SPH 法を用いた衝撃解析の離散化程度および解析精度に関する基礎的研究

A fundamental study on the discretization degree and calculation accuracy of impact analysis using SPH method

深澤仁*，園田佳巨**，玉井宏樹***
Jin Fukazawa, Yoshimi Sonoda, Hiroki Tamai

*九州大学大学院博士課程学生，工学府建設システム工学専攻（〒819-0395 福岡県福岡市西区元岡 744 番地）
**博士(工学)，九州大学大学院教授，工学研究院建設デザイン部門（〒819-0395 福岡県福岡市西区元岡 744 番地）
**博士(工学)，福岡大学工学部助教　社会デザイン工学科（〒814-0180 福岡市城南区七隈 8-19-1）

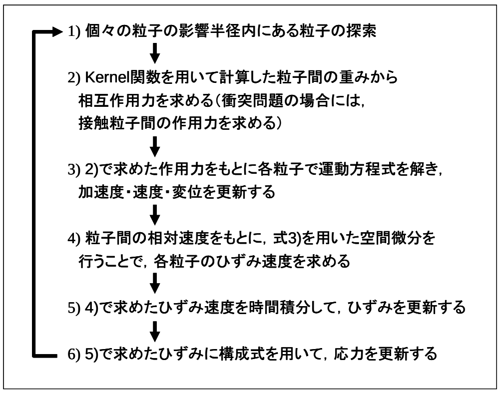
Many analytical studies have been performed on the impact resistance of structures such as rock sheds subjected to impact loads. However, the phenomena such as penetration of a collision object are essentially difficult to calculate by FEM. This study performed a fundamental review on the application of SPH for analyzing the impact response of structures aiming to establish an analytical method for the elastic-plastic behavior of protective structures. In this study, first, the modeling issues of SPH were considered. In addition, when performing elastic-plastic impact analysis, the means of ensuring analysis accuracy by using the SPH method was reviewed. Finally, a simulation analysis was performed for the weight-drop test of RC beam conducted and possible application of the SPH method was verified.

Key Words: SPH method, analysis accuracy, elastic-plastic impact analysis
キーワード：SPH 法，解析精度，弾塑性衝撃応答解析

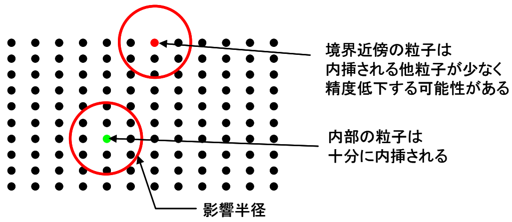
1. 緒言

衝撃荷重の作用が予想される落石防護工などの耐衝撃性能を精度良く把握するため，構造物の衝撃応答解析手法の研究が数多く行われ，RC はりなど基本的な構造部材の全体挙動は，汎用の有限要素解析ソフトウェアを用いて把握できることが確認されている [1),2),3)]．一方，衝突物の貫入・貫通や被衝突物の裏面剥離などの局所的な破壊については，定量的に信頼できる解析手法について研究が進められている段階である．貫通現象などの局所破壊を評価するには，不連続な変位場を取り扱うことが不可欠であり，要素を消去する Erosion モデルなども開発されているが，要素間の結合と形状関数による変位場の内挿を理論的な背景とする有限要素法を適用することが，本質的に困難であると考えられる場合が多い．そのため，不連続な変位場の再現には，各要素の接触・離反を前提とした粒子法が一般には適している [4), 5)]と考えられる．

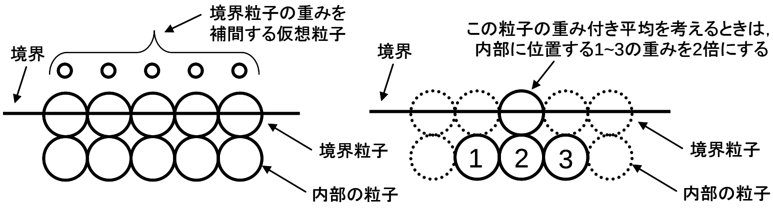
SPH（Smoothed Particle Hydrodynamics）[6), 7)]は連続体を粒子の集合体として離散化した粒子モデルを用いた代表的な手法で，粒子個々の挙動を近傍（影響半径内）に存在する他の粒子との距離に応じた重みによって求めた相互作用力を作用させながら運動方程式を解くことから，個々の粒子が初期配置から大きく移動しても解析を継続することが可能である．従って，従来の有限要素法 [8), 9)]などで取り扱いが困難な大変形（ひび割れ・貫通・破壊・飛散など）をともなう破壊現象に適用し易いと考えられる．しかし，SPH 法を用いた固体材料の弾塑性解析の定量的な精度については，必ずしも十分に検討されているとは言い難く，特に塑性初期の値が小さなひずみ場も高精度で計算するための離散化に関する条件は明確に示されていない．これらの現状を踏まえ，著者らは構造物の全体挙動と衝突物の貫通等の局所破壊を統一的に評価可能な手法を構築するため，固体の衝撃解析に SPH 法を適用した基礎的な考察を行っている [10)]．本研究では，SPH 法で固体材料の高精度な衝撃応答を得るためのモデル化に関する条件をより詳細に把握するため，はりの衝撃応答を対象に，その挙動を精度良く再現するために必要な離散化レベル（はり高さ方向の必要粒子数など）について，有限要素解析モデルと比較・検討を試みた．すなわち，SPH 法で精度良い解を得るためにはモデル化にどのような配慮が必要か，SPH 法特有の数値計算法（Kernel 関数による重み付き平均でひずみを評価）に起因する問題について考察を行い，有限要素法と比較し



図−1　SPH 法による衝撃解析の
基本的な計算フロー

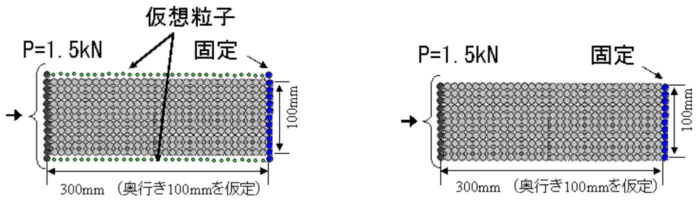


図−2　境界近傍粒子の精度低下



(a) 仮想粒子の配置　　(b) 重み付き平均改良

図−3　境界補間の方法



(a) 仮想粒子の配置　　(b) 重み付き平均改良

図−4　2 次元単軸圧縮モデル(粒子径 10mm)

ながら離散化レベル（粒子径）と解析精度の関係について検討した.

さらに，弾塑性解析を行う場合に弾性粒子と塑性粒子が混在する領域において，衝撃解析の精度を確保するために適切なリターンマッピング手法が必要であることを確認した．最後に，室蘭工大の岸らによる RC はりの重錘落下実験 [1]を参考に，本研究で得た知見（はりモデルの離散化レベル，リターンマッピング手法）を用いた弾塑性衝撃解析によるシミュレーションを行い，SPH 法の構造物の衝撃解析への適用可能性について検証した.

2. SPH 法を用いた衝撃応答解析

2.1 SPH 法の特徴

SPH 法は解析対象を粒子の集合体とみなし，各粒子の未知物理量を式(1)に示す Kernel 関数による重み付き平均で評価する点に特徴がある.

$$f(x) \approx \int f(x')W(x-x',h)dx' \tag{1}$$

ここに，$f(x)$:未知物理量の評価式, $W(x-x',h)$:Kernel 関数，h ：影響半径，x ：評価粒子座標，x' ：他粒子の座標である.

実際には，式(1)の積分計算は対象粒子の影響半径内に存在する他粒子の値を合算することで近似される．すなわち，影響範囲内の他粒子の総数を N，他粒子のラベルを J，質量を m，密度を ρ とすると，式(1)は次のように表される.

$$f(x) \approx \sum_{J=1}^{N} \frac{m^J}{\rho^J} f(x^J)W(x-x^J,h) \tag{2}$$

また，その微分形は次のように表される.

$$\nabla \cdot f(x) \approx -\sum_{J=1}^{N} \frac{m^J}{\rho^J} f(x^J) \cdot \nabla W(x-x^J,h) \tag{3}$$

式(3)を用いることで，未知物理量の一次導関数を計算する場合，物理量そのものを偏微分することなく，既知な Kernel 関数の一次導関数を用いて近似される．この近似計算が SPH 法の大きな特徴であり，個々の粒子が初期配置から大きく移動しても解析を継続できる一因である．解析に用いる Kernel 関数には, Unity 条件やデルタ関数的な性質および微分可能性などの諸条件が課される [5]．本研究では，これら条件を満足する代表的な Kernel 関数として，式(4)に示す Spline 関数を適用することにした.

$$W\left(\frac{r}{h}\right) = \frac{15}{7\pi h^2} \times \begin{cases} \dfrac{2}{3} - \left(\dfrac{r}{h}\right)^2 + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{r}{h}\right)^3 & 0 \le \dfrac{r}{h} < 1 \\ \dfrac{1}{6}\left(2-\dfrac{r}{h}\right)^3 & 1 \le \dfrac{r}{h} < 2 \\ 0 & 2 \le \dfrac{r}{h} \end{cases} \tag{4}$$

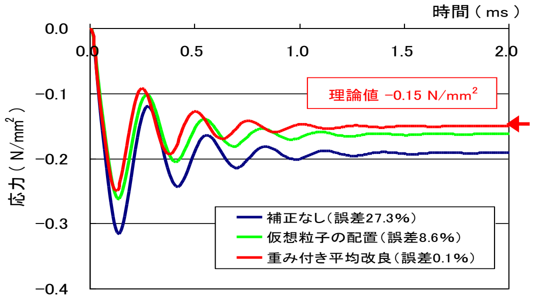
ここに，r ：粒子 I と粒子 J の間の距離

また，SPH 解析では，一般的に数値振動を抑えるため人工粘性項を運動方程式内に導入する．本研究でも式(5)に示すような Monaghan が提案した人工粘性項 Π^{IJ} を使用した [5, 10]．人工粘性項に用いる定数は，解析が発散しないように，また粘性項の影響が小さくなるように，γ は 0.1〜2.0，α および β は 3.0〜10.0 とした.

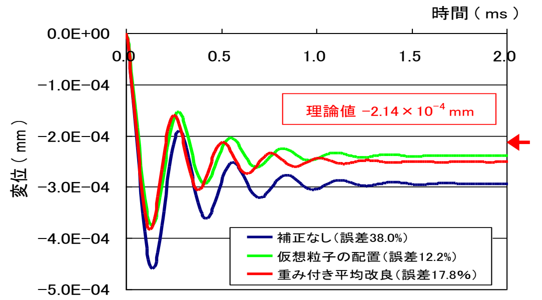
$$\Pi^{IJ} = \frac{-\alpha \bar{C}^{IJ} \phi^{IJ} + \beta \left(\phi^{IJ}\right)^2}{\bar{\rho}^{IJ}} \tag{5}$$

$$\phi^{IJ} = \frac{h^{IJ} v^{IJ} \cdot x^{IJ}}{\left|x^{IJ}\right|^2 + \gamma h^{IJ\,2}}$$

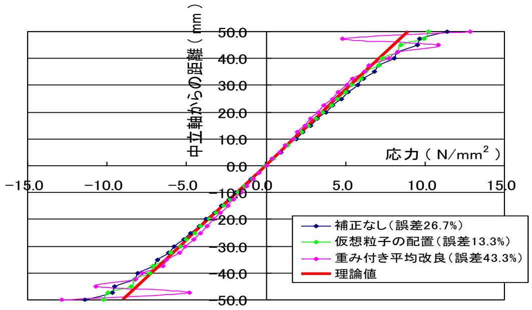
ここで，v^{IJ} は粒子 I と J 間の速度差，$\bar{C}^{IJ}$ は弾性波の速



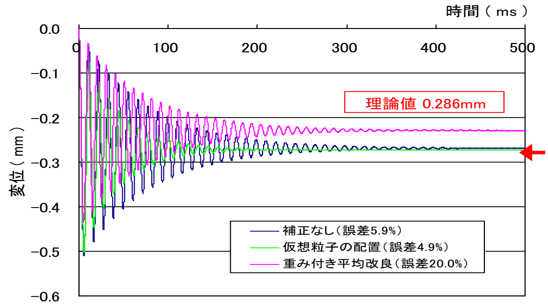
図−5　応力−時間関係（粒子径 10mm）



図−6　変位−時間関係（粒子径 10mm）



図−7　固定端近傍の応力分布（粒子径 2.5mm）



図−8　端点の変位応答（粒子径 2.5mm）

度である．

2.2 SPH 法による衝撃解析の基本的な流れ

SPH 法を用いた構造部材の衝撃解析の基本的な流れを図−1 に示す．通常の FEM と手順 4)と 5)が異なるが，その他はほぼ同様の流れによって衝撃応答解析が行われる．SPH 法の場合，一般に粒子総数が増加するにつれて，手順 1)の影響範囲内粒子の探索に膨大な時間を必要とするため，解析対象が大きくなるほど計算負荷の面では不利になるため，並列処理等の工夫が不可欠であると言われている．そのため，本研究では Java によるプログラミングを行う際にマルチスレッドによる並列処理を用いて，演算速度の向上に努めた．

3.　SPH 法による弾性衝撃応答の解析精度

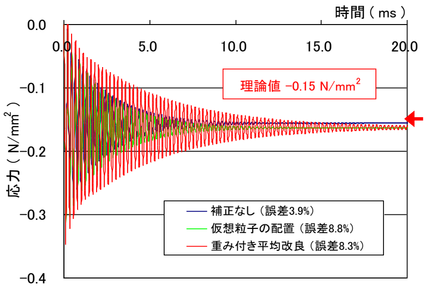
3.1　自由表面の影響

SPH 法は，影響範囲内の粒子間相互作用による重み付き平均を行うため，図−2 に示すような自由表面近傍では影響範囲内に粒子が偏在し，計算精度の低下が生じることが指摘されている．そこで，以下の 2 つの簡易な境界補間の方法を適用し，その効果を比較した．

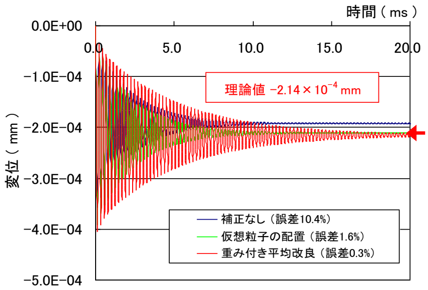
(a)　図−3(a)に示すように，境界粒子の外側に重み付き平均の計算にだけ利用する仮想粒子を配置し，影響範囲内の粒子の偏在を改善させる方法

(b)　図−3(b)に示すように，境界近傍で重み関数の積分値が減少しないように境界粒子の重みを増加させる方法

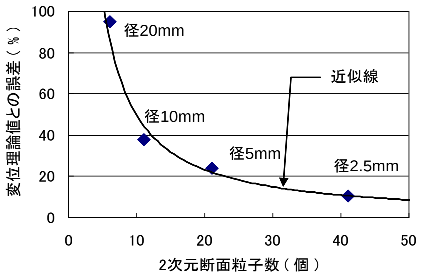
ここでは，図−4 に示すような軸方向長さ 300mm，高さおよび奥行き 100mm の均質な線形弾性体を，粒子径 10mm の集合体としてモデル化し，2 次元単軸圧縮場において(a)仮想粒子を用いた方法と(b)境界粒子の重みを増加した方法の 2 通りの解析を実施し，理論値との比較を試みた．荷重条件は，自由端側に合計 1.5kN の等分布荷重が 0ms 時より継続して作用するように設定した．材料特性には，ヤング率 $E = 2.1\times10^5$[N/mm^2]，ポアソン比 0.3 の鋼部材に相当する値を仮定した．図−5 にモデル中央位置の応力−時間関係を，図−6 に自由端中央高さの変位−時間関係を示す．これらの図から，単軸応力場のような一様な応力分布に近いケースでは，どちらの方法を用いても解析精度が大きく向上しており，境界粒子の重みを増加させた簡易な手法でも仮想粒子を配置する方法と同程度の効果が期待できることが認められる．また，変位誤差と応力誤差の値に差があることが確認できる．これは図−1 に示すように，変位は 3)のステップで kernel 近似により解いた運動方程式から求めた加速度をもとに計算するのに対して，応力の場合は，求められた加速度をさらに 4)のステップでもう一度 kernel 近似を実施することによりひずみ速度を求め，それをもとに応力を算出していることが一因であると考えられる．次に，2 次元片持ちばりモデル（はり高さ 100mm，はり長さ 1000mm，奥行きは 100mm を仮定）を作成し，自由端上縁に 1.5kN の一定荷重を作用させた弾性応答解析を実施し，固定端近傍の応力分布と自由端中央高さの鉛直変位をはり理論による値（鉛直変位−0.286mm，上下縁応力±9N/mm^2）と比較した．ここで，著者らが過去に行なった解析 [10]によると（奥行き 100mm を仮定した，はり高さ 100mm×はり長さ 1000mm の 2 次元弾性解析，荷重は自由端上縁に 1.5kN を継続載荷した），Kernel 関数として Spline 関数をはり部材に適用する場合，



図－9　応力－時間関係
（粒子径 2.5mm）



図－10　変位－時間関係
（粒子径 2.5mm）



図－11　2D 単軸解析における
断面内必要粒子数

はり高さ方向に少なくとも 20 個以上の粒子を配置しなければ，平面保持の仮定に基づくひずみ分布を精度良く表現できないことを踏まえ，直径 2.5mm の粒子ではり高さ方向に 41 個の粒子を配置した 2 次元片持ちばりモデルを用いて解析を行った．材料特性は，単軸圧縮場と同様に，E =2.1×10^5 N/mm^2，ポアソン比 0.3 の鋼材を仮定している．図－7 に 50ms 時（振動が落ち着いた時点）の固定端近傍の応力分布を，図－8 に自由端中央高さの鉛直変位－時間関係を示す．これらの図より，境界粒子の重みを修正した方法は仮想粒子を配置する方法よりも応力および変位の誤差が 4 倍程度大きいことが認められる．これは，はりの曲げ問題のように断面高さ方向に線形にひずみ分布が変化する場合には，一様なひずみ分布の場合と境界粒子の重みの修正率を変える必要があることを示していると考えられる．このことから，境界粒子の重みを補正して精度良い解を得るには，ひずみ分布に応じた補正が必要であり，任意の荷重・境界条件が想定される問題の解法としては適していないと考えられる．

一方，仮想粒子を配置する方法は，単軸圧縮・はりの曲げ変形いずれの問題においても適度な精度を示しており，種々の荷重・境界条件に一定の精度で対応可能であると考えられる．しかし，単軸圧縮場に比べるとはりの曲げ問題の場合に精度が低下していることがわかる．これは，はりの曲げの場合に，自由表面位置の粒子（仮想粒子）の挙動が部材全体の平均的な挙動より相対的に大きく，有効質量としての影響も大きくなることに起因していると思われる．以上のことから，任意の応力場に一定の精度を有する自由表面の補正方法を見いだすことは容易でない．従って，単純に離散化レベルを変えることで解析精度の向上を図る（粒子径を小さくすることで，自由表面近傍で Unity 条件を満たしていない粒子数を相対的に減らす）ことが可能であれば，最も望ましい選択であると考えられる．

これらのことから，単純に粒子径を小さくすることでどれくらい解析精度が向上するか，単軸応力場の解析により調べた．すなわち，図－4 と同様の寸法および荷重条件を直径 2.5mm の粒子でモデル化し，2 次元単軸圧縮解析を実施した．図－9 にモデル中央位置の応力－時間関係を，図－10 に自由端中央高さの変位‐時間関係を示す．図－5 と図－9 の補正なしの応力誤差を比較すると 27.3%から 3.9%に約 1/9 程度，図－6 と図－10 の補正なしの変位誤差を比較すると 38.0%から 10.4%に約 1/4 程度にそれぞれ改善されており，粒子径を小さくすることで解析精度が大きく向上していることが確認できる．図－11 に，同様の解析条件で径 2.5～20mm の 4 種類の 2 次元単軸圧縮解析における変位理論値との誤差を示す．この図より，粒子径と精度との間には明確な反比例の関係が認められた．

一方，図－9 に示す粒子径 2.5mm のモデルでは，仮想粒子の配置や重みを修正する方法で，補正なしの場合に対する精度の向上が認められないことから，2 通りの境界補正と離散化レベルの変更による相乗効果は期待できないことがわかった．

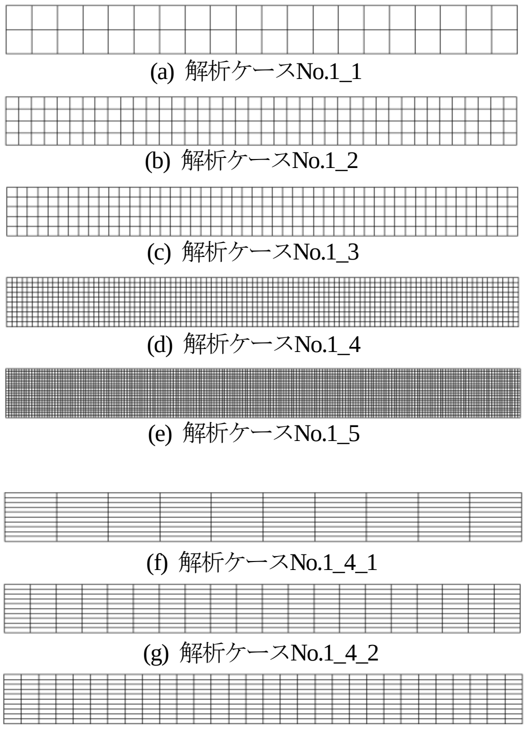
以上の考察から，自由表面の適切な補正方法を見いだすことは容易でなく，計算負荷に支障が無い範囲で使用する粒子径をできるだけ小さくし，境界上の粒子が有するエネルギー（ひずみエネルギーと運動エネルギーの和）が断面全体に占める割合を極力小さくすることで，解析精度の低下を防ぐことが望ましいと考えられる．

3.2　SPH 粒子の離散化レベルと解析精度

3.1 の考察結果を踏まえ，自由表面に特別な補正を加えることなく，所定の解析精度を保証する離散化レベル（粒子径）について検討を試みた．その際，構造解析で一般的に利用される有限要素法（1 次の形状関数による変位補間）の要素寸法と精度の関係を比較対象とした解析を行い，SPH 法による解析の計算効率についても検証した．

(1) 有限要素解析における離散化レベルと解析精度

FEM における離散化レベルと解析精度を把握するために支間 1000mm，はり高さ 100mm の片持ちばりを対象とした検討を行った．材料定数には，ヤング率 2.1×10^5 N/mm^2，ポアソン比 0.3 と鋼材の値を仮定した．表－1 に離散化モデル（メッシュ分割数をパラメータとした）全 8 ケースの条件を，図－12(a)～(h)に各解析モデルを示す．図－13 に解析ケース No.1_1～1_5 の固定端部に位置する節点の応力分布を示す．式(6)により計算した最上下


(a) 解析ケースNo.1_1
(b) 解析ケースNo.1_2
(c) 解析ケースNo.1_3
(d) 解析ケースNo.1_4
(e) 解析ケースNo.1_5
(f) 解析ケースNo.1_4_1
(g) 解析ケースNo.1_4_2
(h) 解析ケースNo.1_4_3

図−12　FEM 解析モデル図

縁応力の理論値は，±150N/mm^2 である．

$$\sigma = \pm \frac{M}{I} y \tag{6}$$

図−13 より，ケース 1_1 以外はほぼ理論値と等しい値を示しており，はり高さ方向の要素分割を 4～5 程度で線形の応力分布を精度良く表現できることが確認できた．図−14 に解析ケース No.1_1～1_5 の自由端鉛直変位を示す．また，式(7)で計算した初等はり理論の値は，4.762mm であった．

$$\delta_{st} = \frac{Pl^3}{3EI} \tag{7}$$

図より，1 要素が1×1cmの正方形になるように分割したケース1_4の時の変位は4.765mmであり，ほぼ理論値と等しい値を示すことがわかる．一方，1 要素が5×5cmのケース1_1は極端に精度が低下することが確認できた．次に，図−15に解析ケースNo.1_4および1_4_1～1_4_3の自由端鉛直変位を示す．ケース1_4_1は他ケースと比較して極端に精度が低下するが，これは要素の1:10に設定したアスペクト比の影響によるものと考えられる．

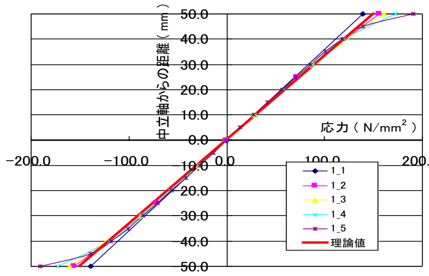
以上の結果から，FEMを用いた解析では，少なくともはり高さ方向の要素分割は4～5程度，はり軸方向の要素分割は30程度を確保すれば，定量的に許容できる解析値が得られることが確認できた．

(2) SPH 法における離散化レベルと解析精度

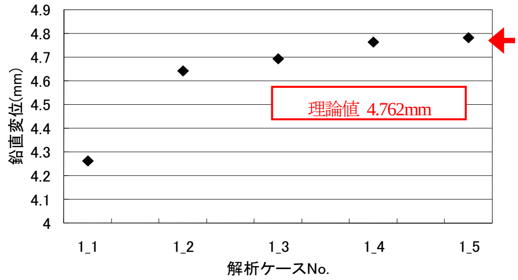
SPH 法における離散化レベルと解析精度の関係を把握するために，FEM による検討の場合と同一条件（支間

表−1　解析ケースおよびメッシュ分割

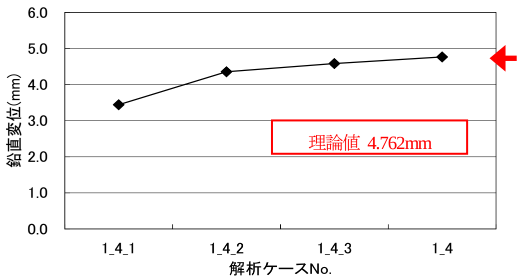
解析ケースNo.	分割数 高さ方向	分割数 長さ方向	備考
1_1	2	20	1要素が5×5cmの正方形
1_2	4	40	1要素が2.5×2.5cmの正方形
1_3	5	50	1要素が2×2cmの正方形
1_4	10	100	1要素が1×1cmの正方形
1_5	20	200	1要素が0.5×0.5cmの正方形
1_4_1	10	10	長さ方向のみ分割数を変化
1_4_2	10	20	
1_4_3	10	30	



図−13　固定端の応力分布（No.1_1～1_5）

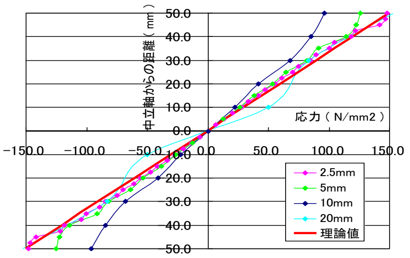


図−14　自由端鉛直変位（No.1_1～

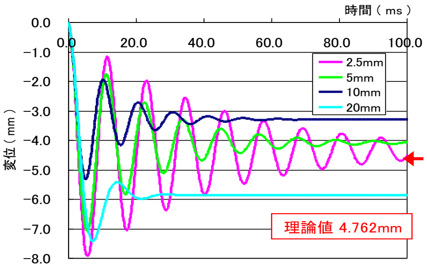


図−15　自由端鉛直変位（No.1_4, 1_4_1～1_4_3）

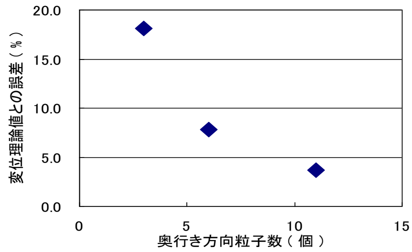
1000mm，はり高さ 100mm の片持ちばり，ヤング率 2.1×10^5 N/mm^2，ポアソン比 0.3 の鋼材を仮定）による計算を行った．ここでは，自由表面に特別な補正を加えることなく，離散化レベル（粒子径）を変化させて解析精度を検証するために，はり高さ方向に 5～40 個の粒子を配置した 4 種類のモデル（粒子径 20mm～2.5mm）による比較検討を行った．図−16 に固定端近傍のはり断面内の応力分布を，図−17 に自由端の変位応答の比較結果を示す．これらの図より，粒子径が小さくなり離散化レベルが細密になるほど解析値が理論値に近くなるが，同一寸法の要素を用いた FEM に比べて解析精度が低いことが認められる（ここで，図−17 の粒子径 20mm の変位応答は，理論値よりも大きな値となっており，他の応答と傾向が異なる．これは，粒子径 20mm の場合，はり高さ方向に 6 コしか粒子が配置されていないため，断面内の応力分布を適切に表現できていないためと考えられる）．自由端の変位応答について，SPH 法を用いた解析ではり



図－16　平面保持の仮定



図－17　端点の変位応答



図－19　奥行き方向必要粒子数

理論値と 10%以下の誤差の解析値を得るには，自由表面に対する補正を全く行わない場合には，はり高さ方向に 40 個程度の粒子配置が必要であることが認められる．この結果を，前述の FEM による考察と比較（SPH 粒子と同様に縦・横で同じ寸法の要素による結果）すると，2.5×2.5cm の正方形要素を用いた FEM 解析と直径 2.5mm の粒子を用いた SPH 解析がほぼ同程度の解析精度を有することがわかる．したがって，SPH を用いて構造解析を行う場合，線形の形状関数による FEM 解析の 10 倍程度の細密な離散化が必要であることが認められた．

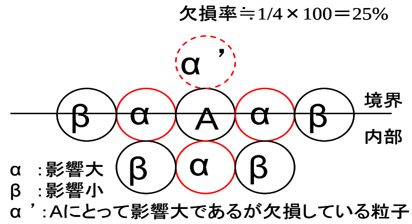
最後に，はり部材の 3 次元モデルに関する基礎的な検討を試みた．はりの曲げの場合，基本的に奥行き方向に対する応力の変化は小さく，一様な分布に近いと考えられる．したがって，単軸応力場における自由表面の離散化レベルが，はり奥行き方向の離散化の目安になると考えられる．図－11 に示す 2 次元単軸解析では，精度良い解を得るには断面内に 20 個以上の粒子を配置する必要があった．しかし，図－18 に示すように，2 次元解析における境界粒子 A の重み欠損率（重みの影響が大きい最も近接している粒子による概算値）は，1/4×100=25%となるが，3 次元の場合に同様の考えで欠損率を求めると 1/6×100=16.7%であり，奥行き方向に 20 個以上の粒子を配置する必要は必ずしもないと考える．そこで，奥行き方向に粒子数が 3～11 個の 3 通りのモデル（粒子間隔 2.5mm，支間 300mm，はり高さ 100mm，奥行き 25mm・12.5mm・6.25mm の 3 種類）を用いて曲げ変形に対する解析精度を調べた．入力荷重は，はり理論より計算される自由端変位が 0.5143mm となるように，それぞれ 25kN・12.5kN・5kN とし，自由端上縁に入力した．図－19 に自由端の変位応答と理論値との誤差を示す.この図より，3 次元片持ちばり解析の場合，奥行き方向に 10 個程度の粒子数を確保すれば精度良い解が得られることが認められた．

4. SPH 法による弾塑性衝撃応答解析

4.1　SPH 法を用いた弾塑性衝撃応答解析の概要

(1) 弾塑性構成式について

SPH 法を用いた弾塑性解析においても，応力－ひずみ関係を規定する構成方程式などに，FEM と同様に連続体



図－18　2D 境界粒子の重み欠損率の概算

力学をベースとした諸式を適用することができる [11), 12)]．本研究では，偏差応力の 2 次不変量 J_2 を用いた式(7)に示す Von Mises の降伏条件を仮定し，式(8)に示す弾塑性構成式を用いた．

$$f(J_2) = J_2 - k^2 = 0 \tag{7}$$

$$J_2 = \frac{1}{6}\left\{(\sigma_{11}-\sigma_{22})^2 + (\sigma_{22}-\sigma_{33})^2 + (\sigma_{33}-\sigma_{11})^2\right\} + \sigma_{12}{}^2 + \sigma_{23}{}^2 + \sigma_{31}{}^2$$

$$\{d\sigma_{ij}\} = \left[D_{ijkl}^{ep}\right]\{d\varepsilon_{kl}\} \tag{8}$$

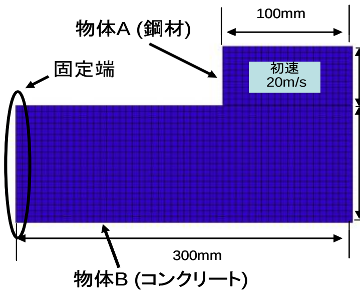
$$D_{ijkl}^{ep} = D_{ijkl}^{e} - \frac{9G^2\sigma'_{ij}\sigma'_{kl}}{\bar{\sigma}^2(H+3G)}$$

ここで，D_{ijkl}^{ep} は弾塑性剛性マトリクス，D_{ijkl}^{e} は弾性剛性マトリクス，G はせん断係数，$\bar{\sigma}$ は Von Mises の降伏条件を仮定した相当応力，H は硬化係数である．

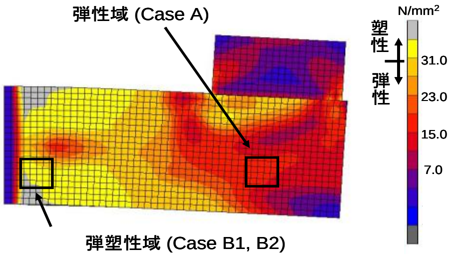
SPH では，FEM と同様の構成則を適用できることから，後に示す共回転速度による応力補正などについても，従来の FEM で用いられてきた式をそのまま SPH アルゴリズム内に利用できる．このことは，個別要素法とは大きく異なる特徴であるといえる．

(2) 共回転速度による応力補正について

物体の変形を表す場合，空間に固定された基準座標系と物体点に固定された局所座標系の 2 通りの座標系を考えると，式(7)の構成則などのように，本研究で用いている式は基準座標系による表記である．変形が微小である場合は，基準座標系と局所座標系との間のズレはそれほど問題にならない．しかし，部材の変形が増大し着目している物体点の回転量が大きくなると，基準座標系と局所座標系の間にズレが生じる．そこで，客観性の原理を満足するため，物体点とともに回転する局所座標系を考慮したアルゴリズムを用いる必要がある．客観性を満足する応力 σ の速度形には埋込み速度，共回転速度などいくつかの定義が提案されているが [13)]，本解析では式(9)に示す共回転速度を用いた．



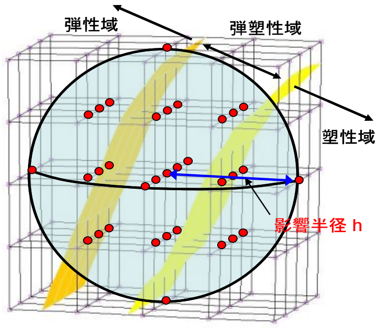
図－20　比較用 FEM 解析



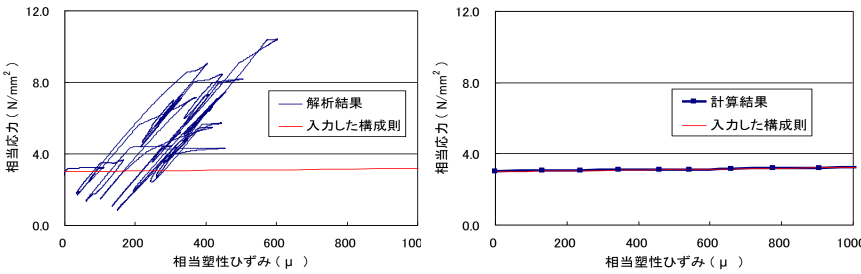
図－21　相当応力分布（Mises を仮定）

表－2　弾塑性解析における影響半径の影響

Case	弾性/塑性	影響半径	軸方向ひずみ増分 (μ) FEM	軸方向ひずみ増分 (μ) SPH	FEMとの差 (%)
A	Elastic	h	20.765	19.407	6.5
B1	Plastic	h	−45.100	−86.371	91.5
B2	Plastic	h/2	−45.100	−41.136	8.8



図－22　弾性域および塑性域における境界近傍の応力分布



(a) 補正なし　　(b) リターンマッピングを適用

図－23　弾塑性解析における塑性化した粒子の応力－ひずみ関係

$$\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ij} - W_{ik}\sigma_{kj} + \sigma_{ik}W_{kj} \qquad (9)$$

ここで，$\bar{\sigma}_{ij}$ は局所座標系における応力増分，W_{ik}・W_{kj} は回転テンソルである．

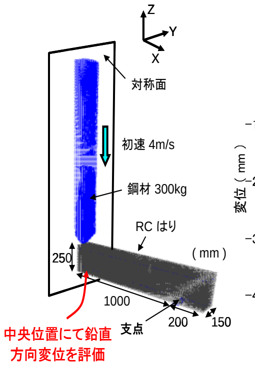
4.2　SPH 法による弾塑性衝撃解析の精度に関する考察

SPH 法を用いて固体材料の弾塑性解析を行う場合，塑性域と弾性域の境界面近傍では，剛性が極端に異なる粒子が混在する状態になることから，SPH 法特有の Kernel 関数を用いた重み付き平均によるひずみ場の計算が計算精度の低下を招く可能性がある．そこで，弾性と塑性が混在する非均質な場に対する SPH 解析の精度について検討を行った．最初に，解析精度に重み付き平均領域の大きさを規定する影響半径が与える影響を調べるために，2 種類の半径（h，$h/2$）を用いた片持ちばりの 2 次元弾塑性解析を行い，応力や変位応答の比較を行った．さらに，Kernel 関数を用いた重み付き平均自体の特性を把握するために，同一条件で有限要素法による 2 次元弾塑性解析を行い，両者の結果を比較することにした．

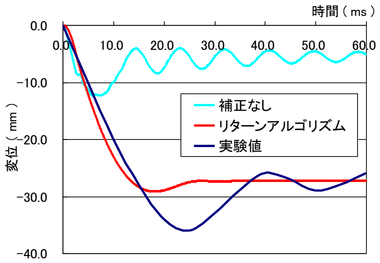
解析は，2 種類の物体 A（鋼材），B（コンクリート）を想定し，両者に Von Mises の降伏基準に基づく弾塑性応力－ひずみ関係を，簡易なバイリニア型を仮定した解析を行った．鋼材には 300N/mm^2，コンクリートには 30N/mm^2（引張強度は 3N/mm^2）の値を降伏応力とし，それぞれ降伏後は 1/100 の硬化特性を仮定した．また，コンクリートの引張破壊条件は特に仮定していない．解析条件には，物体 A が物体 B に衝突後（接触後）の応答を想定し，図－20 に示すように両者が接触した状態から物体 A に 20m/s の鉛直下向きの初速度を与えた．図－21 は，FEM 解析で得られた物体 B 内部の Mises の降伏条件式を仮定した相当応力分布（最大変位時）を示したものである．この図より，広範な領域で塑性化が生じていることが認められる．図－22 は，FEM による弾性域と塑性域の境界近傍の有限要素内の積分点における応力分布を，表－2 は同一箇所のひずみについて FEM と SPH（2 種類の影響半径 h，$h/2$ で計算）の結果を比較したものである．表－2 の結果より，SPH 解析によるひずみは，用いた影響半径の値で大きく異なり，影響半径を小さくするほど有限要素解析による値に近づいていくことが認められる．このことから，SPH 法を用いた弾塑性解析を行う場合には，局所的な応力場を考慮して影響半径の設定を変えることが望ましいと考えられる．

図－23(a)は，SPH 法による弾塑性解析で塑性化した粒子の応力－ひずみ応答の推移を示したものである．SPH 法による解析は，非常に小さな時間増分（本計算では $\Delta t = 1.0\times10^{-7}$sec）による陽的な時間積分を行っているが，応力－ひずみ応答に激しい振動が認められ，解析に仮定した応力－ひずみ関係に従わない結果が得られている．この原因として，弾性時（除荷時を含む）と塑性時で 100 倍の剛性の変化が生じることから，降伏後に除荷・負荷による剛性の急変が振動をもたらしていると考えられる．この結果を踏まえ，一回の時間増分は非常に小さくても，時間増分毎に式(10)に示すようなリターンマッピングアルゴリズム[13]を適用し，塑性化した粒子が所定の応力－ひずみ関係に従うように修正した解析を試みた．

$$\sigma_{ij}'^{t+\Delta t} = \frac{\left(\bar{\sigma}^{t} + E\Delta\bar{\varepsilon}^{p}\right)}{\left(\bar{\sigma}^{t} + E\Delta\bar{\varepsilon}^{p}\right) + 3G\Delta\bar{\varepsilon}^{p}} \times \sigma_{ij}'^{Try} \qquad (10)$$



図－24　RC 解析モデル



図－25　RC 解析の
変位応答比較

ここで，σ'^{Try}_{ij} は修正前の応力成分，降伏条件式は Von Mises の降伏条件式を仮定した．リターンマッピングアルゴリズムは，σ'^{Try}_{ij} に修正項を乗じて，構成則どおりに適合していない応力を降伏曲面まで引き戻すアルゴリズムである．

図－23(b)は，リターンマッピングアルゴリズムを適用した解析により求めた粒子の応力－ひずみ応答を示したものである．この図より，解析手法を修正した効果により，概ね所定の応力－ひずみ関係に従う結果が得られている．そこで，図－24 に示すような単純ばり 1/2 解析モデル（重錘質量 300kg，衝突速度 4m/s，はり寸法：高さ 250×長さ 1000×奥行き 150mm）を用いて，過去に実施された RC 単純ばりの重錘落下実験 [1] を対象としたシミュレーションを行い，支間中央点の変位応答を実験値と比較し，SPH 法による弾塑性衝撃応答解析の定量的な精度の検証を行った．これまでの検討を踏まえ，はり高さ方向に 40 個ほど粒子を配置するため，粒子径は 6.25mm とし，影響半径は粒子 2 個分（直径の 2 倍）とした．図－25 は，リターンマッピングを考慮した場合としない場合の 2 種類の SPH による計算値を実験結果と比較したものである．この図より，リターンマッピングを行わない方法による変位応答は，実験値の 1/4 程度の最大変位と大きく異なるが，リターンマッピングを行った解析では顕著な改善がみられ，定量的な精度が保証されることが確認された．

以上のことから，SPH 法を用いて弾塑性解析を行う場合，粒子の応力状態で適切な影響半径は異なると考えられるが，影響半径を変えずにリターンマッピングアルゴリズムを適用することで解析精度を確保することも可能であることが認められた．

5. 結言

本研究により得られた知見を以下に示す．

(1)重み付き平均の改良による自由表面の境界補間は，単軸場のような一様な応力場では，仮想粒子を配置と同程度の効果があることを確認した．しかし，任意の応力場における補正は容易ではないため，粒子径を小さくし，Unity 条件を満たしていない自由表面近傍粒子の影響を低減することで，解析精度の低下を防ぐことが望ましいと考えられる．

(2) 片持ちばり解析において，FEM の場合，少なくともはり高さ方向の要素分割は 4～5 程度確保すれば，精度良い結果が得られることを確認した．一方，SPH 解析において同程度の精度を追求する場合，はり高さ方向に 40 個程度の粒子配置が必要であった．このことから，SPH を用いて構造解析を行う場合，FEM 解析の 10 倍程度の細密な離散化が必要であることが認められた．

(3) SPH 法を用いて弾塑性解析を行う場合，影響半径を変えずにリターンマッピングアルゴリズムを適用することで，解析精度を改善できることを確認した．

参考文献

1) 土木学会：衝撃実験・解析の基礎と応用，構造工学シリーズ 15，丸善，2004.
2) 岸徳光，三上浩，小室雅人，松岡健一：弾塑性衝撃応答解析法の RC 梁への適用性，構造工学論文集，Vol. 43A，pp1579-1588，1997.3.
3) 井元勝慶，大野友則，佐々木昇，小暮幹太，：重錘落下衝突を受ける RC はり部材の衝撃挙動と衝撃応答解析における材料の非線形特性，構造工学論文集，Vol. 41A，pp1201-1212，1995.3.
4) 原木大輔，香月智，藤掛一典：個別要素法のコンクリート破片飛散シミュレーションへの応用，応用力学論文集，Vol.9，pp667-678，2006.8.
5) G.R.Liu，M.B.Liu：Smoothed Particle Hydrodynamics, 2003.
6) Gingold R. A., Monaghan J. J. : Smoothed Particle Hydrodynamics, Monthly Notices of the Royal Astronomical Society 181, 375-389, 1977.
7) Libersky L. D., Petschek A. G. : Smoothed Particle Hydrodynamics with Strength of materials, Proceeding of The Next Free Lagrange Conference 395, 248-257, 1991.
8) Lawrence E. Malvern：Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium, 1969.
9) 久田俊明, 野口裕久 : 非線形有限要素法の基礎と応用, 丸善，2002.
10)深澤仁，園田佳巨：SPH 粒子法の構造部材の弾塑性解析への適用に関する基礎的研究，構造工学論文集，Vol.55A，pp1358-1365，2009.3.
11)酒井譲，山下彰彦 : SPH 理論に基づく粒子法による構造解析の基礎的検討, 日本機械学会論文集(A 編)Vol.67, No.659，2001.7.
12)酒井譲 : SPH 法大変形解析の基礎と応用，計算工学講演会論文集 Vol.13，pp481-484，2008.5
13)日本塑性加工学会：非線形有限要素法，コロナ社，1994.

（2009 年 9 月 24 日受付）