

重点サンプリング法を用いたモンテカルロシミュレーションによる 防波堤の累積滑動量に対する破壊確率評価の効率化に関する研究

A study on the efficient evaluation of failure probability of breakwaters
in view of cumulative sliding displacement by importance sampling Monte Carlo simulation

長尾 毅*
Takashi Nagao

*工博, 国土技術政策総合研究所 (〒239-0826 横須賀市長瀬 3-1-1)

This study aims at discussing the efficient evaluation method of failure probability of breakwaters in view of cumulative sliding displacement by Monte Carlo simulation. The target problem is different from many other problems because failure probability is judged by the cumulative displacement during the design working life of breakwaters. The fact that failure probability shall be evaluated by the repetitive actions of waves makes the adoption of variance reduction techniques difficult. The proposed method evaluates the cumulative probability distribution of sliding displacement for one year by importance sampling method and calculates failure probability for design working life by using the cumulative probability distribution.

Key Words: Monte Carlo simulation, failure probability, importance sampling

キーワード: モンテカルロシミュレーション, 破壊確率, 重点サンプリング法

1. はじめに

港湾構造物の主要な構造形式のひとつである防波堤の設計においては, 信頼性設計法の適用が標準となっている。港湾基準¹⁾においては, 力の釣合いに基づいた部分係数法が標準的な方法として位置づけられている。この部分係数は信頼性解析によりキャリブレーションされた値であり, 部分係数法の採用によって, たとえ間接的とはいえ, 破壊確率を制御しているとみなすことが出来る。ところで, 港湾基準では性能設計の体系が導入されており, 標準的な性能照査法以外の手法の適用も許容されている。防波堤の外部安定モードのうち滑動については, 運動方程式の2回積分により得られる滑動量を対象にモンテカルロシミュレーション(以下, MCS)に基づいて設計供用期間の累積滑動量に関して確率的な評価を行う方法²⁾が提案されて久しく, 部分係数法の代替法として認識されている。MCSの適用に際しては計算負荷が問題となる。防波堤の累積滑動量に関しては計算効率化の手段を講じない原始的な crudeMCS と超一様分布列³⁾を用いた検討で少なくとも20万回程度の試行回数が

必要であると報告されている⁴⁾。

MCS において収束を早めるための工夫として数多くの研究事例がある。例えば, 超一様分布列と重点サンプリング法⁵⁾の併用⁶⁾, ラテン方格サンプリング⁸⁾と重点サンプリング法の併用⁹⁾などの研究事例があげられる。MCS における効率化の既往の研究の多くは, 耐力を作用効果が上回った時に破壊と判定される問題を扱っているのに対して, 本研究で対象とする防波堤の累積滑動問題は, 設計供用期間 50 年間の累積の滑動量が許容値を上回った時に破壊と判定される問題である。即ち, 1 回の波浪の作用により滑動が生じ, これが許容値以下の小さな値であったとしても 50 年間の累積により許容値を超える可能性を有する。逆に, 1 回の波浪作用により滑動が生じない場合には, 滑動量はゼロと評価される。後述するように, このような問題の特殊性が一般的に用いられる効率化の手法の簡単な適用を困難にしている。

本研究では, MCS による防波堤の設計供用期間の累積滑動量に関する破壊確率評価の効率化の手法を検討する。提案する手法は, 1 年の波浪作用による滑動量の確率分布関数を重点サンプリング法を用いて求め, これを

設計供用期間の累積量評価に用いるものである。

2. 防波堤の累積滑動量に関する破壊確率の算定方法

MCSを用いた防波堤の累積滑動量²⁾に関する破壊確率の算定方法は以下の通りである。

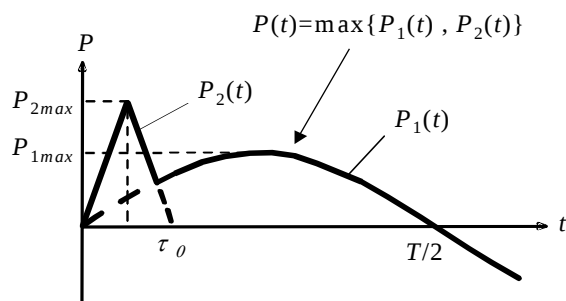
まず、極値分布に従って沖波波高をサンプリングし、浅水変形、砕波変形を考慮して堤前位置での有義波高を求める。有義波高は波群の代表波高であるので、レーリー分布を適用することで個別波高を求める。この際に砕波の影響を考慮する。

次に、式(1)に示す滑動に関する運動方程式を右边が正の条件下において2回積分することにより1波毎の滑動量を算定する。これを1年間繰り返し、さらに設計供用期間繰り返すことにより累積滑動量を求める。これを滑動量許容値と比較し、破壊か安定かの判定を行う。以上の試行を繰り返すことにより破壊確率を評価する。

$$\left(\frac{W}{g} + M_a\right) \frac{d^2 x}{dt^2} = P_H - f_r (W' - P_U) \quad (1)$$

ここに、 W ：堤体の空中重量 (kN/m)、 g ：重力加速度 (m/s^2)、 M_a ：付加質量 ($=1.0855\rho_0 h^2$) (t/m)、 ρ_0 ：海水の密度 ($1.03t/m^3$)、 h' ：堤体底面から静水面までの高さ(m)、 x ：堤体の滑動量(m)、 P_H ：堤体に作用する水平波力(kN/m)、 W' ：堤体の水中重量(kN/m)、 P_U ：堤体に作用する揚圧力(kN/m)、 f_r ：堤体底面と基礎との摩擦係数

ここで、高波は毎年1回来襲することとし、その継続時間は2時間としている²⁾。したがって、平均周期を6秒とした場合、1年あたり1200波が防波堤に作用することとなる。また、水平波力および揚圧力の従う波力の時刻歴モデルとしては、衝撃波力および砕波波力成分を表す三角形パルス($P_2(t)$)と重複波力成分を表す正弦波形($P_1(t)$)を組み合わせた波形モデル¹⁰⁾を用いている。



図一1 波力時刻歴モデル¹⁰⁾

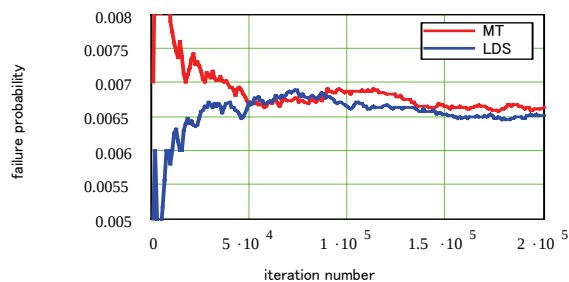
考慮する確率変数は表一1に示す通りであり、12次元問題である。各確率変数の分布については既往の研究¹¹⁾をもとに設定している。なお、正規分布以外の極値分布

とレーリー分布は、解析的に確率分布関数の逆演算を行うことが可能である。表中、No.1～7の確率変数は1年に1回のサンプリングとし、No.8～12の確率変数は1波ごとに1回のサンプリングとしている²⁾。この設定の妥当性の吟味は本研究の対象外とするが、後述するように、この確率変数毎のサンプリング回数の差が重点サンプリング法の適用にあたっては大きな影響を持つことになる。なお、本研究は毎年の滑動量の時間依存は考慮していない。この点の妥当性については今後の課題とする。

表一1 考慮する確率変数

No.	確率変数	確率分布
1	沖波波高	極値分布 (ワイブル分布など)
2	潮位	正規分布
3	鉄筋コンクリート単位体積重量	正規分布
4	無筋コンクリート単位体積重量	正規分布
5	中詰砂単位体積重量	正規分布
6	摩擦係数	正規分布
7	沖波波高精度・波浪変形計算精度・砕波変形精度	正規分布
8	個別波高	レーリー分布
9	砕波モデル・上限値	正規分布
10	砕波モデル・下限値	正規分布
11	砕波モデル・上下限判別	一様分布
12	波力算定式精度	正規分布

既往の研究⁴⁾による破壊確率の収束状況の例を図一2に示す。図の水平軸は設計供用期間50年間の計算の試行回数である。図中、MTは擬似乱数の発生にメルセンヌ・ツイスタ¹²⁾を用いたcrudeMCS、LDSは超一様分布列のうち一般化Faure列³⁾(改良Faure2, 基数13, 原始根2)を用いたケースである。通常、超一様分布列を用いることでcrudeMCSよりも収束が早くなることが期待できるが、この場合crudeMCSと比較して収束に大きな優位性はない。他のケースでも同じ傾向であった。



図一2 破壊確率収束状況 (文献4)の結果の例)

3. 簡単なモデルによる検討

3.1 単純な累積問題

上述のように、実際の防波堤の累積滑動問題は、設計供用期間 50 年間の累積に関する 12 次元の問題である。実際の防波堤の累積滑動問題の効率化の検討に入る前に、より簡単なモデルで検討する。ただし、本研究では効率化の手法として基本的に重点サンプリング法の適用を試みるため、以降の検討は重点サンプリング法の適用性について主に議論する。

モンテカルロシミュレーションによる破壊確率の評価は式(2)により行われる。式(2)の適用に際し、特に工夫を行わずにそのまま適用するのが crudeMCS である。これに対して重点サンプリング法では、式(3)に示すようにサンプリング密度関数を導入し、これを破壊の生じやすい領域に設定してシミュレーションを行う。その結果、crudeMCS と比較して破壊と判定される回数を多くするとともに、オリジナルの確率密度関数とサンプリング密度関数の比である重み関数を用いて破壊のカウント数を調整することで破壊確率評価の効率化を行う。

$$p_f = \int \cdots \int I[g(\mathbf{x}) \leq 0] f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (2)$$

$$p_f = \int \cdots \int I[g(\mathbf{x}) \leq 0] \frac{f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})}{h(\mathbf{x})} h(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (3)$$

ここに、 p_f : 破壊確率、 $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{X})$: 同時確率密度関数、 $h(\mathbf{X})$: サンプリング密度関数である。また、 I は破壊判定関数であり、 $K=0$ のときに 1、それ以外はゼロの値をとる。

さて、まず確率変数を正規分布に従う R 、 S の 2 種類とし、限界状態関数を式(4)とする。すなわち、 n 回の R 、 S の独立な作用の累積値による破壊確率の問題とする。

$$Z = d_a - \sum_{k=1}^n (S_k - R_k) \quad (4)$$

ここに、 d_a : 変形量許容値

いま、 $R=N(1.1, 0.2)$ 、 $S=N(0.9, 0.25)$ 、 $d_a=0.05$ 、 $n=15$ とする。確率変数が正規分布に従い、かつ限界状態関数が線形であるため、この問題の正確な破壊確率は一次信頼性理論 FORM¹³⁾によって求めることができる。信頼性指標 $\beta=2.46$ であり、破壊確率は 6.95×10^{-3} となる。さらに、感度係数は R 、 S それぞれについて 0.161、-0.202 となり、design point は信頼性指標と感度係数より R 、 S それぞれについて 1.021、1.024 となる。なお、design point は限界状態局面（限界状態関数がゼロとなる局面）のうち同時確率密度が最も大きくなる点であり、感度係数および design point は FORM により信頼性指標を求める際に同時に求めることができる。この問題の場合、耐力 R について示すと、それぞれ式(5)、式(6)となる。なお、作用効

果 S については感度係数が負となる。

$$\alpha_{R_k} = \left(\frac{\partial Z}{\partial R_k} \right)_{R_k^*} \frac{\sigma_{R_k}}{\sigma_Z} = \frac{\sigma_R}{\sqrt{n(\sigma_R^2 + \sigma_S^2)}} \quad (5)$$

$$R_k^* = \left(1 - \alpha_{R_k} \beta \frac{\sigma_R}{\mu_R} \right) \mu_R \quad (6)$$

ここに、 α : 感度係数、 μ : 平均値、 σ : 標準偏差であり、記号*は design point における値を示す。

重点サンプリング法においては、FORM により得られる design point をもとにサンプリング密度関数を設定することが一般的と考えられる¹⁴⁾。

この問題の場合も、サンプリング密度関数として標準偏差は変えずに平均値を design point に設定した正規分布を適用した重点サンプリング法によって、図-3 に示すように効率よく破壊確率を求めることが可能である。図の水平軸は試行回数、鉛直軸は破壊確率推定値、判例は、IS が重点サンプリング法、crude は crudeMCS である。

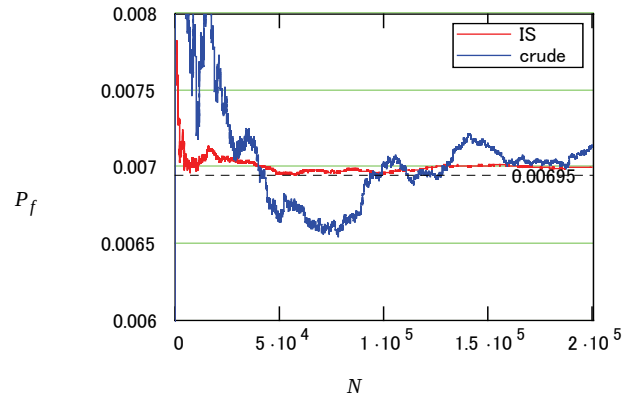


図-3 破壊確率収束状況

ここで、式(5)に示したように感度係数は累積の回数 n に依存して変化し、累積回数が多いほど絶対値が小さくなることに注意する必要がある。また、design point は、累積の回数 n が大きくなるほど平均値に近くなることが式(6)より分かる。換言すると、累積の回数 n が大きくなればなるほどサンプリング密度関数はオリジナルの密度関数と近いものとなり、重点サンプリング法と crudeMCS の差が小さくなるといえる。この累積問題が通常の多次元問題と異なる点は、多次元問題では多くの場合に主要な確率変数が存在していて、主要な確率変数の感度係数は無視し得ない値を持ち、これによりサンプリング密度関数の設定に意義がある場合が多いのに対して、累積問題では同じ確率分布に従う変数が繰り返して現れるために感度係数の絶対値は累積の度合いに応じて減少していくという点にあるといえる。従って、累積の度合いが激しい問題においては重点サンプリング法

の適用に当たって慎重な検討が必要であるといえる。

3.2 確率変数間でサンプリング回数が異なる単純な累積問題

次に、上述した防波堤の累積滑動問題のように確率変数間でサンプリング回数が異なる条件について考える。式(4)を R について式(7)のように変更する。

$$Z = d_a - \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n (S_{j,k} - R_j) \quad (7)$$

R, S の確率分布が 3.1 節と同じ場合には感度係数は式(8)に示す通りとなり、 $m=3, n=5$ の条件では R と S でそれぞれ 0.504, -0.126 となり大きな差が生じる。信頼性指標を $\beta=2.46$ とするためには $d_a=1.88$ となる。この時 design point は R, S それぞれについて 0.852, 0.977 となる。

$$\alpha_{R_j} = \left(\frac{\partial Z}{\partial R_j} \right)_{R_j^*} \frac{\sigma_{R_j}}{\sigma_Z} = \frac{n \sigma_R}{\sqrt{mn^2 \sigma_R^2 + mn \sigma_S^2}} \quad (8)$$

$$\alpha_{S_k} = \left(\frac{\partial Z}{\partial S_{j,k}} \right)_{S_{j,k}^*} \frac{\sigma_{S_{j,k}}}{\sigma_Z} = \frac{-\sigma_S}{\sqrt{mn^2 \sigma_R^2 + mn \sigma_S^2}}$$

MCS による破壊確率の収束状況を図-4 に示す。上記の design point をもとにサンプリング密度関数を設定した重点サンプリング法を IS1, 3.1 節と同じサンプリング密度関数による重点サンプリング法を IS2 として crudeMCS の結果とともに示している。IS2 は精度が悪く、design point の正確な評価が非常に重要であることがわかる。

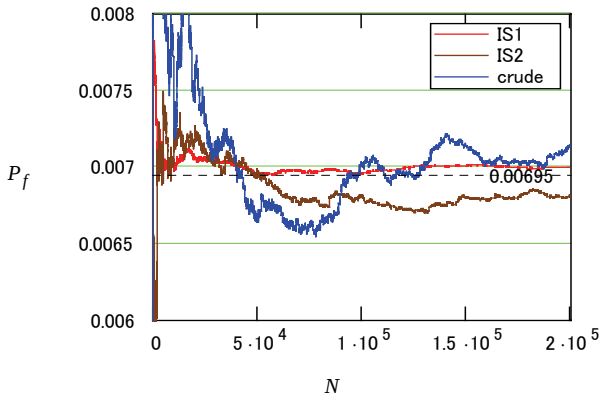


図-4 破壊確率収束状況

3.3 防波堤の滑動問題に類似した単純な累積問題

防波堤の滑動問題では、作用効果 S が耐力 R よりも小さい場合は滑動が生じない。即ち、 $S < R$ の場合は、 $S-R=0$ となる。この条件を 3.1 節の式(4)に反映させてみる。

いま、 R, S の確率分布はこれまでと同じとし、収束の状況を確認するために破壊確率が同程度になる条件を探索すると、 $d_a=2.18$ とすることでほぼ同程度の破壊確率

となる。この問題は FORM では扱えない複雑な条件であるので、crudeMCS の 20 万回試行時の破壊確率で評価している。 $S < R$ の時に $S-R=0$ となるため、先の場合と比較して破壊が生じやすくなっている。このため破壊確率を同程度にするためには d_a の値を大きく設定する必要がある。なお、この問題では限界状態関数の平均値と標準偏差自体は比較的容易に評価が可能である。即ち、 $S_k - R_k$ の平均値と標準偏差はそれぞれ $\mu=0.052, \sigma=0.119$ と求まるので、限界状態関数の平均値は $d_a - n\mu$ 、標準偏差は $n^{1/2}\sigma$ によって評価できる。ただし、この平均値と標準偏差から信頼性指標や破壊確率を評価すると限界状態関数が複雑であるために誤差が非常に大きい。

このように、この問題の場合は design point が不明である。仮に 3.1 節と同じサンプリング密度関数による重点サンプリング法と crudeMCS で収束状況を確認すると図-5 のようになる。図-3 との比較により、重点サンプリング法の収束状況が悪くなっていること、逆に crudeMCS の収束が良くなっていることがわかる。前者については design point が不明であることからサンプリング密度関数の設定が良くないことが原因と考えられる。後者については、 $S < R$ の時に $S-R=0$ となることから限界状態関数の確率分布の右側の裾が d_a を上回らない、即ち確率分布の分散が 3.1 節の条件と比較して減少しているため、通常の問題よりも収束が早くなっていると考えられる。

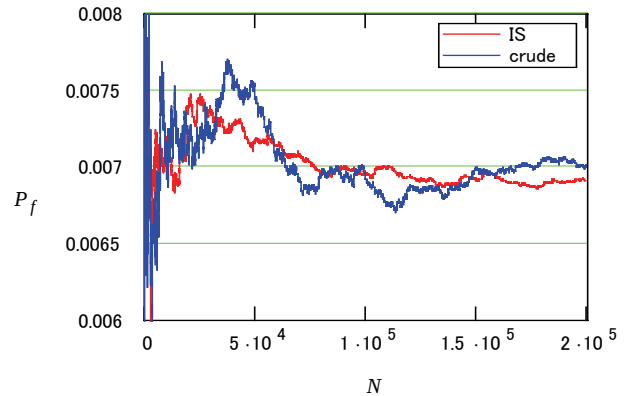
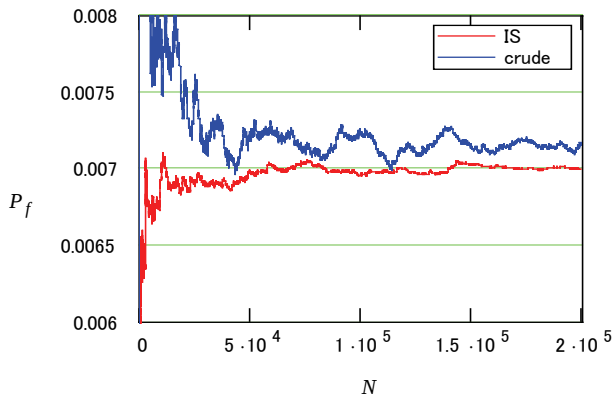


図-5 破壊確率収束状況

3.4 確率変数間でサンプリング回数が異なる条件の防波堤の滑動問題に類似した累積問題

次に、 $S < R$ の場合は $S-R=0$ となる条件を 3.2 節の式(7)に反映させてみる。これまでと同様に R, S の確率分布は変えずに破壊確率が同程度になる条件を crudeMCS で探索すると、 $d_a=3.08$ でほぼ同程度の破壊確率となる。前節と同様に design point は不明であるので、3.2 節と同じサンプリング密度関数による重点サンプリング法と crudeMCS で収束状況を確認すると図-6 のようになる。この条件では重点サンプリング法は良く機能していると考えられる。図-4 との比較によっても、あまり遜色

がないといえる。この理由は、限界状態関数の中での R の繰り返し回数が3回と少なく、 $S < R$ の時に $S-R=0$ という特殊な条件の影響が R に対して少ないこと、かつ15回繰り返される S の感度を低く見積もったために S に対するサンプリング密度関数とオリジナルの密度関数に大きな差がないことなどが原因と考えられる。



図ー6 破壊確率収束状況

4. 防波堤の累積滑動量に関する破壊確率評価の効率化の検討

4.1 提案法の基本的考え方

ここまでの検討で、防波堤の設計供用期間の滑動量のような累積問題に対して重点サンプリング法を適用する場合には、特に累積回数が多い確率変数について注意が必要であることが分かった。以下では、この課題を解決する方法について議論を行う。

2. で述べたように、防波堤の設計供用期間の滑動量の問題では、1年に1回サンプリングされる確率変数と、1年間に波数に応じてサンプリングされる確率変数がある。そして、後者は1年間に1000回程度以上サンプリングされる可能性がある。ここまでの知見から、後者については重点サンプリング法の対象とするのは困難である可能性が高いといえる。よって本研究では前者の確率変数を対象とする。

防波堤の設計供用期間は通常50年とされるため、前者の確率変数についても50回の累積問題となる。3.1で述べたように、累積回数が増えると感度が低下するために最適なサンプリング密度関数とオリジナルの密度関数の差が少なくなり、重点サンプリング法のメリットが少なくなると考えられる。

そこで本研究では、50年間の累積問題を、まず1年間の累積問題として取り扱い、重点サンプリング法を用いて累積滑動量の確率分布関数を数値的に評価する。これをMCS1とする。次に1年の確率分布関数から確率密度関数を数値的に評価し、これをもとに設計供用期間の50回独立にサンプリングして累積する。これをMCS2とする。MCS2の結果から50年間の累積滑動量の確率分布関

数を数値的に評価することで、任意の滑動量（許容値）に対する超過確率を評価できる。

この手法のメリットは、まずMCS1では1年に1回サンプリングされる確率変数を対象に重点サンプリング法を適用することで効率化が期待できること、さらに、通常の設計供用期間を対象としたMCSでは設計供用期間×試行回数の試行が必要になる（試行回数20万回の場合、50年分×20万回=1000万年回相当の試行が必要となる）のに対して、本研究の方法では1年の滑動量に関するMCS1の試行回数と50年累積のMCS2の試行回数の和でよいことにある。特に、後者のMCSは波浪の演算や運動方程式の積分等の演算を伴わないために計算負荷が非常に少ないことも利点である。

4.2 検討条件

以下の検討対象には、全国の設計資料から設計条件の偏りがないように抽出したケーソン式混成堤の建設事例18ケースを用いた。旧基準による設計断面であるため安全率をもとに設計されており、滑動安全率は1.2程度の事例である。信頼性指標としては2.4程度ということになる¹⁵⁾。沖波波高の極値分布は全て波浪の分野で非常に多く現れる分布であるワイブル分布であり、確率分布関数 $F_X(x)$ および確率密度関数 $f_X(x)$ はそれぞれ式(9)および式(10)により与えられる。

$$F_X(x) = 1 - \exp \left\{ - \left(\frac{x-B}{A} \right)^k \right\} \quad (9)$$

$$f_X(x) = \frac{k}{A} \left(\frac{x-B}{A} \right)^{k-1} \exp \left\{ - \left(\frac{x-B}{A} \right)^k \right\} \quad (10)$$

検討ケースの極値分布に関するパラメータなどは表ー2に示すとおりである。

4.3 1年間の累積滑動量の確率分布関数の評価（MCS1）

表ー1に示した確率変数の中で年1回サンプリングされるNo.1～7の確率変数のうち、感度が高いと考えられるものは沖波波高、摩擦係数、沖波波高精度・波浪変形計算精度・砕波変形精度（簡単のため以下これを波浪精度と呼ぶ）である。よって本研究では以上の3種類のパラメータについて重点サンプリング法の対象とする。これらのパラメータのうち、再現期間50年の設計波高を対象とした滑動に関する力の釣合いを対象としたFORMの検討¹⁶⁾より、感度係数は摩擦係数について0.689、波力について-0.704程度である。ただし、この波力の感度係数には波力算定精度が含まれているため、波浪精度単独の感度係数は明らかではない。本研究では波浪精度と波力算定精度の各々の分散の比例配分をもとに、波浪精度の感度係数としては概ね-0.25と評価した。なお、こ

表-2 検討条件

ケース No.	沖波極値分布 パラメータ			堤前 最高 波高 (m)	潮位 (m)	ケーソン 設置 水深 (m)
	k	A	B			
1	1.4	1.545	5.177	14.57	0.50	16.00
2	1.4	2.168	6.697	15.72	0.50	17.00
3	1.4	2.174	4.865	13.23	0.50	13.50
4	1.4	1.545	5.177	14.64	0.70	16.00
5	1	0.994	5.511	14.96	1.50	16.50
6	1.4	2.395	4.154	11.94	0.40	12.50
7	2	4.604	1.984	16.32	1.50	16.50
8	1	1.187	4.257	10.67	1.50	9.50
9	2	4.721	1.355	13.85	1.30	13.00
10	2	4.908	0.952	11.60	0.90	12.00
11	2	4.908	0.952	13.01	0.90	13.00
12	2	3.258	2.357	9.93	1.60	9.00
13	1	0.934	1.093	7.77	2.37	10.00
14	1.3	0.875	0.896	4.84	0.40	5.00
15	1.5	1.648	4.837	13.00	0.40	13.50
16	2	3.692	1.498	11.80	1.50	10.00
17	2	4.505	3.735	14.26	0.90	13.00
18	2	4.505	3.735	14.71	0.90	12.00

の感度係数や信頼性指標は力の釣合に基づく評価により得られた値であり、滑動量そのものに対応した値ではない。ただし、滑動量に対応した design point は解析的に求めることは困難であることから、本研究では摩擦係数と波浪精度について、この感度係数と信頼性指標 2.4 を用いてサンプリング密度関数の設定を行う。サンプリング密度関数は確率分布のうち標準偏差はオリジナルの値とし、平均値を式(6)により設定するものである。

次に、沖波波高について検討する。上述の通り、本研究で対象とする極値分布はすべてワイブル分布である。ワイブル分布は下限値を持つ分布であり、下限値が B である。従って、サンプリング密度関数の設定においてパラメータ B を変更してしまうと、下限値近傍で値がサンプリングされた場合に、オリジナルの確率密度関数とサンプリング密度関数の比である重み関数の値が非常に大きな値となり、不都合が生じることが予想されるため、それ以外のパラメータを変更してサンプリング密度関数を設定することとする。

いま、防波堤の設計波である再現期間 50 年の沖波波高をサンプリング密度関数において再現期間 n 年相当に変換することを考える。再現期間 50 年は確率分布関数の値が $1-1/50=0.98$ の条件である。同様に、 n 年の場合は確率分布関数の値が $1-1/n$ となる。この関係を用いて、パラメータ A を式(11)による A' に変更することによってサンプリング密度関数を設定する。

$$A' = A \left\{ \frac{\ln(0.02)}{\ln(1/n)} \right\}^{\frac{1}{k}} \quad (11)$$

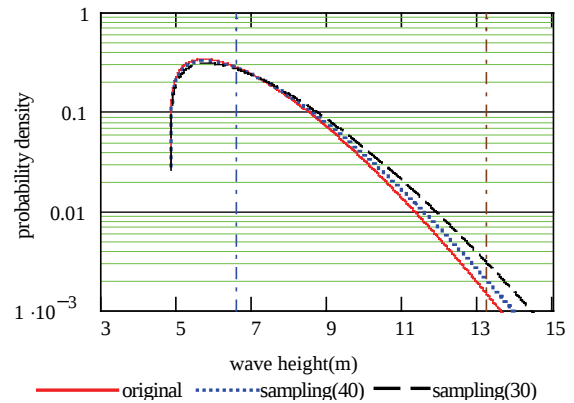


図-7 サンプリング密度関数 (ケース 3)

一例として表-2 に示したケース 3 の条件で、オリジナルの確率密度関数、再現期間 50 年の沖波波高を 40 年相当に設定したサンプリング密度関数 (sampling(40))、同じく 30 年相当に設定したサンプリング密度関数 (sampling(30)) の比較を図-7 に示す。図中の縦線は、沖波平均波高 (6.61m) および堤前最高波高である。sampling(30)では堤前最高波高程度で確率密度が 2 倍程度になる。

次に同じケースで、沖波波高にのみサンプリング密度関数を導入した重点サンプリング法と crudeMCS との比較を行った。検討条件として 1 年の累積滑動量に対する破壊確率を 10^7 回の試行で評価した。この回数は、収束を判定することができる十分に多い回数として設定している。滑動量許容値を 5cm とした場合の破壊確率の収束状況を図-8 に示す。擬似乱数は何れもメルセンヌ・ツイスタを用いている。乱数の種はデフォルトの種の 1 つである 4357 を用いた。図の凡例のうち、IS(40)、IS(30)

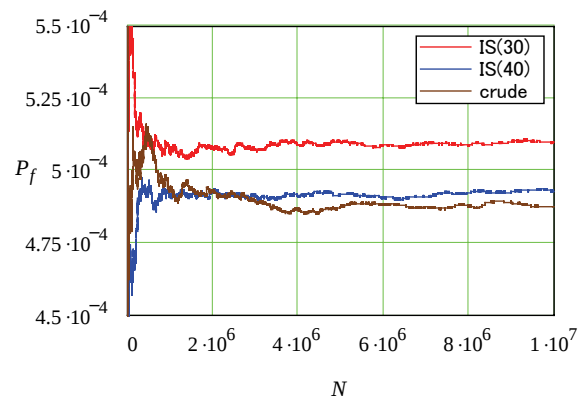


図-8 破壊確率収束状況 (ケース 3)

はそれぞれ図-7 の **sampling(40)**, **sampling(30)**のサンプリング密度関数を用いた重点サンプリング法である。図より, **crudeMCS** と重点サンプリング法のうち **IS(40)**は破壊確率推定値が同程度であるが, **IS(30)**は破壊確率を過大に評価している。また, 図には示していないが, 20 年, 10 年に設定した場合はさらに過大評価となった。この理由について考察する。

沖波波高は波群の代表波高である有義波高であるが, 最終的に滑動の運動方程式を評価する際に用いられる個別波高は有義波高をもとにしてレーリー分布に従って再度サンプリングされる。さらに, 個別波高に対しては砕波の判定が行われるため, 高い個別波高がサンプリングされた時は砕波が生じると判定されて棄却される場合が増加する。これは, 砕波により波高が頭打ちとなってある限界値に収斂するのではなく, 砕波後の波高はランダムに変化して波高全体の分布はまたレーリー分布となるためで, このため **MCS** では一度棄却して再度サンプリングを行うことになる。サンプリング密度関数の導入により高い沖波波高をサンプリングしやすいように設定するということは砕波しやすいように設定するということでもあり, サンプリング密度関数の導入が破壊を生じやすく設定するという重点サンプリング法の趣旨にそぐわない場合がある可能性があるといえる。

さらに, 低い沖波波高がサンプリングされた場合には逆に砕波が生じにくくなるために破壊の生じやすさが沖波波高の高さに応じて必ずしも減少するわけではない可能性がある。ところが, 破壊確率の評価の際に重み関数を導入するので, サンプリングされた沖波波高が低く, 重み関数の値が高い条件では破壊の回数を多く判定することになる。

このような理由で, 極値分布におけるサンプリング密度関数をオリジナルの密度関数から大きくずらしてしまうと破壊確率の精度が悪くなると考えられる。本研究ではケーススタディの結果を踏まえてサンプリング密度関数は再現期間 50 年の波高が 40 年相当となるように設定した。なお図-8 に示した結果では重点サンプリング法の効果が **crudeMCS** と比較してあまり明瞭ではないが, 最終的な重点サンプリング法の効果についてはサンプリング密度関数の組み合わせ方と含めて以下で検討する。

以上の条件で重点サンプリング法の適用を検討するが, 本来は海象条件などに応じて適切なサンプリング密度関数の設定方法が変化する可能性がある。沖波波高以外のパラメータを含めて, サンプリング密度関数の最適な設定方法の吟味については今後の課題としたい。

次に, 重点サンプリング法におけるサンプリング密度関数の組み合わせについて検討する。摩擦係数のみを重点サンプリング法の対象とした場合を **IS1**, 摩擦係数と波浪精度を対象とした場合を **IS2**, **IS2**に極値分布を対象に加えた場合を **IS3** として **crudeMCS** との比較を行った。

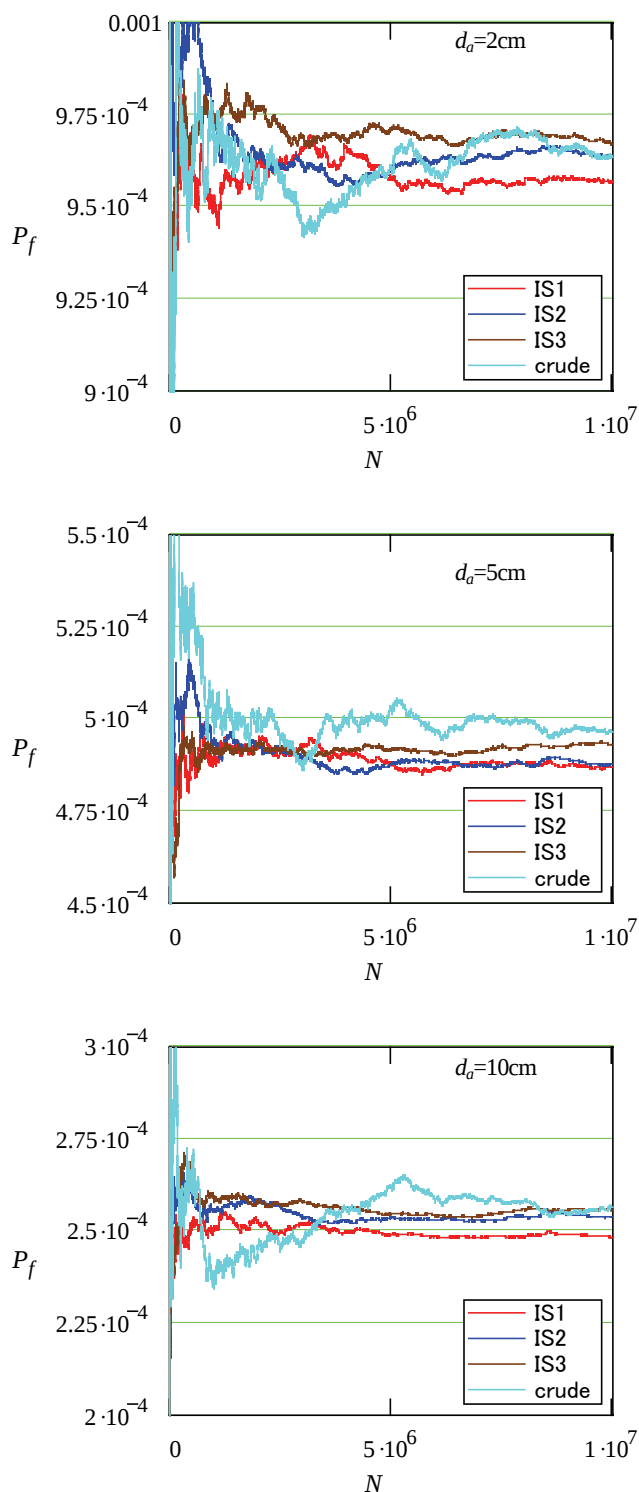


図-9 破壊確率収束状況 (ケース 3)

図-9 に, これまでと同じケース 3 について, 滑動量許容値 d_0 を 2cm, 5cm, 10cm とした場合の 1 年間の破壊確率の収束状況を示す。

図より, 重点サンプリング法は何れの方法においても **crudeMCS** と比較すると収束が良いことがわかる。従って, **MCS1** として重点サンプリング法を適用することで効率化が期待できると考えられる。検討対象とした他のケースについても概ね同様の傾向であった。また, 10^7

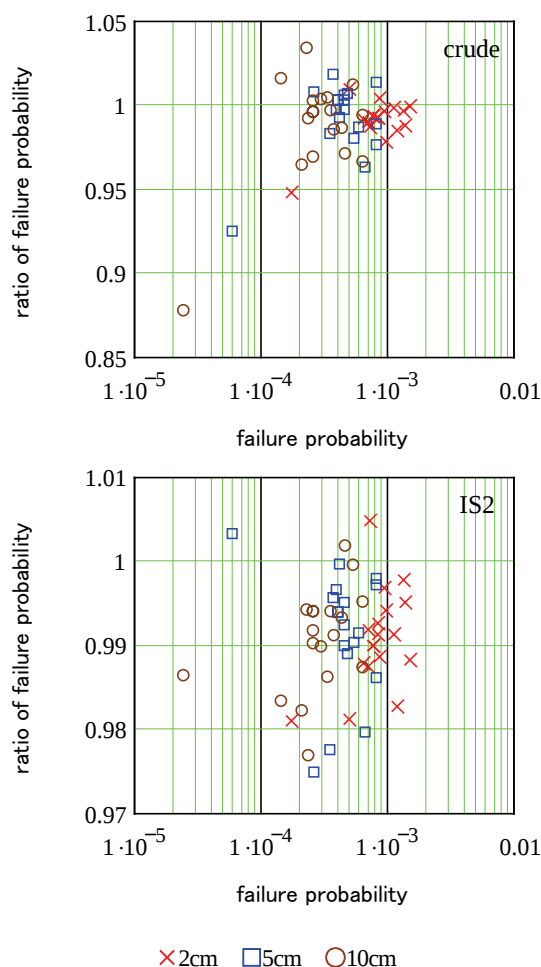


図-10 破壊確率比

回試行時の破壊確率は、図-9 の例では IS1 のみやや低い破壊確率を示す傾向にあったが、他の例を含めると必ず低い破壊確率となるわけではなかった。

図-10 には、IS3 による破壊確率を基準として、crudeMCS および IS2 による破壊確率の比を示した。水平軸は IS3 による破壊確率である。ここでの破壊確率はどれも試行回数 10^7 回における値とした。比の平均値は、crudeMCS, IS1, IS2 のどれも 0.99 であった。ただし、比の標準偏差は crudeMCS, IS1, IS2 のそれぞれに対して 0.023 , 6.77×10^{-3} , 6.45×10^{-3} であり、crudeMCS は特にばらつきが大きい。また、図-10 に示したように、破壊確率が低い条件で IS3 と比較すると小さな破壊確率となるケースがある。最も比の値が小さかったのは表-2 のケース 14 で、これは crudeMCS では 10^7 回でも収束していないケースと考えられる。なお、前述のように、検討断面はすべて力の釣合に基づいて安全率として 1.2 相当であるが、砕波の影響を非常に強く受ける地点では図-1 に示した波力の時刻歴モデルのうちパルス性の P_{2max} が卓越し、継続時間の長い P_{1max} は P_{2max} に対してかなり小さな値となり、このため滑動量は僅かな値となることがある。収束の遅い条件はそのようなケースであるとい

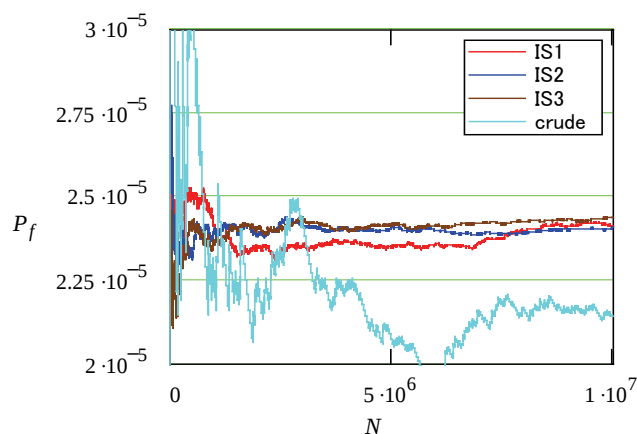


図-11 破壊確率収束状況 (ケース 14, $d_a=10\text{cm}$)

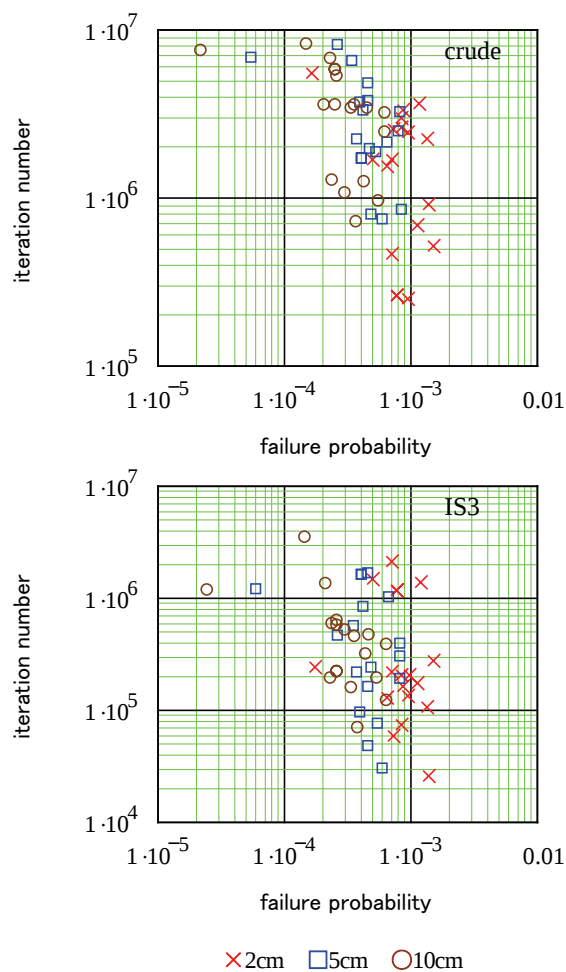


図-12 試行回数比較図

える。図-11 にはケース 14 の $d_a=10\text{cm}$ における破壊確率の収束状況を示した。crudeMCS が収束していないのに対して、IS では各手法とも良い収束を示していると考えられ、重点サンプリング法が有効であると考えられる。

次にこのシミュレーションにおいて必要な試行回数について検討する。図-12 に、 10^7 回試行時の破壊確率に対して $\pm 3\%$ の範囲に収まる試行回数を検討した結果を crudeMCS と IS3 について示す。ここで、3%とは収束

判定における他分野等での設定などを参考に便宜的に定めた基準である。基本的に破壊確率が小さいほど多くの試行回数が必要であるが、**crudeMCS** では非常に破壊確率が小さな図-11 に示したケースを仮に除外したとしても多くの試行回数が必要である。これに対して **IS3** では一例を除いては概ね 2×10^6 回で安定的な破壊確率が得られていると判断できる。**IS3** の収束回数で 2×10^6 回をかなり上回る例はケース7の $d_a=10\text{cm}$ の例であり、この収束状況を図-13 に示す。

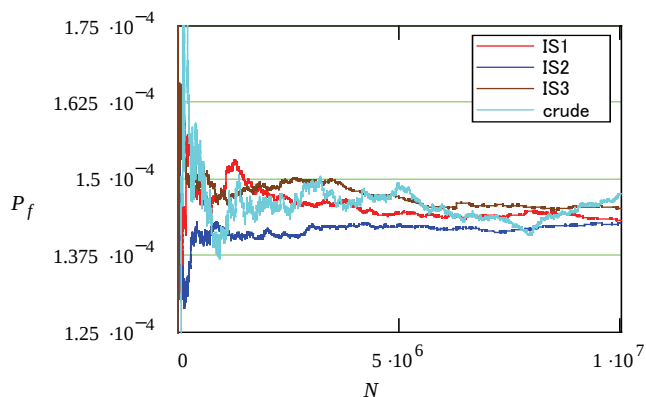


図-13 破壊確率収束状況（ケース7， $d_a=10\text{cm}$ ）

各ケース毎に **IS3** を基準として、各方法によって $\pm 3\%$ で破壊確率が収束する試行回数の比を求めてこれを平均した結果、**crudeMCS** では15.98，**IS1** では3.58，**IS2** では1.83 となった。従って、**IS1**～**IS3** とサンプリング密度関数を導入する確率変数を多くするにつれて収束が早くなることがわかる。

以上述べた破壊確率の収束値および必要な試行回数に関する結果を踏まえ、本研究では1年間の累積滑動量の確率分布関数を求めるためのシミュレーション（**MCS1**）については、**IS3** の重点サンプリング法を用いて、試行回数は図-13 に示した一例を除くと 2×10^6 回で安定的な解が得られることから 2×10^6 回とした。

この **MCS1** によって 2×10^6 列の、1年間の累積滑動量と重み（式(3)の $f_X(X)$ と $h(X)$ の比）の行列が得られるが、ここから1年間の累積滑動量の確率分布関数を数値的に評価する。確率分布関数は、累積確率の値が等間隔で刻まれたものにするのが取扱いの面で有利である。従って、確率分布関数の評価方法は次の通りとする。

- ① **MCS1** の出力行列を、滑動量に関してソートし、滑動量の大きい試行結果から順に並べ替える。
- ② 並べ替えた行列の重みについて、その累積値があらかじめ定めた累積確率の刻み幅になるように1列目から順に探索してグループ化する。
- ③ 各々の累積確率に対応した滑動量を、重みに応じた比例配分によって評価する。

具体的な確率分布関数の評価方法の例を図-14 に示す。ここでは、累積確率を0.1刻みになるように設定した場合の例を示している。図中、③の表の $F(x)$ が累積確

①並べ替え

滑動量(m)	重み
17.1	0.02
15.5	0.05
14.3	0.06
14.0	0.09
....	

②累積が0.1となるようグループ化

滑動量(m)	重み
17.1	0.02
15.5	0.05
14.3	0.03
14.3	0.03
14.0	0.07
14.0	0.02
....	

③重みの比例配分で確率分布関数を設定

滑動量(m)	$F(x)$
$\frac{17.1 \times 0.02 + 15.5 \times 0.05 + 14.3 \times 0.03}{0.1}$	$1 - 0.05/N$
$\frac{14.3 \times 0.03 + 14.0 \times 0.07}{0.1}$	$1 - 0.15/N$
....	

(Nは重み累積値)

図-14 確率分布関数の評価の例

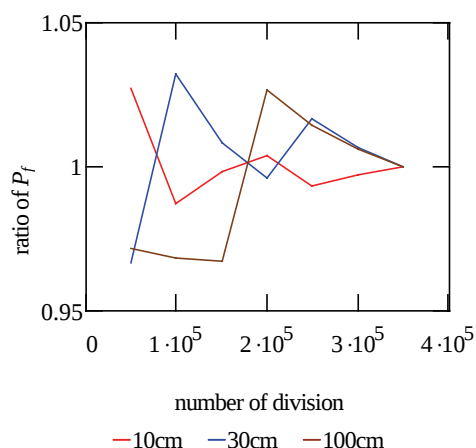


図-15 確率分布関数の分割数と破壊確率の関係

率の値である。図-14 では簡単のために確率分布関数における累積確率の刻み幅は細かく設定しているが、本研究では重みの累積は試行回数の 2×10^6 にほぼ一致するため、実際にはこれよりも粗く設定の方が取扱いが容易である。

累積確率の最適な分割数について検討するため、ケース1を対象に、分割数を5万～35万の範囲で5万刻みで確率分布関数を評価し、各々について後述する方法で50年の累積滑動量に対する破壊確率を評価した。以降の検討では、50年の累積滑動量に対する滑動量許容値として既往の研究¹⁷⁾により提案されている10,30,100cmとする。

検討結果を図-15 に示す。水平軸は分割数であり、鉛直軸は35万分割時の破壊確率に対する各々の分割数における破壊確率の比である。図より、分割数が少ないケ

ースでは破壊確率の変動が比較的大きいことが分かる。分割数が 25 万以上の範囲では破壊確率は概ね安定していることから、本研究では確率分布関数における累積確率の分割数は 25 万とする。

4.4 設計供用期間の累積滑動量に対する破壊確率の評価 (MCS2)

MCS1 により 1 年間の累積滑動量に関する確率分布関数が数値的に得られたので、ここから 50 回サンプリングして累積することにより 50 年間の累積滑動量の確率分布関数を評価する。

ここで取り上げているのは上述のように実際の設計断面であり、基本的には滑動破壊が生じる可能性が非常に低く設定されている。従って、1 年間の累積滑動量に関する確率分布関数は、大部分の滑動量がゼロとなる。図-16 に、ケース 1 を対象に、1 年間の累積滑動量に関する確率分布関数を示す。ここでは、破壊確率と対応するように、鉛直軸は累積確率（非超過確率）ではなく超過確率（ $1-F(x)$ ）として示している。

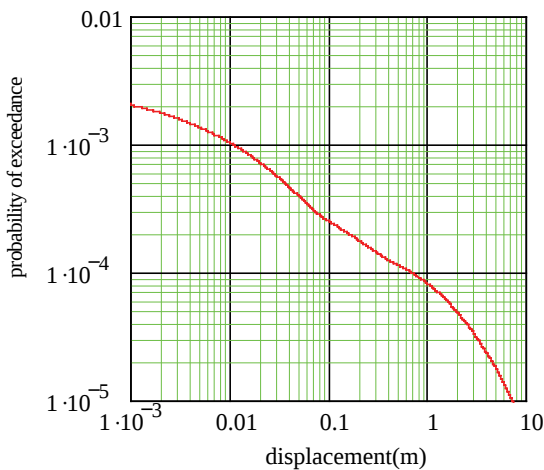


図-16 1 年間の累積滑動量に関する超過確率 (ケース 1)

このケース 1 の例では 1 年間の累積滑動量がゼロとなる確率は 0.997 である。他のケースにおいても同様の傾向を示す。従って、大部分がゼロである確率分布関数からランダムにサンプリングして 50 回累積することは計算効率の観点から望ましくない。いま 1 年間の累積滑動量がゼロとなる確率を p_0 、滑動量が正となる確率を p_p とする。50 回のサンプリングにおいて滑動量が正の範囲から n 回サンプリングされる確率を p_n とすると、 p_n は以下により得られる。

$$p_n = p_p^n p_0^{T-n} \frac{T!}{n!(T-n)!} \quad (11)$$

ここに、 T ：累積回数であり、本研究の場合 50 である。

ケース 1 を対象に、 p_n を示すと表-3 のとおりである。これより、 $n=1$ までは全体の 99% を占めており、2 回以上正の値がサンプリングされる確率はきわめて低い。ただし、破壊確率は小さく評価されるであろうことを考えると、正の値が複数回サンプリングされる結果を正確に評価しておくことは重要である。本研究では、サンプリングされる確率が 10^{-5} 以上の回数までのサンプリングを考慮することとした。表-3 に示したケース 1 の場合、 $n=4$ までとなる。

表-3 p_n の例

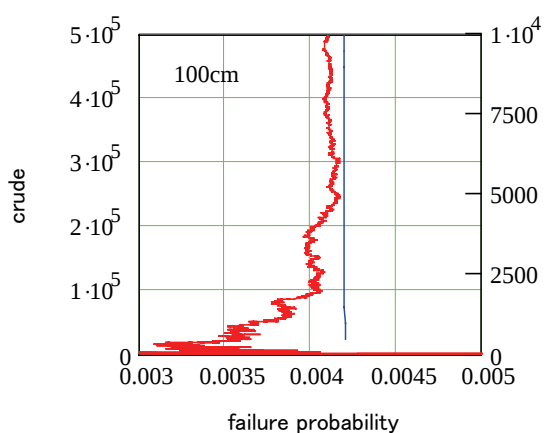
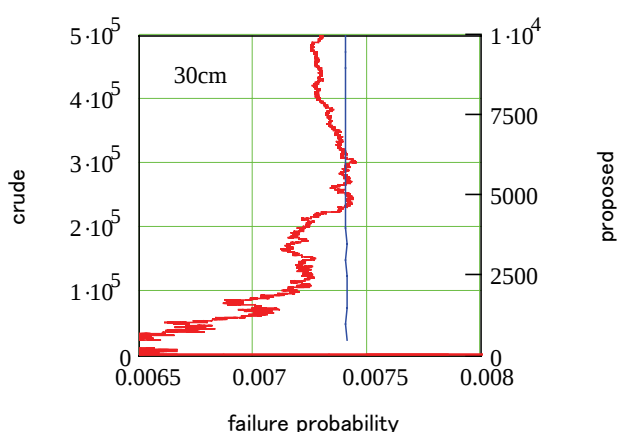
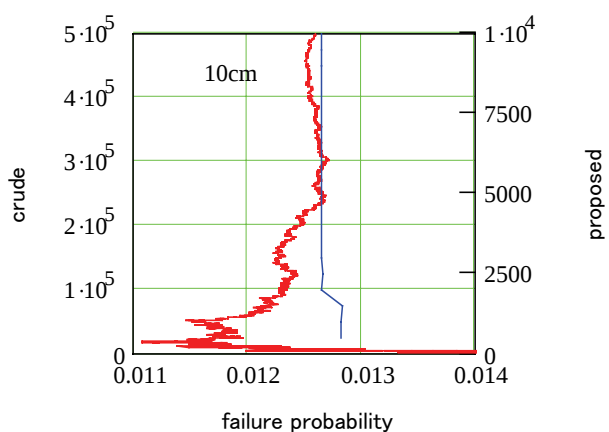
n	p_n
0	0.864
1	0.127
2	9.12×10^{-3}
3	4.29×10^{-4}
4	1.48×10^{-5}
5	4.00×10^{-7}
...	...

MCS2 においては、設定した確率分布関数の滑動量が正の範囲から偏りなくサンプリングして重ね合わせる必要がある。このため MCS2 では重点サンプリング法は用いず、超一様分布列³⁾を用いることとした。

MCS2 では、 $n=0$ および 1 の条件についてはシミュレーションは必要ない。前者に対しては累積滑動量はゼロで、後者については得られている確率分布関数の滑動量が正の範囲をそのまま用いて、各々に対応する重みを割り付ける。よって表-3 に示したケース 1 の場合はシミュレーションの対象となるのは $n=2 \sim 4$ の場合のみである。

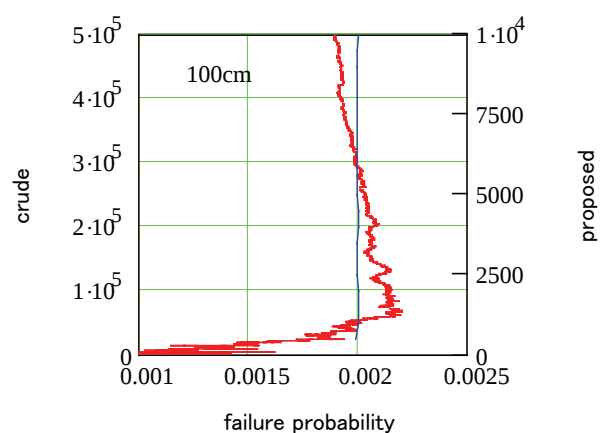
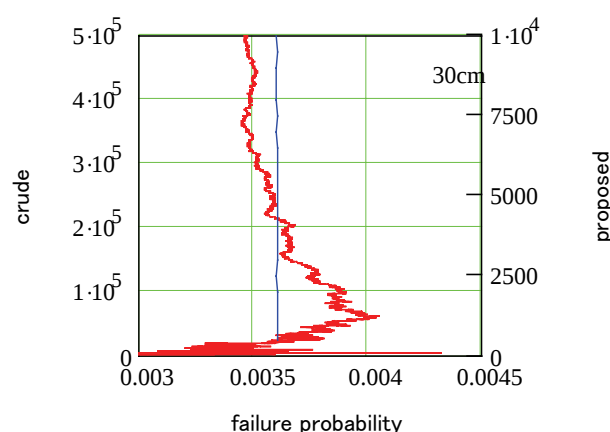
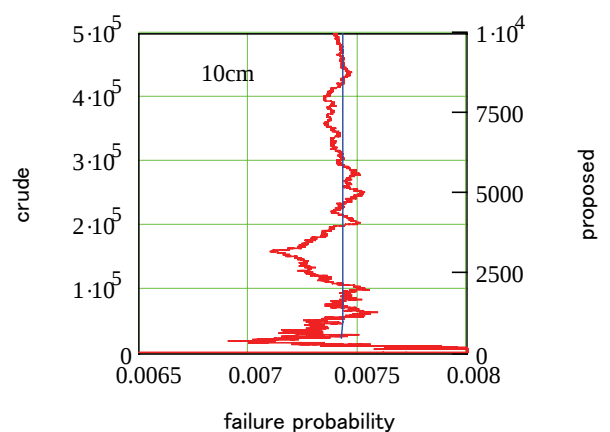
MCS2 における具体的な方法は以下の通りである。まず試行回数を N 回とする。 $n=2 \sim 4$ のそれぞれについて N 回の試行を行う。今仮に得られている確率分布関数を対象に crudeMCS を実施したとすると、仮定の試行回数 N_v に対して累積量がゼロとなる回数は $p_0 \times N_v$ である。さらに、確率分布関数において値が正の範囲が C_p だけ数値化されていたとする（図-14 に示す滑動の 17.1, 15.5, ... という数列のうち正の部分の数）と、50 年累積のうち 1 回のみ正の値がサンプリングされる確率が p_1 であり、全体の回数が $p_1 \times N_v$ あってこれを均等な重み C_p で除することで各滑動量の試行回数が $p_1 \times N_v / C_p$ と得られる。 $n=2 \sim 4$ についても同様で、例えば $n=2$ については N 回の試行結果の各々を回数 $p_2 \times N_v / N$ と見なせばよい。破壊確率は、滑動量が許容値を超える重みの累積値を全体の累積値で除することにより求めることが出来る。

MCS2 における破壊確率の収束状況を図-17 に示す。鉛直軸は試行回数であり、左側が crudeMCS、右側が本研究の MCS2 の上記の N 回に対応する試行回数である。



— crude — proposed

図-17 MCS2 収束状況 (ケース 1)



— crude — proposed

図-18 MCS2 収束状況 (ケース 7)

MCS2はMCS1の処理を経た後のシミュレーションであるので crudeMCS と回数の直接比較は出来ないが、収束状況を確認しやすいように並べて示している。図より、MCS2は収束が非常に早く、ここでは1万回までの試行としたが、3000回以内に何れのケースも収束していることを確認した。この例では、 $d_0=30\text{cm}$ の条件を除いては crudeMCS は 3×10^5 回程度で収束しており、その条件において crudeMCS による破壊確率と本研究による破壊確率はよく一致している。 $d_0=30\text{cm}$ では両者の破壊確率に

やや差があるが、crudeMCSの結果を見ると 5×10^5 回でもまだ収束していない可能性がある。図-18には、図-13にMCS1の収束状況を示したケース7の結果を示す。このケースにおいても、crudeMCSにおいて 3×10^5 回程度で収束している $d_0=10\text{cm}$ の条件では両者の破壊確率はよく一致している。それ以外の条件ではやや破壊確率の差が見られるが、crudeMCSにおいても収束していない可能性がある。

crudeMCS と本研究による方法の破壊確率の比較を図

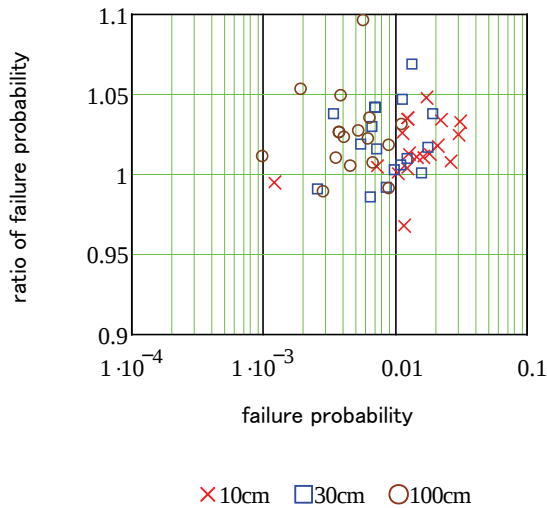


図-19 破壊確率の比較

図-19に示す。水平軸は crudeMCS による破壊確率、鉛直軸は crudeMCS による破壊確率に対する本研究による破壊確率である。また、破壊確率は、crudeMCS が試行回数 5×10^5 回、本研究が MCS1 が 2×10^6 回、MCS2 が 10^4 回値である。破壊確率の比の平均値は、 $d_0=10\text{cm}$ 、 30cm 、 100cm の順に 1.02, 1.03, 1.08 であった。また、比の値の上下限は、同じ変形量許容値の順に、0.97~1.05, 0.99~1.17, 0.99~2.05 であった。このように、平均的には $d_0=100\text{cm}$ の条件を除くと本研究による破壊確率は crudeMCS と同程度の破壊確率であるが、一部のケースで crudeMCS の破壊確率は本研究の破壊確率よりも大幅に小さい結果となった。両者の破壊確率が大きく違う条件はケース 13, ケース 14 であった。なお、上記の破壊確率の比の平均値であるが、 $d_0=100\text{cm}$ の場合について比の値が非常に大きいケース 14 を除外すると平均値は 1.03 となる。ケース 14 については MCS1 の収束状況は図-11 に示したとおりであり、重点サンプリング法による結果は 2×10^6 回の試行で収束していると考えられる。crudeMCS について、別途この条件について 4×10^6 回まで試行回数を増やして検討したところ、 5×10^5 回の結果と比較して違いはあるものの、その差は約 8% であった。 4×10^6 回と 5×10^5 回で 8% の差があるということは、crudeMCS において 5×10^5 回の試行では収束していないといえるが、それでも本研究の方法との差は大きい。従って、これらの破壊確率が非常に小さいケースについては、本研究の方法の MCS1 におけるサンプリング密度関数の設定方法に改善の余地があると考えられる。この点については今後の課題としたい。

さて、crudeMCS において、 5×10^5 回試行における破壊確率と $\pm 3\%$ の範囲に収まる試行回数を検討した結果を図-20 に示す。破壊確率に応じて必要な試行回数は異なるが、 4×10^{-3} 程度の破壊確率においても 4×10^5 程度程度の試行が必要となるケースがあることがわかる。なお、

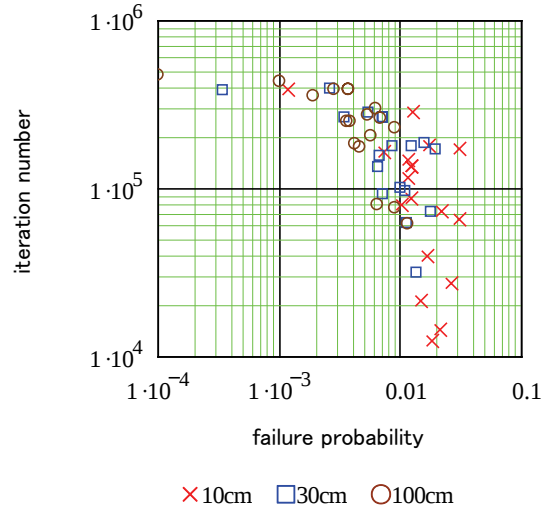


図-20 crudeMCS における必要試行回数

上述のケース 14 の $d_0=100\text{cm}$ における回数は図の一番左にプロットされている○マークのもので、この判定方法では 4.8×10^5 回と判定されている。いずれにせよ、crudeMCS で十分な精度で破壊確率を評価するためには 4×10^5 回程度の試行回数は必要であると考えられる。

本研究の MCS1 については試行回数が 2×10^6 回であるので、設計供用期間 50 年の crudeMCS としては 4×10^4 回に相当する。また、MCS2 は波浪のサンプリングにおける碎波の判定や運動方程式の積分などが一切なく、単純にサンプリングして数回加えるのみであるので、計算負荷が非常に少なく、非常に短い時間で計算が終了する。

以上を踏まえると、破壊確率が非常に小さいケースにおいてはサンプリング密度関数の設定に慎重な検討が必要であるが、本研究による方法で防波堤の累積滑動量に関する破壊確率評価の効率化が図られると考えられる。

5. まとめ

本研究では、防波堤の設計供用期間の累積滑動量に関する破壊確率のモンテカルロシミュレーションによる評価について、重点サンプリング法の適用によって効率的に評価を行う方法を検討した。本研究による主要な結論は以下の通りである。

①繰り返し作用による累積値に対するモンテカルロシミュレーションについて、繰り返し回数が多い場合には重点サンプリング法の適用にあたって慎重な検討が必要である。これは、繰り返し作用回数の増加に伴って design point が平均値に近付くことが原因である。

②このため本研究では、50 年の累積滑動量に対する問題を 1 年の滑動量を求める問題としてまず扱い、ここに重点サンプリング法を適用して滑動量の確率分布関数を数値的に評価する方法を提案した (MCS1)。50 年の累積

滑動量については、1 年の滑動量に対する確率分布関数から 50 回サンプリングすることで評価することとし、確率分布関数において滑動量がゼロの確率が非常に高いことに着目して 50 年の滑動量の確率分布関数を効率よく評価する方法を提案した (MCS2)。

③crudeMCS で十分な精度で 50 年間の累積滑動量に対する破壊確率を評価するためには 4×10^5 回程度の試行回数が必要である。これに対して本研究の方法では、MCS1 は設計供用期間 50 年の crudeMCS としては 4×10^4 回に相当する 2×10^6 回試行回数で概ね十分であり、かつ MCS2 は 3000 回程度の試行回数で収束する。さらに MCS2 は他のシミュレーションと比較して計算負荷が非常に少ない。従って、本研究による方法で防波堤の累積滑動量に関する破壊確率評価の効率化が図られると考えられる。ただし、今回の検討範囲では破壊確率は 10^{-4} 以上のものであったが、破壊確率が非常に小さいケースにおけるサンプリング密度関数の設定について、今後更に検討が必要である。

謝辞

本研究を行うにあたり、沖波の極値分布データは各地方整備局より提供して頂きました。また、検討に用いたプログラムは、前(独)港湾空港技術研究所・下迫健一郎氏が作成されたものを改良しました。ここに深く感謝の意を表します。

参考文献

- 1) 国土交通省港湾局監修, (社)日本港湾協会: 港湾の施設の技術上の基準・同解説, 2007.
- 2) 下迫健一郎, 高橋重雄: 期待滑動量を用いた混成防波堤直立部の信頼性設計法, 港湾技術研究所報告, Vol.37, No.3, pp.3-30, 1998.
- 3) 田村 勉, 白川 浩: 一般化 Faure 列による準乱数とそのオプション評価への応用, ジャフイージャーナル, pp.95-115, 東洋経済新報社, 1999.
- 4) 長尾 毅, 吉岡 健, 尾崎竜三: 防波堤の滑動量に関する破壊確率の算定精度向上に関する研究, 海岸工学論文集, 第 55 巻, pp.941-945, 2008
- 5) Harbitz, A. : An Efficient Sampling Method for Probability of Failure Calculation, Structural Safety, Vol.3, No.2,

pp.109~115, 1986

- 6) Shinoda, M., Hori, K., Yonezawa, T., Tateyama, M. and Koseki, J. : Reliability-based seismic deformation analysis of reinforced soil slopes, Soils and Foundations, Vol.46, No.4, pp.447-490, 2006
- 7) 篠田昌弘, 佐藤忠信, 米澤豊司: 複数の潜在的すべり線を有する斜面の限界状態超過確率の効率的な算定方法, 土木学会論文集 C, Vol.63, No.3, pp.812-824, 2007
- 8) 日本建築学会: 構造物系の非線形・不確定モデリング, 応用力学シリーズ 6, 1998
- 9) 吉田郁政, 鈴木修一: 限界地震動指標を用いた損傷確率の効率的な算定方法, 構造工学論文集, pp.201-206, 2003
- 10) 谷本勝利, 古川浩司, 中村廣昭: 混成堤直立部の滑動時の流体抵抗力と滑動量算定モデル, 海岸工学論文集, Vol.43, pp.846-850, 1996.
- 11) 長尾 毅: ケーソン式防波堤の外的安定に関する信頼性設計法の適用, 土木学会論文集, No.689, I -57, pp.173-182, 2001.
- 12) Matsumoto, M. and Nishimura T.: Mersenne Twister: A 623-dimensionally equidistributed uniform pseudorandom number generator, ACM Transactions on Modeling and Computer Simulations, 8, pp.3-30, 1998.
- 13) Rackwitz, R. and Fiessler, B. : Structural Reliability under Combined Random Load Sequences, Computers & Structures, Vol. 9, pp.489~494, 1978
- 14) Melchers, R. E. : Structural Reliability Analysis and Prediction, John Wiley & Sons, Inc., 1999
- 15) 吉岡 健, 長尾 毅: 重力式防波堤の外的安定に関する部分係数のコードキャリブレーション, 海洋開発論文集, 第 21 巻, pp.779-784, 2005
- 16) 吉岡 健, 長尾 毅: ケーソン式防波堤の外的安定に関する安全性指標と感度係数の関係, 海洋開発論文集, 第 20 巻, pp.197-202, 2004
- 17) 下迫健一郎, 大寄菜々子, 中野史丈: 滑動量を要求性能に設定した混成堤の信頼性設計法, 港湾空港技術研究所報告, Vol.45, No.3, pp.3-23, 2006.

(2008 年 9 月 18 日受付)