構造工学論文集 Vol.56A ( 2010 年 3 月)　　　　土木学会

# ハイブリッド型仮想仕事の原理による修正 RBSM の開発

Development of modified RBSM by principle of hybrid-type virtual work

田尻　康之*，山村　和人**，竹内　則雄***
Yasuyuki Tajiri, Kazuto Yamamura, Norio Takeuchi

* 工修，法政大学大学院，システムデザイン研究科（〒102-8160 東京都千代田区富士見 2-17-1）
**工修，新日本製鐵株式会社，環境・プロセス研究開発センター（〒293-8511千葉県富津市新富20-12）
*** 工博，法政大学教授，理工学部機械工学科（〒184-8584 東京都小金井市梶野町 3-7-2）

The Rigid Bodies-Spring Model (RBSM) is a generalized model for discrete limit analysis, and assumes a rigid displacement field. For this reason, it cannot find the value of stress in each element. On the other hand, authors developed the Hybrid-type Penalty Method (HPM) which assumes the linear displacement field using the principle of hybrid type virtual work. In this paper, we proposed the method of finding for the stress in each element in RBSM by applying a rigid displacement field to the displacement field of this HPM. Furthermore, we proposed modified RBSM improving a rigid displacement using this result, and examined the accuracy of the solution obtained from some examples of numerical computation by present method.

*Key Words: RBSM, HPM, Hybrid-type virtual work, discrete limit analysis*
*キーワード：RBSM, HPM，ハイブリッド型仮想仕事の原理，離散化極限解析*

## 1. はじめに

川井は，構造物が崩壊状態になるとリンク機構を構成，剛体的挙動を示すという点に着目し，剛体要素をばねで結合する剛体ばねモデル（RBSM：Rigid Bodies-Spring Model ）を開発した [1]．RBSM では，要素間に設けられたばねに蓄えられるエネルギーを評価することで極限荷重やすべり線を効率よく求めている．崩壊機構と表面力の釣り合いが満たされていることから，RBSM の極限荷重は上界値となる [2]．当初，RBSM は金属構造や地盤の離散化極限解析に利用されてきたが，最近ではコンクリートの解析技術として着目されている [3)4)]．

RBSM は要素を剛体と仮定していることから，要素内の応力やひずみといった情報が得られず，さらに，変位解の精度も要素分割に左右され，分割パターンによってはその精度が低下する傾向がある．これらの問題を解決あるいは改善することができれば，その利用範囲はさらに拡大するものと思われる．

一方，RBSM で採用されているような，直接不連続性を表現する方法として XFEM(eXtended Finite Element Method) [5] や不連続 Galerkin ( dG : discontinuous Galerkin ) 法 [6)7)] などがある．dG 法の一つで，ペナルティ関数に関する考え方を要素間の変位のジャンプに適用することで，要素間の弱い連続性を満たす方法を interior penalty (IP) FEM と呼んでいる [8]．著者らは，ハイブリッド型の仮想仕事の原理 [9] をもとに，このペナルティ法の考え方を適用し，dG 法と類似のハイブリッド型ペナルティ法 (HPM：Hybrid-type Penalty Method) を開発した [10)-12)]．HPM は要素毎に独立な線形あるいは高次の変位場を仮定し，要素内のエネルギーに加えて，要素間の連続性をペナルティ関数により考慮する方法である．

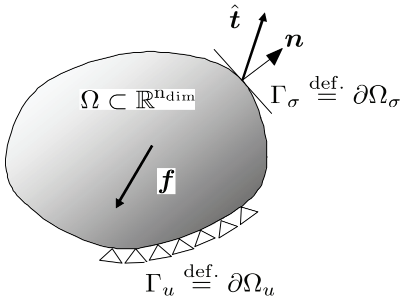
著者らは，HPM の変位場として，剛体変位場を仮定し，ペナルティ関数のかわりにばね定数を用いれば，HPM の離散化方程式は，RBSM のそれと同じになることを示した [13]．さらに，RBSM の解析結果を利用して要素内応力を求める方法を提案した．この方法による要素内応力の精度は，二次元弾性問題でのみ検証されている．

RBSM は，本来，離散化極限解析のために開発されたモデルである．そこで，本論文では，三次元問題や離散化極限解析，引張クラック解析，それらの複合破壊を呈する材料非線形問題においても，この方法が有効であるかを検討する．また，この方法によって求まった要素内ひずみを用いて，剛体変位を修正する方法（これを修正 RBSM と呼ぶ）を提案し，二次元問題や三次元問題，材料非線形問題の解析を行い，修正された剛体変位の解の精度を検討する．

## 2. HPMの離散化方程式

### 2.1　ハイブリッド型仮想仕事式

図−1 に示す弾性体の領域を $\Omega \subset \mathbb{R}^{n_{\dim}}$ とするとき，以下の関係を満たす変位 $\boldsymbol{u}:\Omega \to \mathbb{R}^{n_{\dim}}$ を見いだす問題を考える．




図−1　弾性体

$$\nabla\cdot\boldsymbol{\sigma}+\boldsymbol{f}=0 \quad \text{in}\,\Omega \tag{1}$$

$$\boldsymbol{\sigma}=\boldsymbol{D}:\boldsymbol{\varepsilon}$$

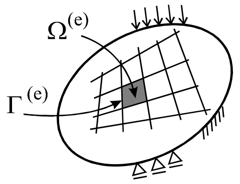
$$\boldsymbol{\varepsilon}=\nabla^s\boldsymbol{u}:=\frac{1}{2}\left\{\nabla\boldsymbol{u}+{}^t(\nabla\boldsymbol{u})\right\}$$

$$\boldsymbol{u}|_{\Gamma_u}=\hat{\boldsymbol{u}} \ \ \text{(given)}$$

$$\boldsymbol{\sigma}|_{\Gamma_\sigma}\hat{\boldsymbol{n}}=\hat{\boldsymbol{t}} \ \ \text{(given)}$$

ここで，$\Gamma_\sigma := \partial\Omega_\sigma$ は表面力が与えられる境界，$\Gamma_u := \partial\Omega_u$ は変位が与えられる境界を表しており，$\Gamma=\Gamma_u\cup\Gamma_\sigma$ $(\Gamma_u\cap\Gamma_\sigma=\emptyset)$なる関係がある. また,$\boldsymbol{\sigma}$ はCauchy応力，$\boldsymbol{f}$ は物体力，$\boldsymbol{\varepsilon}$ はひずみで，$\nabla$ は微分作用素，$\nabla^s$ は$\nabla$ の対称部分を表している．

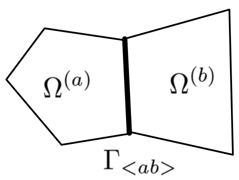
いま，図−2 に示すように，領域$\Omega$が閉境界$\Gamma^{(e)} := \partial\Omega^{(e)}$ で囲まれた M 個の部分領域 $\Omega^{(e)}\subset\Omega$ から構成されているものとする．




$$\Omega=\bigcup_{e=1}^{M}\Omega^{(e)}$$

$$\Omega^{(r)}\cap\Omega^{(q)}=0 \quad (r\neq q)$$

図−2　部分領域




$$\Gamma_{<ab>} := \Gamma^{(a)}\cap\ \Gamma^{(b)}$$

図−3　部分領域の境界

このとき，ハイブリッド型の仮想仕事の原理では，図−3 に示すように，隣接する２つの部分領域 $\Omega^{(a)}$ と$\Omega^{(b)}$ の共通の境界 $\Gamma_{<ab>}$ において，付帯条件

$$\widetilde{\boldsymbol{u}}^{(a)}=\widetilde{\boldsymbol{u}}^{(b)} \quad \text{on}\ \Gamma_{<ab>} \tag{2}$$

をLagrangeの未定乗数$\boldsymbol{\lambda}$を用いて仮想仕事式に導入することで以下のように与えられる．

$$\sum_{e=1}^{M}\left(\int_{\Omega^{(e)}}\boldsymbol{\sigma}:\mathrm{grad}(\delta\boldsymbol{u})dV-\int_{\Omega^{(e)}}\boldsymbol{f}\cdot\delta\boldsymbol{u}\,dV\right)$$
$$-\sum_{s=1}^{N}\left(\delta\int_{\Gamma_{<s>}}\boldsymbol{\lambda}\cdot(\widetilde{\boldsymbol{u}}^{(a)}-\widetilde{\boldsymbol{u}}^{(b)})\,dS\right)-\int_{\Gamma_\sigma}\hat{\boldsymbol{t}}\cdot\delta\boldsymbol{u}\,dS=0$$
$$\forall\delta\boldsymbol{u} \tag{3}$$

ここで，N は部分領域の共通の境界数を，$\delta\boldsymbol{u}$ は仮想変位を表している．

### 2.2　変位場とLagrangeの未定乗数

HPMでは部分領域 (e) 内の変位場 $\boldsymbol{u}^{(e)}$ を，それぞれの部分領域で独立に仮定しており, 高次の変位場 [11) ]や応力を未知パラメータとする変位場 [14)]，薄板の変位場 [15)] などが提案されている．本論文では，以下に示す 1 次の変位場を用いて理論の展開をする．

$$\boldsymbol{u}^{(e)}=\boldsymbol{N}_d^{(e)}\boldsymbol{d}^{(e)}+\boldsymbol{N}_\varepsilon^{(e)}\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} \tag{4}$$

ここで，$\boldsymbol{d}^{(e)}$ は，部分領域内の一点 における剛体変位と剛体回転を表しており，$\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)}$ は，要素内で一定なひずみ，$\boldsymbol{N}_d^{(e)}$，$\boldsymbol{N}_\varepsilon^{(e)}$ は係数行列で座標の関数で表される．

一方，式(3)のLagrangeの未定乗数 $\boldsymbol{\lambda}$ は物理的には表面力を表しており，ペナルティ関数 $\boldsymbol{k}$ により次のように仮定する．

$$\boldsymbol{\lambda}_{<ab>}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{\delta}_{<ab>} \tag{5}$$

ここで，$\boldsymbol{\delta}_{<ab>}$ は，部分領域 $\Omega^{(a)}$ と $\Omega^{(b)}$ の境界における相対変位を表している．

### 2.3　離散化方程式

式(4)と(5)の関係を式(3)に代入することで，HPM の離散化方程式が以下のように得られる [10)].

$$\boldsymbol{KU}=\boldsymbol{P} \tag{6}$$

$$\boldsymbol{K}=\sum_{e=1}^{M}\boldsymbol{K}^{(e)}+\sum_{s=1}^{N}\boldsymbol{K}_{<s>} \quad , \quad \boldsymbol{P}=\sum_{e=1}^{M}\boldsymbol{P}^{(e)}$$

ここで,$\boldsymbol{U}$ は全体系の変位ベクトルであるが, HPMの場合, 剛体変位 $\boldsymbol{d}$ とひずみ $\boldsymbol{\varepsilon}$ から $\boldsymbol{U}=\lfloor\boldsymbol{d},\boldsymbol{\varepsilon}\rfloor^t$ のように構成されている．

また，$\boldsymbol{K}_{<s>}$ は付帯条件に関わる係数行列，$\boldsymbol{P}^{(e)}$ は荷重項，$\boldsymbol{K}^{(e)}$ は要素内剛性に関わる項であり，要素面積を $A^{(e)}$ ，構成行列を $\boldsymbol{D}^{(e)}$ として以下の関係にある．

$$\boldsymbol{K}^{(e)}\boldsymbol{U}^{(e)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A^{(e)}\boldsymbol{D}^{(e)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{d}^{(e)} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} \end{Bmatrix} \tag{7}$$

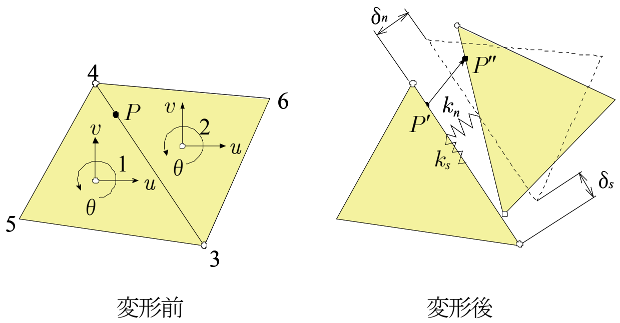
式(7)の関係を用いて式(6)の離散化方程式を行列によりもう少し詳細に表現すると，以下のようになる．

$$\begin{bmatrix} \boldsymbol{K}_{dd} & \boldsymbol{K}_{d\varepsilon} \\ \boldsymbol{K}_{\varepsilon d} & \boldsymbol{K}_{\varepsilon\varepsilon} + \boldsymbol{D}_{\varepsilon\varepsilon} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{d} \\ \boldsymbol{\varepsilon} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{P}_d \\ \boldsymbol{P}_\varepsilon \end{Bmatrix} \tag{8}$$

このように，離散化方程式(8)は，付帯条件によって生じる項 $\boldsymbol{K}$ と，要素内剛性によって生じる項 $\boldsymbol{D}$ から構成されている．

## 3. RBSM の離散化方程式

RBSM の定式化は，通常，図−4 に示すように，隣接する剛体要素の間に設けられたばねに蓄えられるエネルギーを評価することで進められる [4) ]．




図−4　RBSM における剛体−ばね系

一方，HPM の定式化において，式(4)で表される線形変位場に変わり，以下の剛体変位場を仮定する．

$$\boldsymbol{u}^{(e)} = \boldsymbol{N}_d^{(e)}\boldsymbol{d}^{(e)} \tag{9}$$

このとき，HPM の離散化方程式(8)は次のようになる．

$$\boldsymbol{K}_{dd}\boldsymbol{d} = \boldsymbol{P}_d \tag{10}$$

これを詳細に記述すると，以下のようになる．

$$\sum_{s=1}^{N} \begin{bmatrix} \boldsymbol{k}_{dd}^{<s_a s_a>} & \boldsymbol{k}_{dd}^{<s_a s_b>} \\ \boldsymbol{k}_{dd}^{<s_b s_a>} & \boldsymbol{k}_{dd}^{<s_b s_b>} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{d}^{(s_a)} \\ \boldsymbol{d}^{(s_b)} \end{Bmatrix} = \sum_{s=1}^{N} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{P}_d^{(s_a)} \\ \boldsymbol{P}_d^{(s_b)} \end{Bmatrix} \tag{11}$$

ここで，係数行列は以下のとおりである．

$$\boldsymbol{k}_{dd}^{<ab>} = \int_{\Gamma_{<ab>}} {}^t\boldsymbol{N}_d^{(a)}\boldsymbol{k}\boldsymbol{N}_d^{(b)} d\Gamma \tag{12}$$

いま，二次元問題を例に考えてみる．HPM において，式(12)の $\boldsymbol{k}$ は，ペナルティ関数を意味しているが，これを

$$\begin{Bmatrix} \lambda_n \\ \lambda_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_n & 0 \\ 0 & k_s \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta_n \\ \delta_s \end{Bmatrix} \tag{13}$$

とし，平面ひずみの場合，$k_n$ ，$k_s$ を以下のように仮定する．

$$\left.\begin{aligned} k_n &= \frac{(1-\nu)E}{(1-2\nu)(1+\nu)(h_1+h_2)} \\ k_s &= \frac{E}{(1+\nu)(h_1+h_2)} \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

$E$ は弾性係数，$\nu$ はポアソン比，$h_1$ ，$h_2$ は各要素の図心から，該当境界辺に下した垂線の高さである．このように考えると，式(10)の解式は RBSM の離散化方程式と一致する．

## 4. RBSM の要素内応力と修正 RBSM

### 4.1　RBSM の要素内応力

HPM の離散化方程式(8)は以下のように書くこともできる．

$$\boldsymbol{K}_{dd}\boldsymbol{d} = \boldsymbol{P}_d - \boldsymbol{K}_{d\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{15}$$

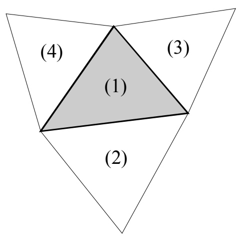
$$\boldsymbol{D}_{\varepsilon\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{P}_\varepsilon - (\boldsymbol{K}_{\varepsilon d}\boldsymbol{d} + \boldsymbol{K}_{\varepsilon\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}) \tag{16}$$

式(9)に示す剛体変位場では $\boldsymbol{\varepsilon} = 0$ である．このように考えると，式(10)に示す RBSM の離散化方程式は，式(15)の一次近似としてとらえることができる．

一方，式(16)は，本来，式(15)と連立して解くべき式であるが，式(15)で求まった剛体変位を用いて，

$$\boldsymbol{D}_{\varepsilon\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{P}_\varepsilon - \boldsymbol{K}_{\varepsilon d}\boldsymbol{d} \tag{17}$$

を解くことで，近似的に要素内のひずみ，すなわち応力を求めることができる．




図−5　要素(1)と隣接要素

ここで，図−5 に示す要素配置関係を例に，式(17)を具体的に展開する．着目要素(1)の境界辺に関する積分は(2)〜(4)要素のみに関係し，その他の要素とは連立方程式上の関連性はない．この例に対する式(17)の一部を示すと次のようになる．

$$\begin{bmatrix} \ddots & & & & & \\ & A^{(1)}\boldsymbol{D}^{(1)} & & & 0 & \\ & & A^{(2)}\boldsymbol{D}^{(2)} & & & \\ & & & A^{(3)}\boldsymbol{D}^{(3)} & & \\ & 0 & & & A^{(4)}\boldsymbol{D}^{(4)} & \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(3)} \\ \boldsymbol{\varepsilon}^{(4)} \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{P}_{\varepsilon}^{(1)} \\ \boldsymbol{P}_{\varepsilon}^{(2)} \\ \boldsymbol{P}_{\varepsilon}^{(3)} \\ \boldsymbol{P}_{\varepsilon}^{(4)} \\ \vdots \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \ddots & & & & & \\ 0 & 3\boldsymbol{k}_{\varepsilon d}^{(1,1)} & \boldsymbol{k}_{\varepsilon d}^{(1,2)} & \boldsymbol{k}_{\varepsilon d}^{(1,3)} & \boldsymbol{k}_{\varepsilon d}^{(1,4)} & 0 \\ & \boldsymbol{k}_{\varepsilon d}^{(1,2)} & \boldsymbol{k}_{\varepsilon d}^{(2,2)} & & & \\ & \boldsymbol{k}_{\varepsilon d}^{(1,3)} & & \boldsymbol{k}_{\varepsilon d}^{(3,3)} & & \\ & \boldsymbol{k}_{\varepsilon d}^{(1,4)} & & & \boldsymbol{k}_{\varepsilon d}^{(4,4)} & \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{d}_{(1)} \\ \boldsymbol{d}_{(2)} \\ \boldsymbol{d}_{(3)} \\ \boldsymbol{d}_{(4)} \\ \vdots \end{Bmatrix} \tag{18}$$

ここで，$A^{(e)}$は(e)番目の要素の面積を表している．上式において，$A^{(e)}\boldsymbol{D}^{(e)}$は要素毎に独立であり，(1)番目の要素に着目すると，以下の関係が得られる．

$$A^{(1)}\boldsymbol{D}^{(1)}\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} = \boldsymbol{P}_{\varepsilon}^{(1)} - \left(3\boldsymbol{k}_{\varepsilon d}^{(1,1)}\boldsymbol{d}^{(1)} + \boldsymbol{k}_{\varepsilon d}^{(1,2)}\boldsymbol{d}^{(2)} + \boldsymbol{k}_{\varepsilon d}^{(1,3)}\boldsymbol{d}^{(3)} + \boldsymbol{k}_{\varepsilon d}^{(1,4)}\boldsymbol{d}^{(4)}\right) \tag{19}$$

この関係は，要素境界面$\Gamma_{<s>}^{(1)}$上の表面力 $\boldsymbol{t}_{<s>}^{(1)}$ によって次のように整理することができる．

$$\boldsymbol{\sigma}^{(1)} = \frac{1}{A^{(1)}}\left(\boldsymbol{P}_{\varepsilon}^{(1)} - \sum_{s=1}^{3}\int_{\Gamma_{<s>}^{(1)}} \boldsymbol{N}_{\varepsilon}^{(1)}\boldsymbol{t}_{<s>}^{(1)}\mathrm{d}\Gamma\right) \tag{20}$$

RBSM では Voronoi 多角形のような任意形状を扱うことも多い．また，三次元問題のケースを含めて式(20)を一般的に記述すると以下のようになる．

$$\boldsymbol{\sigma}^{(e)} = \frac{1}{A^{(e)}}\left(\boldsymbol{P}_{\varepsilon}^{(e)} - \oint_{\Gamma^{(e)}} \boldsymbol{N}_{\varepsilon}^{(e)}\boldsymbol{t}_{x}^{(e)}\mathrm{d}\Gamma\right) \tag{21}$$

ここで，$\boldsymbol{t}_{x}^{(e)}$ は，要素境界の表面力を意味している．

このように，要素内応力は要素境界の表面力によって計算することができる．RBSM では，要素間にすべりや引張クラックが生じても，表面力は求まるため，材料非線形問題に対しても，式(21)から要素内応力を推測することができる．三次元問題の場合は，要素面積$A^{(e)}$ の代わりに，要素体積を考え，隣接要素間面に関する積分を行えば，二次元と同様に計算することができる．

### 4.2 修正 RBSM

式(21)により，近似的ではあるが，要素毎に要素内応力を求めることができる．しかし，この方法は RBSM の結果を利用するだけで，RBSM の解を改善するものではない．

一方, 要素内は弾性状態が保たれていると仮定すれば, 式(21)を，

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(e)} = \frac{(D^{(e)})^{-1}}{A^{(e)}}\left(\boldsymbol{P}_{\varepsilon}^{(e)} - \oint_{\Gamma^{(e)}} \boldsymbol{N}_{\varepsilon}^{(e)}\boldsymbol{t}_{x}^{(e)}\mathrm{d}\Gamma\right) \tag{22}$$

とすることで，要素内のひずみを求めることができる．この関係を利用し，式(15)の関係を用いて

$$\boldsymbol{K}_{dd}\boldsymbol{d}_{\mathrm{new}} = \boldsymbol{P}_{d} - \boldsymbol{K}_{d\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon} \tag{23}$$

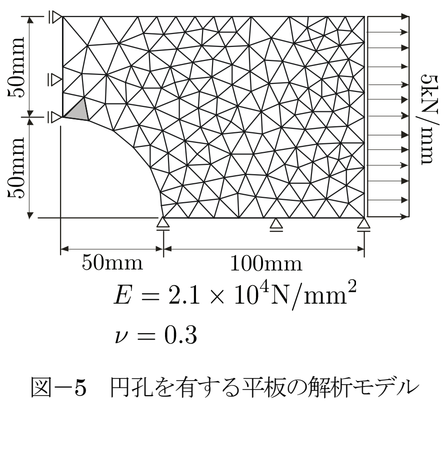
のように再計算すれば，ひずみの影響を考慮した新しい剛体変位 $\boldsymbol{d}_{\mathrm{new}}$ を求めることができる．ただし，この解析ステップでは，要素内のひずみの影響が荷重項で考慮されているため，要素間の剛性として式(13)のばね剛性ではなく，式(5)に示したペナルティ関数を用いる．本論文では，RBSM のばね定数を $10^6$ 倍した値を用いた [10]．

本手法では，はじめに RBSM の離散化方程式を解き，ひずみの影響を考慮して再計算するため，二度，連立一次方程式を解くことになる．しかし，ひずみの影響は荷重項で考慮するため，係数行列は最初の計算のときと変わらない．そこで，はじめの連立方程式の解析の際に，係数行列を三角化しておけば，修正計算では，後退代入だけで済ませることができる．

## 5. 数値計算例

### 5.1 二次元弾性問題の解の精度

はじめに，二次元問題に対する修正 RBSM の弾性解の精度について検討する．図−5 は，円孔を有する平板の解析モデルである．解析は平面応力状態を仮定し，解析厚は単位とした．要素数 279，節点数 160 で，分割には Delaunay 三角形を用いている．

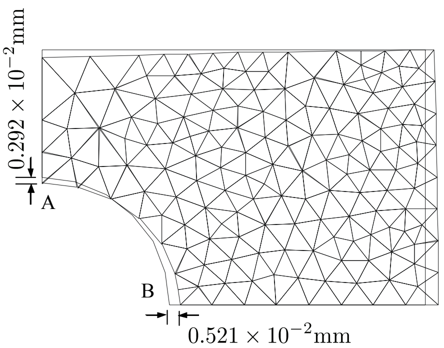



$E = 2.1 \times 10^4\mathrm{N/mm^2}$

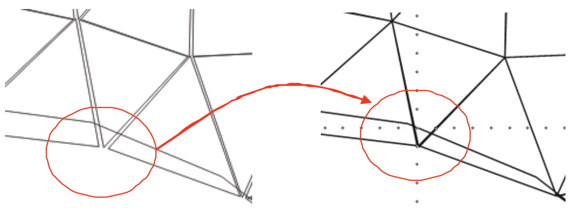
$\nu = 0.3$

図−5 円孔を有する平板の解析モデル

図－6 は修正 RBSM の変位モードを示した図である．図－7 はこのときの点 A 近傍の拡大図である．図(a)は RBSM の変位モードで，剛体変位場を仮定しているため，引っ張り力が作用すると，図のように，要素間が広がる．一方，図(b) は修正 RBSM による結果で，修正された剛体変位とひずみにより描画した図である．修正 RBSM では，要素内ひずみによる要素の変形を考慮しているため，この空間が修正され，閉じた状態となっている．ただし，この空間は，拡大表示したために見えるもので，微小ひずみ問題に対して実スケールで描画した場合は，RBSM の場合でもほとんど目立たない．




図－6　修正 RBSM の変位解



(a) RBSM　　　(b) 修正 RBSM

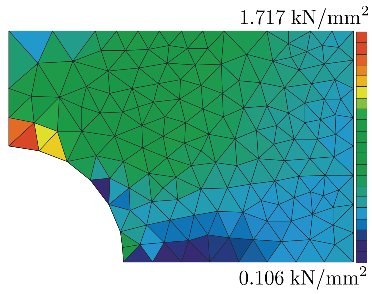
図－7　RBSM と修正 RBSM の変位モードの相違

表－1 は各種解析法における点 A と点 B の変位を比較した表である．RBSM による解が，両点とも最も大きな値を示しており，修正 RBSM の解は，線形変位場を仮定した HPM(Linear)による解と 2 次変位場を仮定した HPM(Quad)の解の中間の値となっている．HPM(Linear)と修正 RBSM の差は両点とも 2%弱であり，HPM(Quad)では，点 A で 6%弱の差であった．なお，HPM(Linear)の解は，FEM の定ひずみ要素(CST)を用いた結果と変位，応力とも一致している [10]．

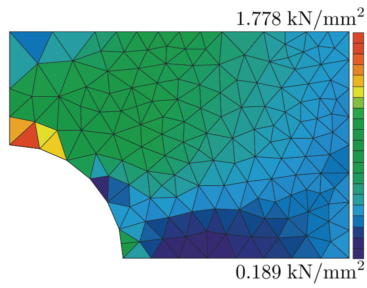
表－1　変位の比較（$\times 10^{-2}$ mm）

| 解析法 | Point A | Point B |
|---|---|---|
| 修正 RBSM | 0.292 | 0.521 |
| RBSM | 0.316 | 0.541 |
| HPM(Linear) & FEM | 0.287 | 0.512 |
| HPM(Quad) | 0.310 | 0.532 |

一方，図－8 は，vonMises の応力分布を比較した図である．修正 RBSM と HPM(Quad)は，同様な応力分布となっている．各種解析法による vonMises 応力の最大値を比較した結果を表－2 に示す．修正 RBSM の結果は，HPM(LInear)と HPM(Quad)のどちらの値よりも小さい値となっているが，二次変位場の HPM(Quad)に近く，3%強の差であった．




(a) 修正 RBSM と RBSM




(b) HPM (Quad)

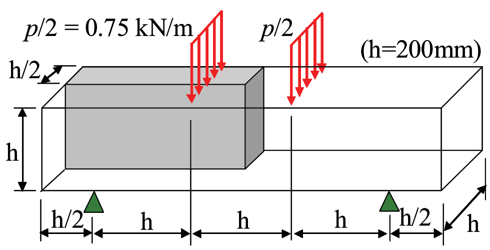
図－8　修正 RBSM と HPM の vonMises 応力の比較

表－2　von Mises 応力の比較 (kN/mm$^2$)

| 解析法 | $\sigma_{mises}$ |
|---|---|
| 修正 RBSM & RBSM | 1.717 |
| HPM(Linear) & FEM | 1.961 |
| HPM(Quad) | 1.778 |

## 5.2　三次元弾性問題の解の精度

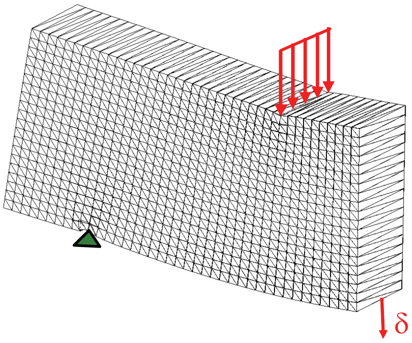
三次元弾性問題における修正 RBSM の解の精度を検討するため，図－9 に示す二点載荷を受ける単純ばりの解析を行う．



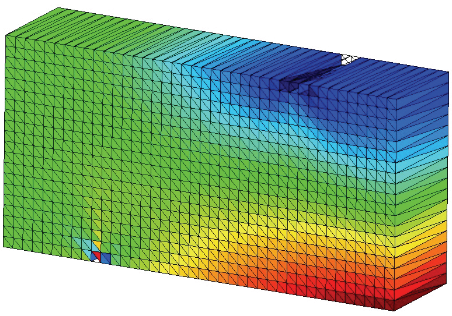

図－9　単純ばりの三次元解析モデル

解析領域は対称性を考慮して図−9 に示す網掛け部分の 1/4 領域とした．はりの材料定数は，弾性係数が 27.5GPa，ポアソン比が 0.2 である．また，載荷重は，$p$＝1.5kN/m とした．要素分割は，はりせいを 20 分割，スパン方向を 40 分割し，これによってできた六面体を 6 つの四面体で分割した．要素数は 4800 要素，節点数は 1722 節点である．

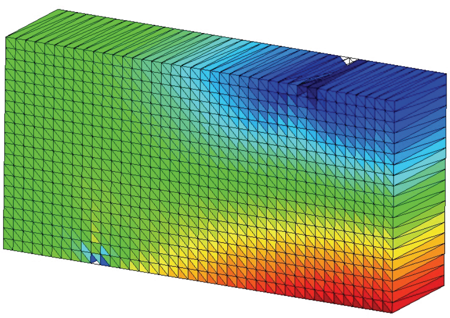
図−10 は，修正 RBSM の変形状態を示した図である．載荷点，支持点での乱れを除いて，全体的に滑らかな変形が得られている．はり中央下端のたわみ δ を各種解析と比較した結果が表−3 に示されている．修正 RBSM の変位解は，RBSM より小さく，HPM(Linear)と HPM(Quad)の間の値で，一次変位場の HPM(Linear)に近い値であった．




図−10 修正 RBSM の変形状態



(a) 修正 RBSM と RBSM



(b) HPM (Linear)

図−11 単純ばりの水平応力分布

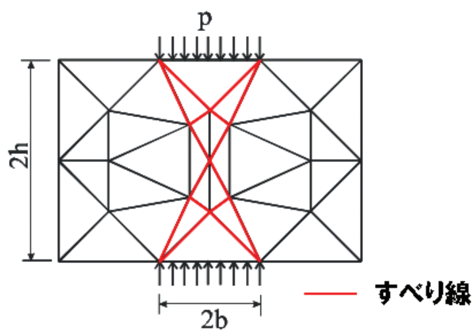
表−3 はり中央下端のたわみと水平応力($\sigma_x$)

| 解析法 | たわみ(mm) | 水平応力(MN/m$^2$) |
|---|---|---|
| 修正 RBSM | 0.0450 | 2.49 |
| RBSM | 0.0570 | 2.49 |
| HPM (Linear) | 0.0419 | 2.36 |
| HPM (Quad) | 0.0540 | 2.48 |

一方，水平方向応力 ($\sigma_x$) の分布を図−11 に示す．(a)は修正 RBSM，(b)が一次変位場の HPM(Linear)の結果である．両者は，同様な応力分布を示している．中央部最下端要素の水平応力を各解析法の結果と比較した表を表−3 に示す．修正 RBSM の結果は，HPM(Linear)と HPM(Quad)の両者より大きな値であったが，二次変位場の HPM(Quad)とは 1%以下の差であった．

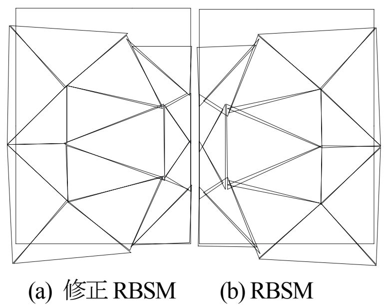
## 5.3 離散化極限解析の解の精度

図−12 はポンチの押し込み問題に対する離散化極限解析のモデルである．このモデルは，極限荷重を求めることに着目し，粗い要素分割を行っている．解析に用いた材料定数は，弾性係数 (E) が 210GN/m$^2$，ポアソン比 ($\nu$)が 0.3，せん断強さ ($c$) が 3MN/m$^2$ で，破壊条件としてトレスカの条件を用いた[4]．




図−12 ポンチの押し込み（すべり線）

図−12 の赤い実線は，修正 RBSM のすべり線をあらわしている．ただし，すべり線は RBSM の結果と同一である．このときの極限荷重 ( $p/2c$ ) は 1.234 で極限荷重 1.23 とほぼ一致する．

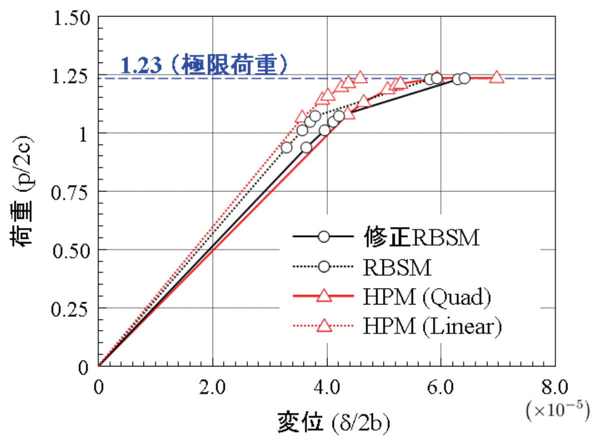


(a) 修正 RBSM (b) RBSM

図−13 ポンチの押し込み（変位モードの比較）

図－13 は，崩壊時の変位モードを修正 RBSM と RBSM とで比較した図である．RBSM は剛体変位場であるため，すべり線近傍で，要素の重なりが見られるが，修正 RBSM では，そのような現象が改善されている．

図－14 は各種解析法における荷重－変位曲線を描画したものである．黒の○実線が修正 RBSM，○破線が RBSM の結果で，赤の△実線が HPM(Quad)，△破線が HPM(Linear)の結果である．修正 RBSM の結果は，HPM(Quad)に近く，RBSM は HPM(Linear)に近い結果となった．どの解析法も極限荷重は 1.234 で一致している．

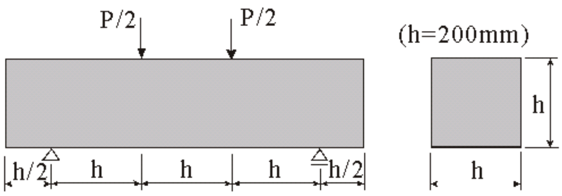



図－14　荷重－変位曲線

以上のように，本手法は，極限荷重と崩壊機構を求めることを対象とした離散化極限解析にも適用することが可能であり，変位を改善することができる．

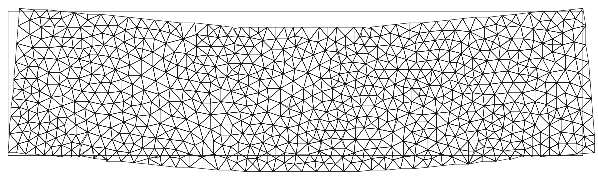
### 5.4　引張クラック解析の解の精度

すべり破壊の場合，それぞれの要素は接続された状態にあり，要素間の力の伝達が行われる．一方，引張クラックが生じると，要素間のばねは切断され，要素間の力の伝達は遮断される．ここでは，要素間が切断される引張クラック解析に対する修正 RBSM の精度を検討するする．図－15 は解析に用いた単純ばりの例である．解析に使用した材料定数は，弾性係数が 27.5GN/$m^2$，ポアソン比が 0.2，引張強さが 2.9MN/$m^2$ である．



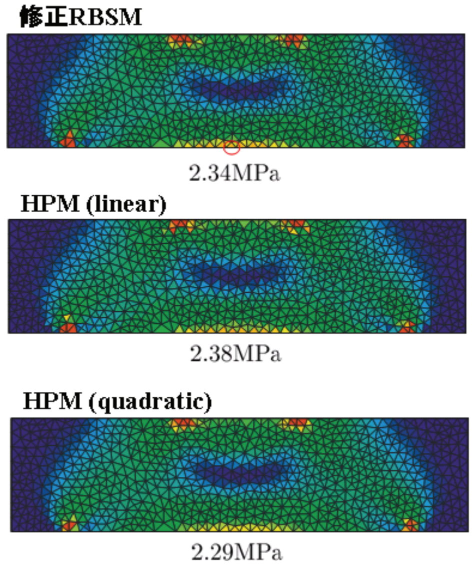

図－15　引張クラック解析モデル

図－16 は，弾性解の変位モードを要素分割とともに示した図である．要素形状は Delaunay 三角形で，要素数は 1487 要素である．このときのスパン中央部下端における各種解析法によるたわみの弾性解が表－4 に示されている．修正 RBSM は，RBSM より小さく，HPM(Linear)と HPM(Quad)より大きな値となっている．HPM(Quad)とは，約 3%の差であった．



図－16　変位モード（弾性）

図－17 は vonMises 応力の分布状況を修正 RBSM と HPM で比較した図である．三者とも同様な応力分布を示している．スパン中央最下端の要素における弾性応力を比較した結果が表－4 に示されている．修正 RBSM の結果は HPM(Linear)と HPM(Quad)の間の値となっており，両者と 2% 前後の差であった．



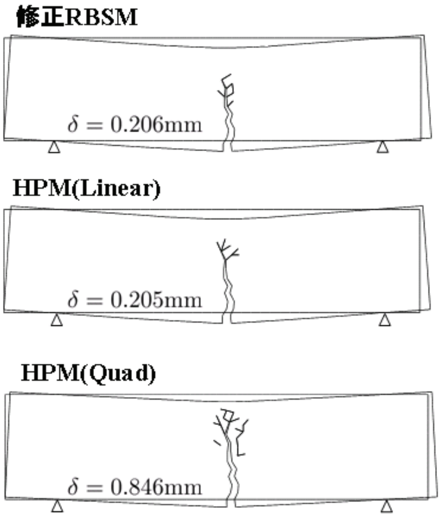

図－17　vonMises 応力分布

表－4　はり中央下端のたわみと vonMises 応力（弾性解）

| 解析法 | たわみ(mm) | vonMises 応力(MN/$m^2$) |
|---|---|---|
| 修正 RBSM | 4.60 | 2.34 |
| RBSM | 4.76 | 2.34 |
| HPM (Linear) | 4.22 | 2.38 |
| HPM (Quad) | 4.46 | 2.29 |

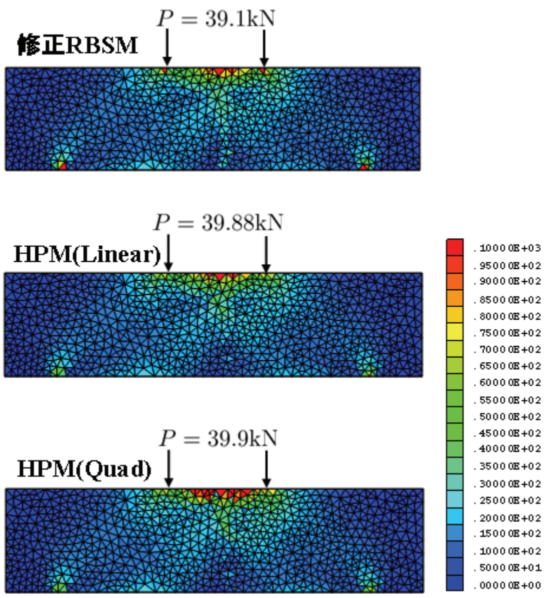
図－18 は引張クラック解析による崩壊直前の荷重におけるクラックパターンと変形モードを示した図である．主たるクラック発生位置は三者でほぼ同じであり，そのときのたわみは，修正 RBSM と HPM(Linear)でほぼ同じ値であるが，HPM(Quad)とは大きく異なる．これは，ク

ラックの進展が他の二つの方法よりはり上端まで達しているためである．なお，クラック発生から崩壊直前までのクラックの発生位置は三者とも同じであった．




図－18　崩壊時引張クラックパターンと変位モード

図－19 は崩壊直前の各解析法による vonMises の応力分布状況と崩壊荷重を示した図である．崩壊荷重は，修正 RBSM が最も低く，最も大きな値を示した HPM(Quad) と 2%程度の差であった．応力の分布状況は，定量的には評価できないが，どちらかというと一次変位場の HPM(Linear)に類似した傾向が得られた．

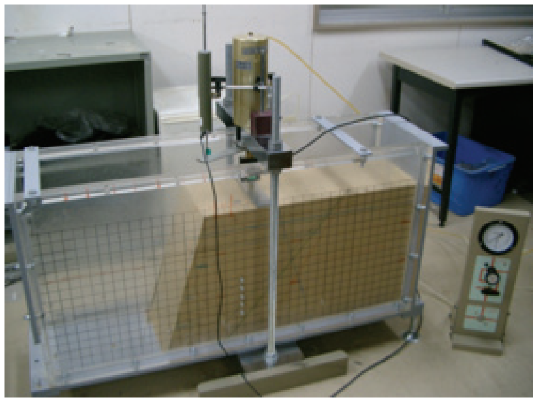



図－19　vonMises 応力分布

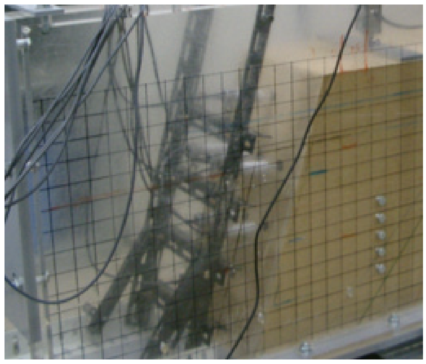
### 5.5　すべり破壊＋引張クラック解析の解の精度

最後に，すべりと引張破壊が同時に生じる問題を取り上げ，実験との比較により修正 RBSM の精度を検討する．図－20 は実験に使用した装置の概要が示されている．

図－21 は，模型地盤の概要で，含水比 5%の豊浦砂を用い，1:0.3 の法面勾配を持つ斜面を作成した．載荷は，法肩から 150mm の位置に設けた鋼板で作成した載荷板に行った．計測は，図－20 に示すように，載荷板の変位と斜面の水平変位について行った．

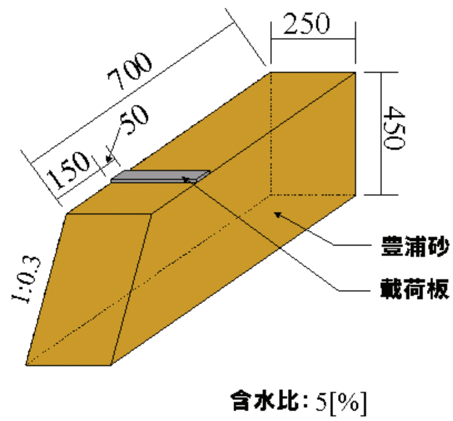


(a) 載荷装置



(b) 斜面水平変位の計測

図－20　実験装置

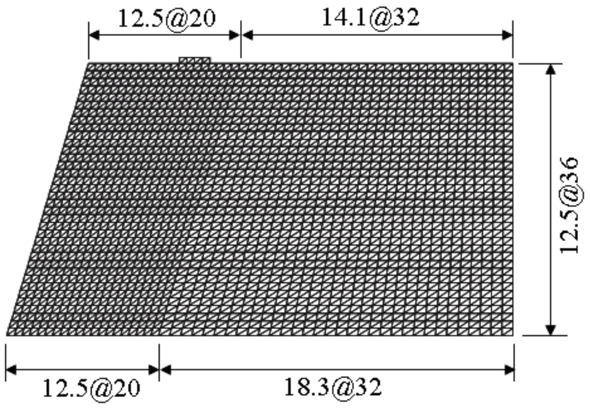



図－21　実験モデル (mm)

解析は，平面ひずみ状態を想定し，はじめに自重による初期応力計算を行い，変位をクリアした後，非線形解析を行った．図－22 は，解析に使用した要素分割で，要素数は 3752 要素，節点数は 1966 節点である．解析に用いた材料定数は，表－5 に示すとおりである．

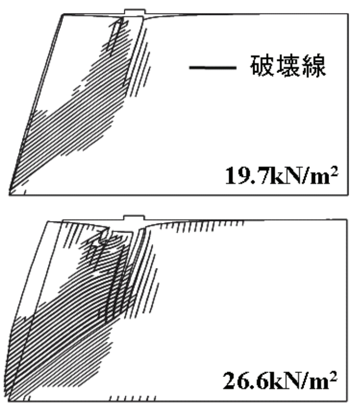
表－5 材料定数

| | |
|---|---|
| 変形係数 | 2500 kN/m$^2$ |
| ポアソン比 | 0.3 |
| 内部摩擦角 | 35° |
| 粘着力 | 1.2 kN/m$^2$ |
| 引張強さ | 0.1 kN/m$^2$ |
| 単位体積重量 | 17.1 kN/m$^3$ |

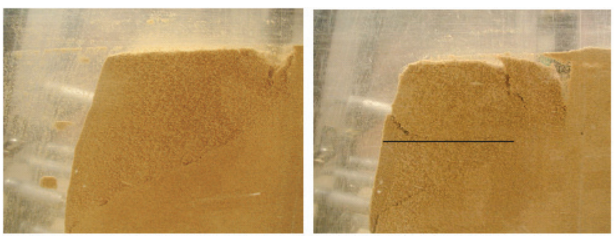



図－22 解析モデル

図－23 には破壊モードが示されている．上段は変位が急激に増大する荷重状態での破壊状況，下段は崩壊時の状態で，崩壊荷重（載荷板の単位面積あたりの荷重）は 26.6 kN/m$^2$ であった．実験の崩壊荷重は 28.32 kN/m$^2$ で，約 6%の差であった．

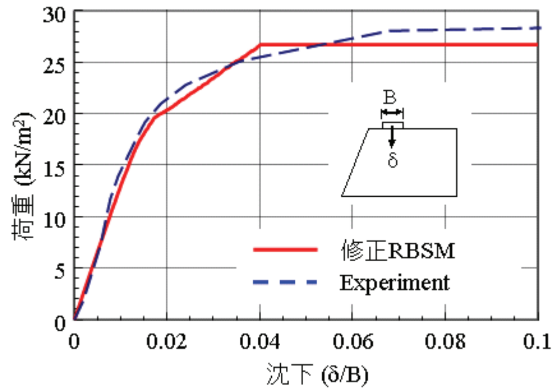



図－23 破壊モード

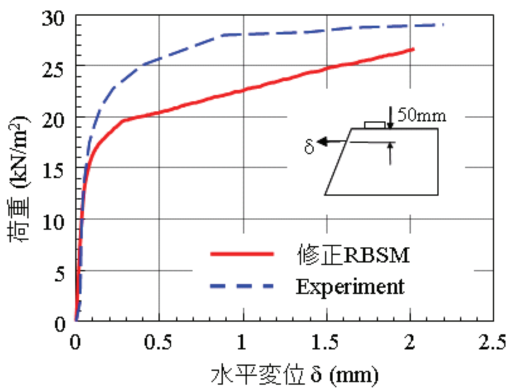


図－24 破壊状況

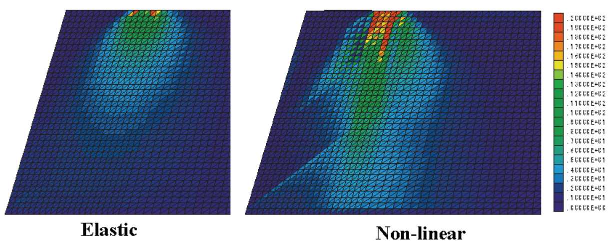
図－24 は，実験における崩壊パターン例である．実験によって安定した破壊状態をえるのは難しいが，載荷板後ろ側に引張クラックが発生している様子が伺える．崩壊は，引張クラックの下側から発生したすべり線が法面に達して生じる．解析による破壊も，載荷板後方に引っ張りクラックが発生し，斜めに伸びたすべり線によって生じており，類似の傾向を示している．




図－25 荷重－沈下曲線




図－26 荷重－水平変位曲線




図－27 vonMises 応力分布

図－25 は，荷重－沈下曲線を実験値と比較した図である．赤実線が修正 RBSM，青破線が実験結果である．修正 RBSM の崩壊荷重が実験値より 6% 程度低いことによる相違は見られるが，類似の挙動を示していることがわかる．一方，図－26 は，法肩から 50mm の位置における荷重－水平変位曲線を示した図である．赤実線と青破線の意味は図－21 と同じである．解析結果は，実験結果

より大きめの変位となっている．ただし，実験では少しの位置の相違で水平変位が異なっており，実験の精度を考えると類似の傾向が得られていると考える．

図－27 は弾性状態と崩壊時における vonMises の応力分布である．弾性状態では，応力は均等に分布しているが，崩壊時には，載荷板端部から伸びるの引張クラックのため載荷板直下に大きな応力状態が生じている．実験でも，載荷板直下に大きな崩れが生じており（図－24 参照）類似の傾向を示している．

## 6. まとめ

本論文では，ハイブリッド型仮想仕事の原理に基づく HPM の変位場を剛体と仮定することで，RBSM の離散化方程式が得られることを示した．次に，HPM の離散化方程式を，剛体変位に関わる部分とひずみに関わる部分に分け，剛体変位に関わる方程式のひずみをゼロと仮定して求まった剛体変位, すなわち RBSM による剛体変位をひずみに関わる式に代入することで要素内の応力やひずみを求める方法を提案した．さらに，このひずみを用いて，剛体変位を修正する修正 RBSM を提案した．

これらの関係を用いて三次元問題や材料非線形問題の解析を行い, 修正 RBSM の解の精度を検討したところ, 以下のことが分かった．

① 弾性問題に関して，二次元，三次元とも修正 RBSM の変位解は 1 次変位場の HPM に近い値で，応力に関しては 2 次変位場の HPM に近い値を示す．

② 離散化極限解析における修正 RBSM の極限荷重は, RBSM や HPM と同じ値となる．また，崩壊機構も RBSM や HPM と同じパターンとなる．荷重ー変位曲線は 2 次変位場の HPM に近い値を示す．

③ 引張クラックのような応力解放をともなう進行型破壊の解析において，修正 RBSM のクラック発生位置は，HPM とほぼ同じであり，応力の分布状況や崩壊荷重は 1 次の変位場を仮定した HPM に近い結果となった．

さらに，実験との比較検討を行ったところ，すべり線の細部で相違は認められるが，定性的には現象を説明できる結果が得られた. また, 荷重－沈下曲線についても, 実験と類似の結果が得られた．

本手法によれば，RBSM の結果を利用して，要素毎に独立に要素内の応力あるいはひずみを求めることができ, RBSM の解析結果を用いた現象の評価においてより多くの情報を提供することができる．また，変位を修正する場合も，はじめに離散化方程式を解く際に係数行列を三角化しておけば，修正計算は後退代入だけで済み，計算時間の短縮化を計ることができる．本手法の考え方は, 個別要素法などの剛体を仮定する手法に対しても適用可能で，解析結果を評価する際に，より多くの情報を提供できるものと考えている．

なお，本論文では提案手法の精度に関する基礎的検討を行うため，三角形や四面体を用いた．任意多角形の精度に関しては今後の課題としたい．

## 参考文献


1) Kawai, T. : New element models in discrete structural analysis, J. of the Society of Naval Architects of Japan, No.114, pp.1867-193,1977.
2) 竹内則雄, 川井忠彦 : 新離散化極限解析の誤差評価に関する一方法について，生産研究，Vol.33，No.2, pp.32-35, 1981.
3) 名古屋大学材料・形態学グループ編 : 剛体ばねモデル (RBSM)の進化とコンクリートの解析技術，2008.
4) 竹内則雄他 : 鉄筋コンクリート構造の離散化極限解析, 丸善，2005.
5) Moihammadi, S. : Extended Finite Element Method, Blackwell Publishing, P.261, 2008.
6) Arnold, D.N., Brezzi, F., Cockburn, B. and Marini, L.D. : Unified analysis of discontinuous Galerkin methods for elliptic problems, SIAM journal on numerical analysis, Vol.39, No.5: pp.1749-1779, 2002.
7) Mergheim, J., Kuhl, E. and Steinmann, P.:A hybrid discontinuous Galerkin/interface method for the computational modeling of failure, Communications in numerical methods in engin., Vol.20, pp.511-519, 2004.
8) Arnold, D.N. : An interior penalty finite element method with discontinuous elements. SIAM journal on numerical analysis, Vol.19, No.4: pp.742-760, 1982.
9) 鷲津久一郎 : 弾性学の変分原理概論，日本鋼構造協会編，培風館，1972.
10)竹内則雄，大木裕久，上林厚志，草深守人：ハイブリッド型変位モデルにペナルティ法を適用した離散化モデルによる材料非線形解析, 日本計算工学会論文集 (Transactions of JSCES Paper No.20010002)，2001.
11)見原理一，竹内則雄，草深守人 : 2 次の変位場を仮定したハイブリッド型ペナルティ法の開発,土木学会構造工学論文集，Vol.51A，pp.249-257，2005.
12)大木裕久，竹内則雄：ハイブリッド型ペナルティ法による上下界解析，日本計算工学会論文集（Transactions of JSCES Paper No.20060020)，2006.
13)田尻康之，山村和人，竹内則雄：ハイブリッド型仮想仕事の原理を用いた RBSM の要素内応力の評価, 計算工学講演会論文集，Vol.14,No.2, pp.691-694，2009.
14)竹内則雄，見原理一：応力と剛体変位を未知数とする HPM による材料非線形解析，土木学会応用力学論文集，Vol.10, pp.131-138, 2007.
15)田尻康之，見原理一，竹内則雄 : HPM による薄板の離散化極限解析，土木学会応用力学論文集，Vol.11, pp.233-242, 2008.


（2009 年 9 月 24 日受付）