{T}] \{ \boldsymbol{\lambda}_{j} \}, \quad A_{j,kl} = \frac{\partial w_{k}}{\partial w_{0,l}} |_{N_{j}} \end{cases}$$

$$(29)$$

レールの弾性たわみ {**W**} の初期通り変位 {**W**<sub>0</sub>} に 関する変分を求めることなく  $\partial \tilde{J} / \partial \mathbf{W}_0$  を評価するため に,次の随伴方程式を課す.

$$[\mathbf{K}_j]\{\boldsymbol{\lambda}_j\} = \frac{1}{\sigma_{\varepsilon}^2} [\mathbf{B}^T]\{\mathbf{y}_{wj} - \mathbf{B}\mathbf{W}_j - \mathbf{W}_0\}$$
(30)

ここで,  $[\mathbf{K}_j] = [\mathbf{K}_j^T]$ を用いている.

式(30)をみたす乗数ベクトルを(29)に適用すると,

 $\partial \tilde{J} / \partial \mathbf{W}_0$  は次式で評価できる.

$$\left\{\frac{\partial \tilde{J}}{\partial \mathbf{W}_{0}}\right\} = [\mathbf{M}^{-1}]\{\mathbf{W}_{0}\} - \frac{1}{\sigma_{\varepsilon}^{2}}\sum_{j}\{\mathbf{y}_{wj} - \mathbf{B}\mathbf{W}_{j} - \mathbf{W}_{0}\} - [\mathbf{B}]\sum_{j}N_{j}[\mathbf{K}_{2}]\{\boldsymbol{\lambda}_{j}\}$$
(31)

ここで,  $[\mathbf{K}_2] = [\mathbf{K}_2^T]$ を用いている.

## (3) 最小点の探索

最小点は式 (31) がゼロとなる条件より求められる. これは  $\{\Delta W_0\}$ の線形方程式となるが,  $\{\lambda_j\}$  が初期通 り変位の陰的関数で与えられるため,これを直接解く ことはむしろ煩雑となり得策ではない.そこで,式(31) により目的関数の勾配を求め,準 Newton 法により  $\tilde{J}$ の最小点を求める.なお,その際に BFGS 法 (Broyden, Fletcher, Goldfarb, Shanno) により目的関数の Hessian 逆 行列を求め,Armijo のルールを援用して修正ベクトル  $\{\Delta W_0\}$ を設定する.以下にその概要について述べる.

未知量  $\mathbf{W}_0$  の第 k 近似を  $\mathbf{W}_0^k$ , その修正量を  $\Delta \mathbf{W}_0$ とする.  $\mathbf{W}_0^k$  の近傍において, 目的関数は次式のよう に展開できる.

$$\tilde{J}(\mathbf{W}_{0}^{k} + \Delta \mathbf{W}_{0}) = \tilde{J}(\mathbf{W}_{0}^{k}) + \frac{\partial \tilde{J}}{\partial \mathbf{W}_{0}}|_{k} \Delta \mathbf{W}_{0} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{W}_{0}^{T} \mathbf{H}^{k} \Delta \mathbf{W}_{0} + \cdots$$
(32)

ここで, **H** は  $\tilde{J}$  の Hesse 行列 (Hessian) であり, 次式で 定義される.

$$H_{ij}^{k} = \frac{\partial^{2} \tilde{J}}{\partial w_{0i} \partial w_{0j}}|_{k}$$
(33)

最小点の条件として $\partial \tilde{J}/\partial \mathbf{W}_0 = 0$ を課すと,式(32) より次式を得る.

$$\frac{\partial \tilde{J}}{\partial \mathbf{W}_0} (\mathbf{W}_0^k + \Delta \mathbf{W}_0) \approx \frac{\partial \tilde{J}}{\partial \mathbf{W}_0} |_k + \mathbf{H}^k \Delta \mathbf{W}_0 = \mathbf{0} \quad (34)$$

式 (34) より、補正量 
$$\Delta \mathbf{W}_0$$
 は次式により与えられる.

$$\{\Delta \mathbf{W}_0\} = -[\mathbf{H}^k]^{-1} \left\{ \frac{\partial \tilde{J}}{\partial \mathbf{W}_0} \Big|_k \right\}$$
(35)

式 (35) による修正の際に, Hessian 逆行列を BFGS 法<sup>6</sup>に基づき次式により近似表現する.

$$[\mathbf{H}^{k+1}]^{-1} = [\mathbf{H}^k]^{-1} - \frac{[\mathbf{H}^k]^{-1} \bar{\mathbf{y}}_k \bar{\mathbf{s}}_k^T + \bar{\mathbf{s}}_k \bar{\mathbf{y}}_k^T [\mathbf{H}^k]^{-T}}{\bar{\mathbf{s}}_k^T \bar{\mathbf{y}}_k} + \left(\frac{|\mathbf{s}_k|}{|\tilde{\mathbf{y}}_k|} + \frac{\bar{\mathbf{y}}_k^T [\mathbf{H}^k]^{-1} \bar{\mathbf{y}}_k}{\bar{\mathbf{s}}_k^T \bar{\mathbf{y}}_k}\right) \frac{\bar{\mathbf{s}}_k \bar{\mathbf{s}}_k^T}{\bar{\mathbf{s}}_k^T \bar{\mathbf{y}}_k}$$
(36)

ここで、 $\mathbf{\bar{s}}_k$ 、 $\mathbf{\bar{y}}_k$ は次のベクトルに平行な単位ベクトル である.

$$\mathbf{s}_{k} = \beta^{l} \Delta \mathbf{W}_{0}, \quad \tilde{\mathbf{y}}_{k} = \frac{\partial \tilde{J}}{\partial \mathbf{W}_{0}} |_{k+1} - \frac{\partial \tilde{J}}{\partial \mathbf{W}_{0}} |_{k} \quad (37)$$



図-9 初期通り変位の推定



図-10 道床横抵抗力分布の推定

なお, パラメータ $\beta$ のべき数 $l(=0,1,\cdots)$ は, Armijo のルール<sup>6</sup>に基づき, 次の条件をみたす様に設定する.

$$\tilde{J}(\mathbf{W}_0^k + \mathbf{s}_k) \le \tilde{J}(\mathbf{W}_0^k) - \alpha [\frac{\partial J}{\partial \mathbf{W}_0}|_k]^T \mathbf{s}_k$$
(38)

式 (38) をみたす lに対して第 k+1 近似  $\mathbf{W}_0^{k+1}$  を  $\mathbf{W}_0^k + \mathbf{s}_k$ により与える.また、 $\alpha$ 、 $\beta$ は入力パラメータであり、以 下の解析ではそれぞれ  $1 \times 10^{-4}$ , 0.5 と設定した.また、 [ $\mathbf{H}^0$ ] は恒等行列で与えた.

#### (4) 解析例

初期通り変位の推定,およびそれを用いた道床横抵 抗力分布評価に対して提案法の適用を試みた.軌道条 件はこれまでのものと同じである.また,初期通り変位 とノイズの標準偏差は,それぞれ 1cm および 0.5mm と している.作成した擬似測定データ  $\{y_{wj}\}$ を用いて前 述の目的関数  $\hat{J}$ を設定し,その最小点探索を行い,初 期通り変位を推定する.ただしその際に,軸力と道床 横剛性は既に推定されているものとし,これらは正し い値に設定した. 軸力を N=100, 150, 200, 250kN の4 段階で設定し,各 軸力における擬似測定データを用いて求めた初期通り変 位推定結果の例を図-9 に,道床横抵抗力分布の推定結 果を図-10 に示す.なお,図-10 は最終軸力 (N=250kN) における道床横抵抗力を示したものである. $\{W_0\} = 0$ を初期値としたが,2ステップ程で概ね正解に一致する 初期通り変位を得ることができた.また,道床横抵抗 力についても,正解との差異は比較的小さく,分布の 特徴も良好に再現できている.

以上のとおり,少なくとも道床横剛性が線形モデル で近似し得る場合,初期通り変位および道床横抵抗力 を良好な精度下で推定可能であることがわかる.

### 6. おわりに

本研究では、営業車に搭載した検測装置により通り変 位を高頻度・高密度に測定する場合を対象として、得ら れたデータの有効活用について検討した.具体的には、 通り変位の変化から絶対軸力と道床横剛性とを推定す るための手法 (軌道の力学状態のモニタリング手法) に ついて、その可能性を検討した.

その結果,初期通り変位が比較的大きく,よって弾 性変位も比較的大きい場合,推定法として粒子フィル タを用いることで,現在の測定精度でも概ね推定可能 であることがわかった.一方,初期通り変位がそれ程 大きくない場合は,レールの弾性たわみも小さくなる ため,良好な推定精度の確保には,測定データに対し てより高い S/N 比が要求される.また,絶対軸力の感 度は決して高くないため,精度確保のためには,粒子 数を相当多くとる必要がある.ただし,1粒子当りの計 算負荷は非常に少なく,粒子数増加はそれ程負担とは ならない. 現在取得されているデータは、10m 弦正矢に変換したものとなっている.この場合,波数  $k \approx 1.26(1/m)$  以上(波長 5m 以下)の成分を破棄していることになる.しかし本研究では、低波数成分は測定ノイズの影響が大きいため使用は難しく、 $k=0.5\sim 2(1/m)$  程度の範囲のデータが有効であるとの結果を得た.したがって、10m 弦正矢データでは無く、通り変位データ自体を使用することが必要である.

本研究の最後では,軸力と道床横剛性とが良好な精 度で推定できた場合を前提として,初期通り変位と道 床横抵抗力分布の推定について検討した.その結果,何 れも比較的良好に推定可能であることを確認した.

本研究では,幾つかの仮定の下,軌道モデルを簡易 化している.例えば,実際の軌道はまくらぎにより離 散支持されている.また,道床横抵抗力は非線形性を 有しており,かつある程度の空間変動が存在している はずである.よって,これらが軌道の力学状態の推定 精度に及ぼす影響についても明らかにする必要がある. この点については今後の検討課題である.

謝辞 本研究は科研費 (17K06529) の助成を受けたもの である.ここに記して謝意を表する.

#### 参考文献

- 1) 高井秀之:保線の常識!非常識? その 31:レールの軸力は 測れない?,新線路, 60.11, 36, 2006.
- 2) 葛西亮平,元好茂,小西俊之:モニタリングデータを 活用した施工前後における軌道状態の分析,鉄道工学シンポジウム論文集,第21号,17-24,2017.
- 坪川洋友, 矢沢栄治, 小木曽清高, 南木聡明: 車体装架型 慣性正矢軌道検測装置の開発, 鉄道総研報告, Vol.26(2), 7-12, 2012.
- 4) 樋口知之,上野玄太,中野慎也,中村和幸,吉田 亮: データ同化入門,朝倉書店,2010.
- 5) 関原謙介:ベイズ信号処理,共立出版,2015.
- 6) Bonnans, J.F., et al. : Numerical Optimization (2nd Ed.), Capt.4 and 5, Springer, 2006.

(2018. 4. 6 受付)

# A MONITORING METHOD FOR TRACK MECHANICAL CONDITIONS USING RAIL LATERAL DISPLACEMENT OBSERVED BY COMMERCIAL TRAINS

# Kazuhisa ABE, Sohei CHIBA, Takuro SATO, Yoshihiro KOMATSU and Kazuhiro KORO

A measuring method for mechanical conditions of the rail axial stress and the lateral resistance force in a ballasted track is proposed. The evaluation method of the former is derived based on a principle that the rail deflection depends on its axial load, in which the rail lateral displacement can be obtained with the measurement equipment mounted on commercial trains. To cope with the noise in data, the particle filter is employed. The latter is evaluated utilizing the Bayes' theorem, under an assumption that the rail axial load and ballast lateral stiffness have been evaluated adequately by the former method. Through numerical experiments, validity and feasibility of the proposed method are discussed.