ＦＲＰ積層円筒シェルのＲＳ座屈耐荷力の特性

Reduced stiffness load-carrying capacity of FRP laminated cylindrical shells

山田　聖志*，柳田　将之**
Seishi Yamada，Masayuki Yanagida

*工博，豊橋技術科学大学教授，工学部建設工学系（〒441-8580 愛知県豊橋市天伯町雲雀ヶ丘 1-1）
**豊橋技術科学大学大学院生，建設工学専攻（〒441-8580 愛知県豊橋市天伯町雲雀ヶ丘 1-1）

It is well-known that isotropic metal cylindrical shells under compression have buckling behavior which is very sensitive to initial geometric imperfections. In the case of orthotropic FRP material, the angles of fiber orientation as well as the imperfection have been suggested to affect the buckling behavior in the literature. In this paper the interaction between the angle of fiber orientation and the imperfection has been made clear through the reduced stiffness buckling analysis in which imperfection effects are intrinsically considered. This paper has shown that the present reduced stiffness criteria of FRP laminated cylindrical shell under compression are insensitive due to fiber orientation and the longer wave-length mode in axial direction is important for the buckling design.

Key Words：cylindrical shell, imperfection sensitivity, reduced stiffness method, angle of fiber orientation
キーワード：円筒シェル，初期不整敏感性，RS(Reduced Stiffness)法，繊維配向角

1. はじめに

各種タンクの壁体や橋梁・海洋構造物の下部構造などにＦＲＰ（Fiber Reinforced Polymer : 繊維補強ポリマ）を利用するためには，貯槽内容物の沈降に伴う壁面との摩擦力や，地震時曲げモーメントによる付加軸力など，軸圧に対する円筒シェル壁体要素の座屈耐荷力照査が必要になる．特に，ＦＲＰは普通鋼材に比して強度剛性比が約 8 倍と大きいので，貯槽構造としてしばしば利用される，半径厚さ比が 200～1000 程度の薄肉円筒シェルでの壁面座屈の照査は，材料の損傷や降伏現象に対する照査と同程度に設計上の大きな課題となる．その際，現状でのＦＲＰは，耐久性には優れているが，補強繊維材が高コストであり繊維配向角を合理的に調整して，必要な耐力を維持しつつ繊維量を削減することが検討されてきている．

一方，これまで，軸圧を受ける鋼製やコンクリート製などの等方性と近似できる材料でできた円筒シェルの座屈問題は，他の多くの構造安定力学問題の中で，座屈モードの非唯一性などの力学的に難しい課題を含んでいたことから，多くの研究者に扱われてきた．最近の解説[1)]でも，そうした研究動向が詳細に論じられている．

欧米では，1990 年代から高い比強度・耐腐食性といった利点からＦＲＰを利用する試みがなされ，我が国でも2000年に土木学会構造工学委員会にＦＲＰ橋梁関連の小委員会が発足して以来，設計資料の整備に関わる研究活動等が継続されてきている[2),3)]．ＦＲＰは繊維の含有率やその配向角などを任意に設定できるため，ＬＣＣやＬＣＡの制御・抑制が相当程度可能な未来型の新素材である．しかしながら高強度新素材に特徴的な剛性強度比の低さは変形の過大と座屈崩壊の危険性の増大が設計上の問題となることがある．特に座屈に関しては，その座屈モードとの関係を明確にしながら座屈補剛などの対策を講ずる必要があり，現在，土木学会ですすめられているＦＲＰ関係の基準類の整備[3)]に当たっても，それらには十分に配慮される必要がある．機械分野の既往の研究では，軸圧を受ける積層円筒シェルでは繊維配向角が約 20 度と約 70 度付近に最適解が存在する結果などが提示されているが，等方性シェルの座屈問題で解明されてきた初期不整の影響を考慮するとそうした最適性が失われることも示唆されている[4)]．

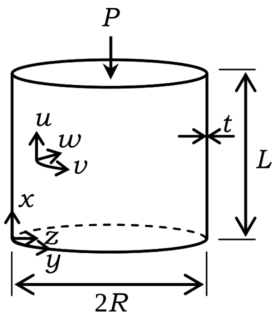
以上の観点に立ち，本研究では積層円筒シェルが軸圧を受ける場合の座屈特性について，まず線形座屈解析を実施し，座屈に寄与する各種エネルギ成分の特性

を明らかにする．次に，これまでの著者らのＲＳ（Reduced Stiffness : 剛性低減）理論に沿って [5]，初期不整によって低下すると推定できる面内歪エネルギ成分を無視することで得られるＲＳ方程式を決定するとともに，その解析を実施し，繊維配向の構成パターンが座屈耐荷力に及ぼす影響について主たる議論を行う．

2. 円筒シェルの座標系と境界条件

図－1 に示すような長さ L, 曲率半径 R, シェル厚 t の円筒シェルが軸圧縮荷重 P を受ける場合を考える．円筒座標系 x, y, z に対し，シェル厚中央面での変位を u, v, w とし, 境界条件は, 次式の両端単純支持とした.

$$w=0\ ,\ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0\ ,\ \frac{\partial u}{\partial x}=0\ ,\ v=0 \quad \text{at}\ x=0, L \tag{1}$$



図－1　シェル形状と座標系

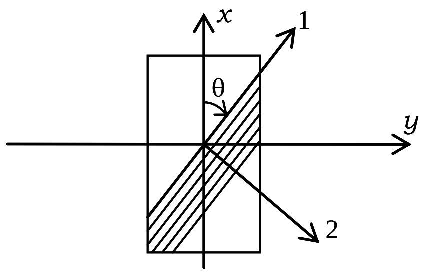
3. 材料複合則

図－2 に示すような直交異方性平板で, x-y 座標系は積層板の座標系（シェル座標系と対応），1-2 座標系は繊維方向に対応する座標系であり，繊維方向は x 軸からθ傾いていると想定する．

本論文では, 材料複合則 [6] として, 半経験的パラメータを導入することで材料定数を求める次式の Halpin-Tsai-方程式 [7] を採用した.

$$\begin{aligned} &E_1=E_F V_F+E_P V_P \\ &\mu_{12}=\mu_F V_F+\mu_P V_P\ ,\ \mu_{21}=\frac{E_2\mu_{12}}{E_1} \\ &E_2=\frac{1+\xi\eta_2 V_F}{1-\eta_2 V_F},\quad \eta_2=\frac{E_F/E_P-1}{E_F/E_P+\xi} \\ &G_{12}=\frac{1+\xi\eta_{12} V_F}{1-\eta_{12} V_F},\quad \eta_{12}=\frac{G_F/G_P-1}{G_F/G_P+\xi} \end{aligned} \tag{2}$$

ここに，下添字の F と P はそれぞれ繊維と樹脂であることを意味する．V_F は繊維の体積含有率で，V_P は樹脂の体積含有率，E_1 は繊維方向弾性定数，μ_{12}，μ_{21} はポアソン比である．また，繊維法線方向弾性定数 E_2 についてはパラメータ$\xi=1+40V_F^{10}$，せん断弾性定数 G_{12} は $\xi=2$ を用いた [7].



図－2　繊維方向と座標系

4. 座屈解析法

4.1 線形座屈解析

(1) 変位関数

変位関数は，式(1)の境界条件を満たす式(3)の重調和関数とする．ただし，$u_{i,j}$, $v_{i,j}$, $w_{i,j}$ は振幅，i は周方向波数，j は軸方向半波数である．

$$\begin{aligned} u&=u_{i,j}\cos\left(\frac{i}{R}y\right)\cos\left(\frac{j\pi}{L}x\right) \\ v&=v_{i,j}\sin\left(\frac{i}{R}y\right)\sin\left(\frac{j\pi}{L}x\right) \\ w&=w_{i,j}\cos\left(\frac{i}{R}y\right)\sin\left(\frac{j\pi}{L}x\right) \end{aligned} \tag{3}$$

(2) 歪－変位関係式

薄肉円筒シェル理論においては，Flugge 型の歪－変位関係を用い解析を行うことで理論解析の厳密解が得られる．本論文では，Flugge 型の歪－変位関係に Love 理論と Donnell 理論を適用した円筒シェルの中で最も単純な Donnell-Mushtari-Vlasov 型を用いる．

$$\bar{\varepsilon}_x=\varepsilon_x+z\kappa_x,\ \bar{\varepsilon}_y=\varepsilon_y+z\kappa_y,\ \bar{\varepsilon}_{xy}=\varepsilon_{xy}+z\kappa_{xy} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} &\varepsilon_x=\varepsilon_x^d+\varepsilon_x^{dd},\quad \varepsilon_y=\varepsilon_y^d+\varepsilon_y^{dd},\quad \varepsilon_{xy}=\varepsilon_{xy}^d+\varepsilon_{xy}^{dd} \\ &\kappa_x=\kappa_x^d,\quad \kappa_y=\kappa_y^d,\quad \kappa_{xy}=\kappa_{xy}^d \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} &\varepsilon_x^d=\frac{\partial u}{\partial x},\quad \varepsilon_y^d=\frac{\partial v}{\partial y}-\frac{w}{R},\quad \varepsilon_{xy}^d=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right) \\ &\varepsilon_x^{dd}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2,\ \varepsilon_y^{dd}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2,\ \varepsilon_{xy}^{dd}=\frac{1}{2}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} \\ &\kappa_x^d=-\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\quad \kappa_y^d=-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2},\quad \kappa_{xy}^d=-\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y} \end{aligned} \tag{6}$$

ここに，（$\bar{\varepsilon}_x, \bar{\varepsilon}_y, \bar{\varepsilon}_{xy}$）は任意の点の歪，（$\varepsilon_x$, ε_y, ε_{xy}）

は面内歪，(κ_x, κ_y, κ_{xy}) は曲げ歪である．上付きの d は，変位に関して1次の歪成分，dd は，変位に関して2次の歪成分であることを意味する．尚，R/t が 60 以上の薄肉円筒シェルの座屈問題では，ＦＲＰ積層材料の場合であっても横せん断変形の影響は小さいことが既往の研究で示されている[4]ので, 本研究ではその影響は無視する.

(3) 構成則

図−2 の 1-2 座標系における 2 次元問題の構成則は, 式(2)で求められた弾性定数を用い，式(7)として表記できる．ただし，$Q_{ij}(i,j=1,2,6)$は面内弾性定数である．

$$
\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_1 \\ \bar{\sigma}_2 \\ \bar{\sigma}_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{E_1}{1-\mu_{12}\mu_{21}} & \dfrac{\mu_{21}E_1}{1-\mu_{12}\mu_{21}} & 0 \\ \dfrac{\mu_{21}E_1}{1-\mu_{12}\mu_{21}} & \dfrac{E_2}{1-\mu_{12}\mu_{21}} & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon}_1 \\ \bar{\varepsilon}_2 \\ 2\bar{\varepsilon}_{12} \end{Bmatrix}
$$

$$
\equiv \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon}_1 \\ \bar{\varepsilon}_2 \\ 2\bar{\varepsilon}_{12} \end{Bmatrix} \tag{7}
$$

積層板の座標系 x-y に対応させるために座標変換を行ったとき，構成則は式(8)で表される.

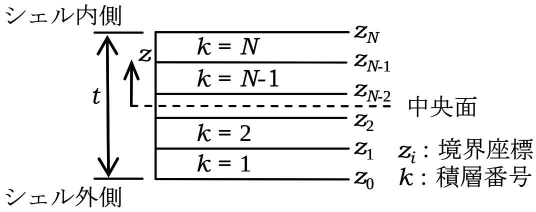
$$
\begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_x \\ \bar{\sigma}_y \\ \bar{\sigma}_{xy} \end{Bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon}_x \\ \bar{\varepsilon}_y \\ 2\bar{\varepsilon}_{xy} \end{Bmatrix} \equiv \left[\bar{Q}_{ij}\right] \begin{Bmatrix} \bar{\varepsilon}_x \\ \bar{\varepsilon}_y \\ 2\bar{\varepsilon}_{xy} \end{Bmatrix}
$$

$$
= \left[\bar{Q}_{ij}\right] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} + \left[\bar{Q}_{ij}\right] z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ 2\kappa_{xy} \end{Bmatrix} \tag{8}
$$

ここに,

$$
\begin{aligned}
\bar{Q}_{11} &= Q_{11}\cos^4\theta + 2\left(Q_{12}+2Q_{66}\right)\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{22}\sin^4\theta \\
\bar{Q}_{22} &= Q_{11}\sin^4\theta + 2\left(Q_{12}+2Q_{66}\right)\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{22}\cos^4\theta \\
\bar{Q}_{12} &= \left(Q_{11}+Q_{22}-4Q_{66}\right)\sin^2\theta\cos^2\theta + Q_{12}\left(\sin^4\theta+\cos^4\theta\right) \\
\bar{Q}_{66} &= \left(Q_{11}+Q_{22}-2Q_{12}-2Q_{66}\right)\sin^2\theta\cos^2\theta \\
&\quad + Q_{66}\left(\sin^4\theta+\cos^4\theta\right) \\
\bar{Q}_{16} &= \left(Q_{11}-Q_{12}-2Q_{66}\right)\sin\theta\cos^3\theta \\
&\quad + \left(Q_{12}-Q_{22}+2Q_{66}\right)\sin^3\theta\cos\theta \\
\bar{Q}_{26} &= \left(Q_{11}-Q_{12}-2Q_{66}\right)\sin^3\theta\cos\theta \\
&\quad + \left(Q_{12}-Q_{22}+2Q_{66}\right)\sin\theta\cos^3\theta
\end{aligned} \tag{9}
$$

次に，積層板は完全剛に接着されている状態を仮定（古典的積層理論）すると，図−3 に示す積層に対して板厚方向に積分することで，等価な異方性板としての構成則が得られる.



図−3　積層順序と記号

$$
\begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_x \\ \bar{\sigma}_y \\ \bar{\sigma}_{xy} \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^{N} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_x \\ \bar{\sigma}_y \\ \bar{\sigma}_{xy} \end{Bmatrix} dz
$$

$$
= \left[A_{ij}\right] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} + \left[B_{ij}\right] \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ 2\kappa_{xy} \end{Bmatrix} \tag{10}
$$

$$
\begin{Bmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_x \\ \bar{\sigma}_y \\ \bar{\sigma}_{xy} \end{Bmatrix} z\,dz = \sum_{k=1}^{N} \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_x \\ \bar{\sigma}_y \\ \bar{\sigma}_{xy} \end{Bmatrix} z\,dz
$$

$$
= \left[B_{ij}\right] \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ 2\varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} + \left[D_{ij}\right] \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ 2\kappa_{xy} \end{Bmatrix} \tag{11}
$$

ここに，(n_x, n_y, n_{xy}) は面内合応力，(m_x, m_y, m_{xy}) は合応力としての曲げモーメント及びねじりモーメントである．A_{ij}, B_{ij}, D_{ij} (i, j =1, 2, 6) は，積層板としての面内剛性，面内と曲げの連成剛性，曲げ剛性を意味する．

$$
\begin{aligned}
\left[A_{ij}\right] &= \sum_{k=1}^{N} \left(\bar{Q}_{ij}\right)_k \left(z_k - z_{k-1}\right) \\
\left[B_{ij}\right] &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N} \left(\bar{Q}_{ij}\right)_k \left(z_k^2 - z_{k-1}^2\right) \\
\left[D_{ij}\right] &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^{N} \left(\bar{Q}_{ij}\right)_k \left(z_k^3 - z_{k-1}^3\right)
\end{aligned} \tag{12}
$$

式(10)と式(11)をまとめて剛性成分を書き下せば，積層複合板の構成則が座屈前平衡状態においては曲げを伴わないとして式(13a)，線形成分については式(13b), 非線形成分については式(13c)として得られる. ただし, 上付きの E は，座屈前平衡状態を表している.

$$
\begin{Bmatrix} n_x^E \\ n_y^E \\ n_{xy}^E \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^E \\ \varepsilon_y^E \\ 2\varepsilon_{xy}^E \end{Bmatrix} \tag{13a}
$$

$$
\begin{Bmatrix} n_x^d \\ n_y^d \\ n_{xy}^d \\ m_x^d \\ m_y^d \\ m_{xy}^d \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{12} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^d \\ \varepsilon_y^d \\ 2\varepsilon_{xy}^d \\ \kappa_x^d \\ \kappa_y^d \\ 2\kappa_{xy}^d \end{Bmatrix} \tag{13b}
$$

$$
\begin{Bmatrix} n_x^{dd} \\ n_y^{dd} \\ n_{xy}^{dd} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^{dd} \\ \varepsilon_y^{dd} \\ 2\varepsilon_{xy}^{dd} \end{Bmatrix} \tag{13c}
$$

⑷ 座屈前平衡状態

x方向に軸圧縮荷重P のもとで両端に剛な載荷板で圧縮した状態を考えると次式のように理想的な膜応力状態として近似できる．

$$
\left(n_x^E,\ n_y^E,\ n_{xy}^E\right) = \left(-\sigma t,\ 0,\ 0\right) \tag{14}
$$

ここで, σはシェル断面に作用する単位面積当たりの平均圧縮力$\sigma = P/(2\pi Rt)$であり，以下，本研究ではこれを軸圧縮荷重と座屈耐荷力の指標として採用する．尚，座屈前を一様な歪状態として近似的にとらえる座屈解析の方法は多くの研究でその力学的意義も確認されているので [7)-13)]，本研究でもそれを採用すると，屈前平衡状態における歪成分は，次式として書ける．

$$
\left(\varepsilon_x^E, \varepsilon_y^E, \varepsilon_{xy}^E\right) = \left(-\frac{A_{22}\sigma t}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}, \frac{A_{12}\sigma t}{A_{11}A_{22} - A_{12}^2}, 0\right) \tag{15}
$$

⑸ 増分歪エネルギ

線形座屈解析では，トータルポテンシャルエネルギ(以下 TPE)の変位に関する 2 次項Π_2が用いられる [4)]．Π_2のエネルギ成分は以下のように分解できる．

$$
\Pi_2 = U_{2m} + U_{2b} + V_{2m}^x + V_{2m}^y \tag{16}
$$

$$
U_{2m} = U_{2mm} + U_{2mb} \tag{17a}
$$

$$
U_{2mm} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi R}\int_0^L \left(n_{xm}^d \varepsilon_x^d + n_{ym}^d \varepsilon_y^d + 2n_{xym}^d \varepsilon_{xy}^d\right) dxdy \tag{17b}
$$

$$
U_{2mb} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi R}\int_0^L \left(n_{xb}^d \varepsilon_x^d + n_{yb}^d \varepsilon_y^d + 2n_{xyb}^d \varepsilon_{xy}^d\right) dxdy \tag{17c}
$$

$$
U_{2b} = U_{2bm} + U_{2bb} \tag{18a}
$$

$$
U_{2bm} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi R}\int_0^L \left(m_{xm}^d \kappa_x^d + m_{ym}^d \kappa_y^d + 2m_{xym}^d \kappa_{xy}^d\right) dxdy \tag{18b}
$$

$$
U_{2bb} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi R}\int_0^L \left(m_{xb}^d \kappa_x^d + m_{yb}^d \kappa_y^d + 2m_{xyb}^d \kappa_{xy}^d\right) dxdy \tag{18c}
$$

$$
V_{2m}^x = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi R}\int_0^L \left(n_x^E \varepsilon_x^{dd} + n_x^{dd} \varepsilon_x^E\right) dxdy \tag{19}
$$

$$
V_{2m}^y = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi R}\int_0^L \left(n_y^E \varepsilon_y^{dd} + n_y^{dd} \varepsilon_y^E\right) dxdy \tag{20}
$$

ここに，U_{2bb}は曲げ歪エネルギ，U_{2mm}は面内歪エネルギ，U_{2bm}，U_{2mb}は非対称効果によって生じる曲げと面内の連成エネルギ，V_{2m}^x は軸方向非線形面内歪エネルギ，V_{2m}^y は周方向の非線形面内歪エネルギである．

⑹ 座屈方程式

本研究ではTPE の停留原理を採用する．線形座屈条件式は, TPE の 2 次項(式(16))の変分をゼロとする式(21)として記述できる．

$$
\delta\Pi_2 = \delta(U_{2b} + U_{2m} + V_{2m}^x + V_{2m}^y) = 0 \tag{21}
$$

それぞれのエネルギ成分を式(21)に代入することで，座屈方程式は次式として変形できる．

$$
\delta\left[U_{2b} + U_{2m} + \sigma_c\left(\frac{\partial V_{2m}^x}{\partial\sigma} + \frac{\partial V_{2m}^y}{\partial\sigma}\right)\right] = 0 \tag{22}
$$

式(22)について, 固有解析を実施すれば線形座屈値としてσ_c が求められる．

⑺ 軸対称座屈解

座屈解の基本的な解として，等方性円筒シェルでは，式(3)での周方向波数を $i = 0$ としたときのいわゆる「軸対称座屈解」が良く知られている．そこで本研究で対象とした積層円筒シェルの場合についても，式(3)で $i = 0$ とした解析を実施する．すなわち，変位関数は次式とする．

$$
\begin{aligned}
u &= u_{0,j}\cos\left(\frac{j\pi}{L}x\right) \\
v &= 0 \\
w &= w_{0,j}\sin\left(\frac{j\pi}{L}x\right)
\end{aligned} \tag{23}
$$

式(23)の変位関数を用いて計算を行うと, TPE の変位に関する 2 次項Π_2は振幅 $u_{0,j}$，$w_{0,j}$の関数として表される. 式(24)の停留条件式を用いると 2 元連立 1 次方程式として座屈方程式を得る．

$$
\frac{\partial\Pi_2}{\partial u_{0,j}} = 0 \quad , \quad \frac{\partial\Pi_2}{\partial w_{0,j}} = 0 \tag{24}
$$

座屈方程式の固有値解として，座屈解$\sigma_{0,j}^c$ が次式のようなjの 2 乗の関数として与えられる．

$$
\sigma_{0,j}^c = \frac{1}{t}\left(D_{11} - \frac{B_{11}^2}{A_{11}}\right)\left(\frac{j\pi}{L}\right)^2 + \frac{1}{R^2 t}\left(A_{22} - \frac{A_{12}^2}{A_{11}}\right)\left(\frac{L}{j\pi}\right)^2 + \frac{2}{Rt}\left(-B_{12} + \frac{A_{12}B_{11}}{A_{11}}\right) \tag{25}
$$

式(25)において座屈解$\sigma^{c}_{0,j}$がjに対して最小値をとるとき，座屈解を軸対称座屈解σ_s，軸対称座屈解を与えるときの軸方向半波数j_sが次式で求められる．

$$\sigma_s = \frac{2}{Rt}\left[\frac{1}{A_{11}}\sqrt{\left(A_{11}A_{22}-A_{12}^2\right)\left(A_{11}D_{11}-B_{11}^2\right)} + B_{11}\frac{A_{12}}{A_{11}} - B_{12}\right] \tag{26}$$

$$j_s = \frac{L}{\pi}\left(\frac{1}{R^2}\frac{A_{11}A_{22}-A_{12}^2}{A_{11}D_{11}-B_{11}^2}\right)^{\frac{1}{4}} \tag{27}$$

4.2 RS 解析法

RS 解析法は初期不整による座屈耐荷力の低下は，初期不整によって生ずるモードのカップリングによって，正の面内歪エネルギ成分が減少（損失）するという理論に立脚する．

過去の研究における RS 法では，式(17)～式(20)に示されるエネルギ成分のうち，曲げ歪エネルギU_{2bb}と線形面内歪エネルギU_{2mm}並びに線形化された周方向歪エネルギとV^y_{2m}はともに正であるが，線形化された軸方向歪エネルギV^x_{2m}は負となり，座屈を促進させる効果はV^x_{2m}が担っている[5]ことから次式を採用し RS 座屈値σ^*_cを求めている[4),8)-13)]．ただし，式(28)における RS 方程式では式(12)の積分の性質上，U_{2b}の中に連成エネルギU_{2bm}は含まれていない．

$$\delta\left[U_{2b} + \sigma^*_c\left(\frac{\partial V^x_{2m}}{\partial \sigma}\right)\right] = 0 \tag{28}$$

文献 14 では対称積層について，エネルギ成分を分析し，等方性シェルの場合と同様に，U_{2mm}とV^y_{2m}が正でV^x_{2m}は負であることを確認している．非対称積層の場合には，曲げと面内の連成エネルギU_{2mb}とU_{2bm}が新たな分析対象となる．こうした分析は従来の研究では行われていない．

5. 解析モデル

本研究では既往の等方性円筒シェルの座屈実験や非線形解析の研究でしばしば採用されている形状係数[5]である次式の値を採用する．これにより，本研究のような異方性材料を積層したものと等方性の場合の座屈性状との対応の確認も可能としている．

$$\frac{L}{R} = 0.512 \quad , \quad \frac{R}{t} = 405 \tag{29}$$

積層板を構成する繊維と樹脂の材料定数，及び繊維含有率は既往の研究での採用値を参考に式(30)とした[6),7)]．

$$\begin{aligned} E_F &= 72\mathrm{GPa} \quad , \quad \mu_F = 0.22 \quad , \quad V_F = 0.5 \\ E_P &= 3.5\mathrm{GPa} \quad , \quad \mu_P = 0.34 \quad , \quad V_P = 0.5 \end{aligned} \tag{30}$$

表－1 に本研究で具体的に採用した積層構成をリストしているが，実用上に配慮し既往の研究[4)]でのクロスプライ積層やアングルプライ積層を参考にして，代表的なものを選択した．上から 3 種類の積層構成が対称積層で，残りは全て非対称積層である．

積層数が増加するとより均質化するため，従来の等方性シェルに類似した座屈性状に移行していくことが知られている[2)]ので，本研究では表－1 のように 6 層のモデル化としているが，実際には，例えば$[\theta,\theta,\theta,\theta,\theta,\theta]$は 1 層，$[\theta,\theta,\theta,0°,0°,0°]$は 2 層，$[\theta,0°,0°,0°,0°,\theta]$は 3 層，$[\theta,0°,0°,\theta,0°,0°]$は 4 層を意味する．表－1 で，例えば$[\theta,0°,0°,\theta,0°,0°]$と表記したものは，シェルの外層の繊維配向角が$\theta$で，順次$0°,0°,\theta,0°,0°$の順でシェル板厚方向に積層した構成となっていることを意味している．

尚，ラミナの厚さは，現状の FRP 材料での標準的な値として全て 1mm としたので，いずれのシェルの場合もシェル厚は 6mm である．

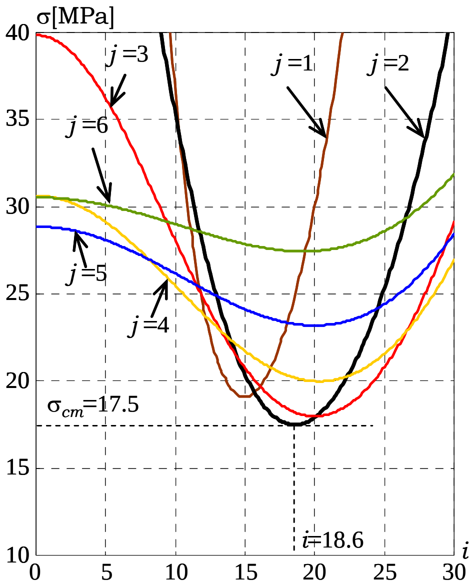
表－1　積層構成と表記

	積層構成 (中央面 → z)	表記 (中央面 → z)
対称積層	θ | θ | θ ¦ θ | θ | θ	[θ, θ, θ, θ, θ, θ]
対称積層	θ | 0° | 0° ¦ 0° | 0° | θ	[θ, 0°, 0°, 0°, 0°, θ]
対称積層	0° | 0° | θ ¦ θ | 0° | 0°	[0°, 0°, θ, θ, 0°, 0°]
非対称積層	θ | θ | θ ¦ 0° | 0° | 0°	[θ, θ, θ, 0°, 0°, 0°]
非対称積層	0° | 0° | 0° ¦ θ | θ | θ	[0°, 0°, 0°, θ, θ, θ]
非対称積層	θ | 0° | 0° ¦ 0° | 0° | 0°	[θ, 0°, 0°, 0°, 0°, 0°]
非対称積層	0° | 0° | 0° ¦ 0° | 0° | θ	[0° 0°, 0°, 0°, 0°, θ]
非対称積層	θ | 0° | 0° ¦ θ | 0° | 0°	[θ, 0°, 0°, θ, 0°, 0°]
非対称積層	0° | 0° | θ ¦ 0° | 0° | θ	[0°, 0°, θ, 0°, 0°, θ]

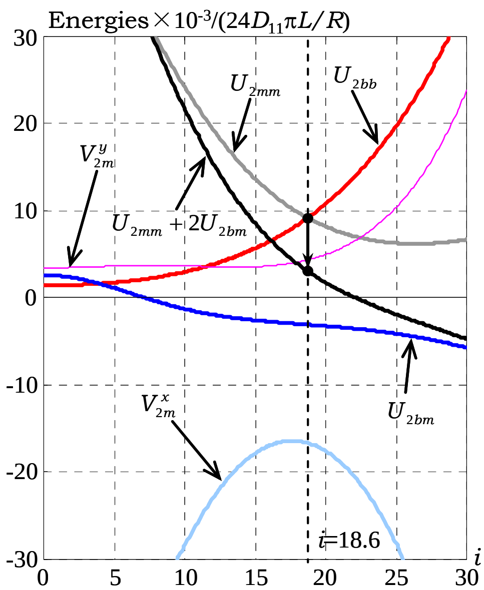
6. エネルギ分析

図－4 に非対称積層$[45°,45°,45°,0°,0°,0°]$の線形座屈耐荷力スペクトルを示す．横軸は周方向波数i，縦軸は座屈耐荷力σ[MPa]である．線形座屈解析では軸方向半波数jごとにスペクトル状に値を求めてプロットし，それぞれの最小値を$\sigma_{cm,j}$とする．その際，周方向波数iについては，対象とした解析モデルでは整数値とするべきであるが，実際のシェルでは，種々の波数成分の複合である初期不整を有することから，見かけ上，連続量として考えた波数から逆算して得られる座屈波

長の成分が卓越することが実験的には観察される [15].本解析でも周方向波数 i は連続量として扱う. $\sigma_{cm,j}$ の中で j に関して最小値を線形座屈値 σ_{cm}, このときのモードを $(i, j) = (i_{cm}, j_{cm})$ と定義した. 座屈点は, 周方向波数 i=18.6, 軸方向半波数 j=2 で σ_{cm} =17.5[MPa]である. 図－4 の線形座屈値 σ_{cm} をとる軸方向半波数 j=2 については黒色実線で表している. 図－5 には, 図－4 と同積層のエネルギスペクトル(j=2 波)を示す. 横軸は周方向波数 i, 縦軸は正規化された各エネルギである. 既往の等方性や対称積層円筒シェルの研究と同様に, 曲げ歪エネルギ U_{2bb} や面内歪エネルギ U_{2mm}, 非線形面内歪エネルギ周方向成分 V_{2m}^{y} については正値, 非線形面内歪エネルギ軸方向成分 V_{2m}^{x} については負となる. 一方,



図－4　線形座屈耐荷力スペクトル



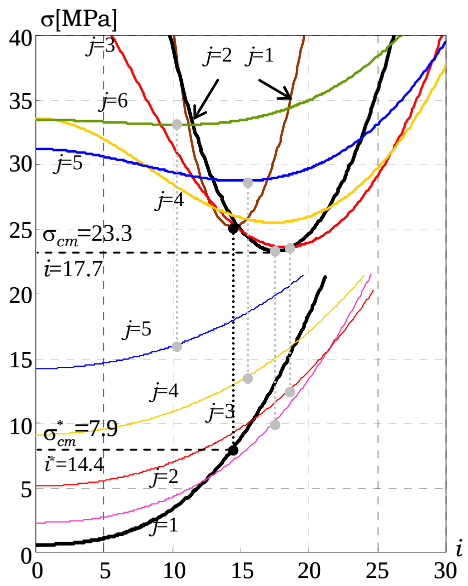
図－5　エネルギスペクトル(j=2)

積層の非対称積層効果によって生じる曲げと面内の連成エネルギ U_{2bm} は周方向波数 i に対して, 正負が一様に定まらない. しかし, 座屈点(i=18.6)において U_{2bm} は負であり, 座屈を促進させる方向へ働くことがわかる. 既往の研究 [5] では, 等方性円筒シェルに対して非線形座屈解析を実施するとともにエネルギ分析を実施し, U_{2mm} と V_{2m}^{y} は軸方向振幅に対し早期に減少し, 座屈点では小さくなることが示されている. 図－5 に示されるように連成エネルギ U_{2bm} は U_{2mm} を減少させる成分として考えられる. 積層構成を非対称にすることで, 対称積層の場合には派生しない曲げと面内の連成エネルギ成分は負であり, 座屈を促進させる寄与成分となっていることから, 非対称積層を含めた積層円筒シェルに対しては, 次式の RS 方程式により RS 値を算定する.

$$\delta\left[U_{2bb} + \sigma_c^{*}\left(\frac{\partial V_{2m}^{x}}{\partial \sigma}\right)\right] = 0 \tag{31}$$

7. 解析結果

図－6 に線形座屈解析と RS 解析の解析結果例として, 非対称積層 [45°, 0°, 0°, 45°, 0°, 0°] の線形・RS 座屈耐荷力スペクトルを示す. 横軸は周方向波数 i, 縦軸は線形座屈耐荷力 σ_c, および RS 座屈耐荷力 σ_c^{*} である. 座屈点は周方向波数 i=17.7, 軸方向半波数 j=2 で σ_{cm} =23.3[MPa]である. RS 座屈解析においては, 各軸方向半波数の線形最小値 $\sigma_{cm,j}$ の(i, j)に対する RS 値を $\sigma_{cm,j}^{*}$ とし, その中で j に関して最小値を RS 座屈値 σ_{cm}^{*} とし, 本研究ではこれを下限値と定義した. 図－6 における RS 座屈値は, i=14.4, j=1 で σ_{cm}^{*} =7.9[MPa]となる.



図－6　線形・RS座屈耐荷力スペクトル

図－7 に対称積層構成における繊維配向角と座屈耐荷力の関係を示す．横軸は繊維配向角θ，縦軸は座屈耐荷力σを表している．黒色太線は線形座屈値σ_{cm}，各種黒色線は各軸方向半波数jの線形最小値$\sigma_{cm,j}$を表す．灰色太線はRS解析値σ^*_{cm}，各種灰色線は各軸方向半波数jの RS 最小値$\sigma^*_{cm,j}$を表している．また，プロットは文献14に示されている非線形座屈解析の数値実験結果で，初期不整振幅が小さいほうから○△□の順で表記している．図－7 各図から対称積層では，非線形座屈解析の下限値と RS 値は概略一致していることから，RS 解析で与えられる RS 値は座屈下限予測値を与えているといえる．初期不整振幅がシェル厚と同程度の場合には，図－7(b),(c)でみられるように，線形座屈値の 5%ほど，RS 値よりも小さな非線形座屈値を示しているものもある．こうした現象は，初期不整が大きくなると座屈前の応力分布に，一様膜応力解よりも部分的に大きな応力値の領域が出現し，その効果で非線形座屈値が RS 値よりも低くなることもあることがわかっており [8]，今回の解析でもその傾向が一部に現れたと解釈できる．しかしながら総合的にみれば，積層円筒シェルについても RS 解析を適用することで，座屈下限予測が可能であるといえる．

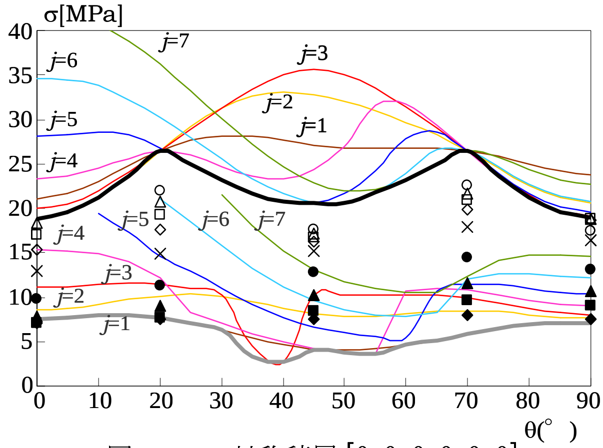
一方，図－8 には非対称積層構成の繊維配向角と座屈耐荷力の関係を示した．図－7 と同様に黒色太線は線形座屈値σ_{cm}，灰色太線は RS 解析値σ^*_{cm} を表している．ここで，RS 解析値と線形座屈解析値の比を本研究では「座屈耐荷力低減係数（以下，低減係数と呼ぶ）」と定義する．繊維含有率を一定としたままで，繊維配向角を変化させると，線形座屈値は繊維パターンに応じて以下の特徴的な変化特性に分類できた．

図－7 (a)，図－8 (b)の場合，繊維配向角 45°前後では軸対称座屈モードとなる．また，20°や 70°では線形座屈解析値は高い値を示している．図－7 (a)では，繊維配向角 35°～60°で低減係数は 0.2 以下で非常に小さく，初期不整による座屈耐荷力の低下が特に大きい．図－8 (b)では，低減係数はほぼ0.3～0.5の間にあり，90°では初期不整による座屈耐荷力の低下が最も小さい．

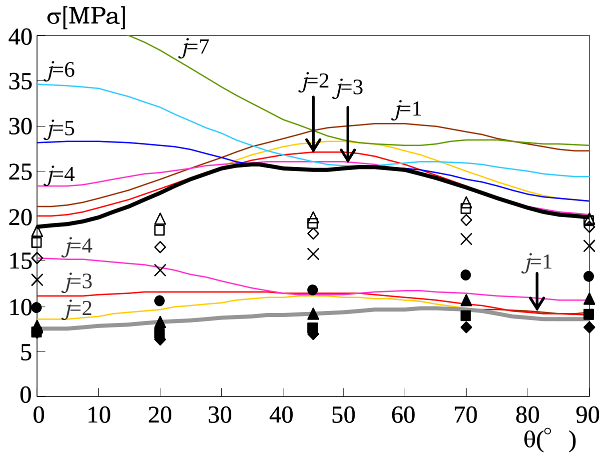
図－7 (b)，図－8(d)，図－8(f)では，線形座屈解析では繊維配向角 45°前後で解析値は大きく軸対称座屈モードとなる．これらの場合，低減係数は繊維配向角に対して 0.3～0.4 の間を分布している．

図－7 (c)，図－8 (a)，図－8 (e)では，線形座屈解析値は繊維配向角 45°前後で最大となる．低減係数は，ほぼ 0.3～0.4 の範囲にあり，繊維配向角 45°で低減係数は最小となることから，そこでの初期不整の影響は最も大きくなると予想できる．

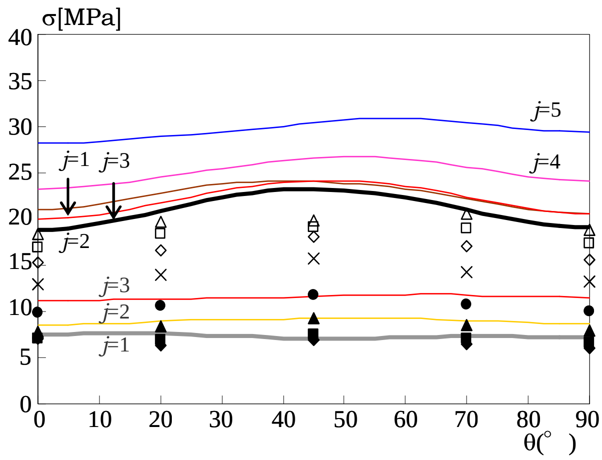
図 8－(c)のように，繊維配向角の変化に対して両座屈解析値に大きな差はなく，低減係数は 0.35～0.4 のほぼ一定に分布している．



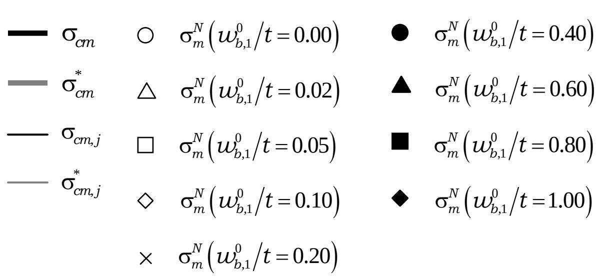
図－7(a)　対称積層 [θ, θ, θ, θ, θ, θ]

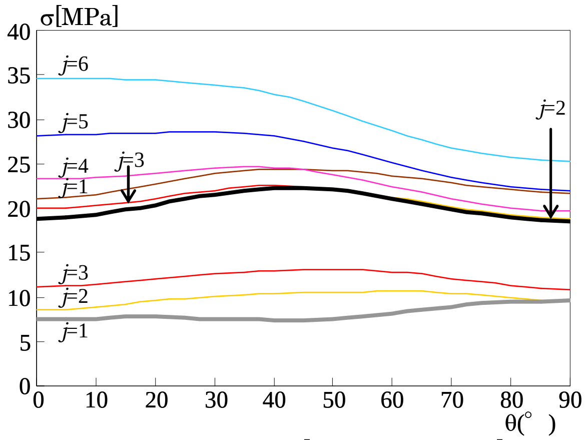


図－7(b)　対称積層 [θ, 0°, 0°, 0°, 0°, θ]

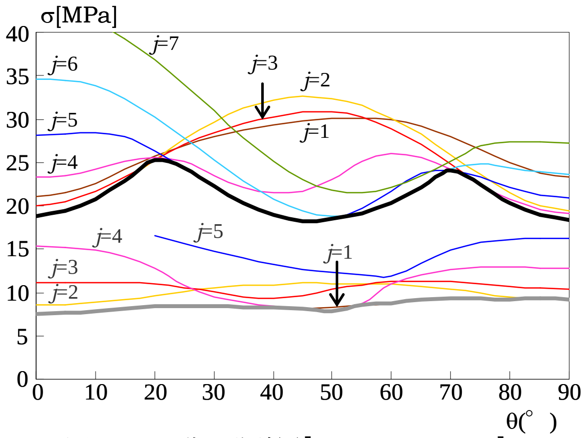


図－7(c)　対称積層 [0°, 0°, θ, θ, 0°, 0°]

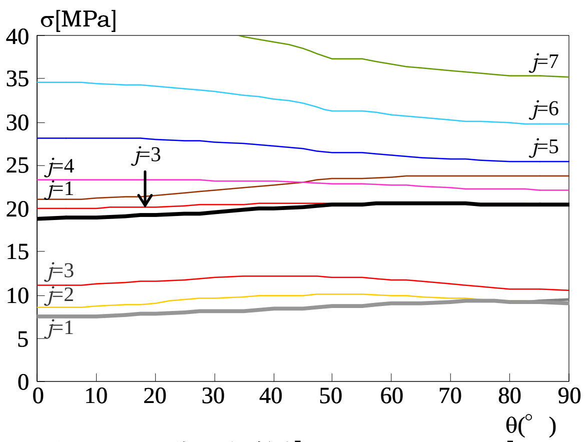




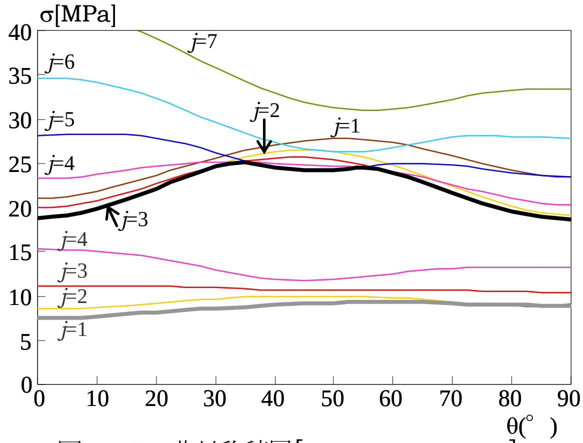
図−8(a)　非対称積層[θ, θ, θ, 0°, 0°, 0°]



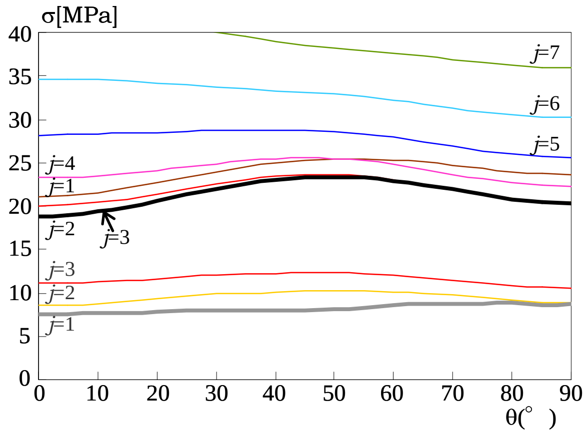
図−8(b)　非対称積層[0°, 0°, 0°, θ, θ, θ]



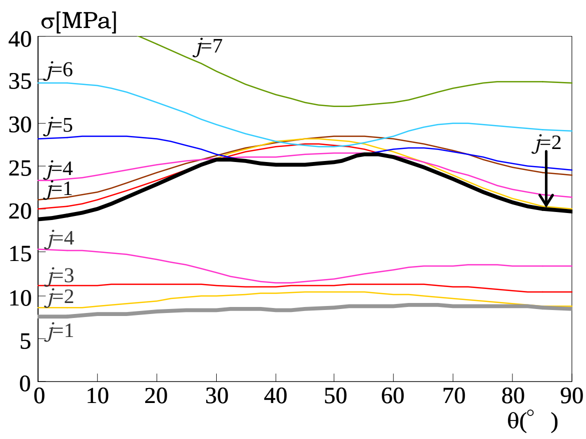
図−8(c)　非対称積層[θ, 0°, 0°, 0°, 0°, 0°]



図−8(d)　非対称積層[0°, 0°, 0°, 0°, 0°, θ]



図−8(e)　非対称積層[θ, 0°, 0°, θ, 0°, 0°]



図−8(f)　非対称積層[0°, 0°, θ, 0°, 0°, θ]

図−7 の対称積層構成も含め, 非対称積層構成においても積層構成と繊維配向角によって, 初期不整の影響が大きく異なることがわかる. 線形座屈値が示す最適繊維配向角と RS 解析値が示す最適繊維配向角は大きく異なる場合があり, 従来の機械分野で研究された線形座屈解析からの最適繊維配向角の決定法では, 初期不整敏感性が増大する可能性があり危険側評価となる場合がある.

RS 解析結果に注目すると, 繊維配向角に対して, RS 座屈値が軸方向半波数 j=1 波でとる場合が多く, どの積層構成においても繊維配向角 0°と 90°では座屈耐荷力は大きくなることがわかる. すなわち, RS 解析からの最適繊維配向角を使用することで, 初期不整を考慮し, より安全側な座屈設計を行うことが期待される.

8. 結論

本研究では，軸圧を受ける積層円筒シェルについて，線形座屈解析とその拡張としてのＲＳ解析を実施し，次のことを明らかにした．

1) 積層構成を非対称にすると，対称積層の場合には派生しない曲げと面内の連成剛性によって，新たに負のエネルギ成分が生じ，それらは座屈を促進させる寄与をなすことがわかった．
2) 繊維含有率を一定としたままで，繊維配向角を変化させると，線形座屈値は繊維パターンに応じていくつかの特徴的な変化特性に分類でき，それにより最適配向角を定めることはできるが，その初期不整敏感性が増大する傾向にある．
3) 単純な線形座屈解析をもとに決定される最適配向角に対しては，初期不整による座屈耐荷力の減少を予め見込んだＲＳ解析により，それらを修正する必要があり，座屈設計上は軸方向に半波数１のモードに対するＲＳ値に注目する必要がある．

以上，本研究によって，従来明らかにされていなかった非対称積層を含む積層円筒シェルの座屈耐荷力の基本的な特性を解析する手法とそれから得られる特性の基本性状を明らかにできたと考える．RS 解析結果を弾塑性座屈下限値評価に利用する理論の提案が既になされている [16,17]ので，そうした考え方に本研究で示した方法を融合することで，例えば，薄肉貯槽の鋼壁体をＦＲＰで積層補強 [18]した際の補強後のシェル壁体の座屈安全性照査などの今後の研究課題に，さらなる展開も期待される．

参考文献

1) 山田聖志：シェル構造の振動と座屈の基礎(2)－座屈編－, 機械の研究, 60 巻, 2 号, pp.279-286, 2008.
2) 土木学会構造工学委員会：ＦＲＰ橋梁－技術とその展望－，土木学会，2004.
3) Yamada, S. and Nishizaki, I.: Research and construction developments on hybrid application of FRP to bridges in Japan, CD-ROM Proceedings of the JSCE-KSCE-CICHE/TCI Joint Seminar on Hybrid Structures, Tokyo, 2007.
4) 日本機械学会：シェルの振動と座屈ハンドブック，技報堂出版，2002.
5) Yamada, S. and Croll J. G. A. : Contributions to understanding the behavior of axially compressed cylinders，*Journal of Applied Mechanics*，ASME，Vol.66，pp.299-309，1999.
6) 三木光範，福田武人，元木信弥，北条正樹：機械システム入門シリーズ　複合材料，共立出版株式会社，1997
7) Jones, R. M. : *Mechanics of Composite Materials*，2nd Ed., Taylor & Francis，1999.
8) Yamada, S. and Croll, J. G. A. : Buckling and post-buckling characteristics of pressure-loaded cylinders，*Journal of Applied Mechanics*，ASME，Vol.60，pp.290-299，1993.
9) 山田聖志：軸圧円筒殻の座屈問題へのＲＳ法適用に関する非線形解析的検討，日本機械学会論文集，A 編，64 巻，619 号，pp.221-228，1998
10) Batista, R. C. and Croll, J. G. A. : A design approach for axially compressed unstiffened cylinders，*Stability Problems in Engineering Structures and Components*，Applied Science，London，1979
11) Croll, J. G. A. : Towards a rationally based elastic-plastic shell buckling design methodology，*Thin-walled Structures*，Vol.23，pp.67-84，1995
12) 山田聖志：座屈前に幾何学的非線形性を有するシェル構造物へのＲＳ法の適用，日本建築学会構造系論文集，No.390，pp.88-97，1988
13) Yamada, S. and Croll J.G. A. : Buckling behavior of pressure loaded cylindrical panels，*Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol.115, pp.327-344, 1989
14) Matsumoto, K., Yamada, S., Wang, H.T. and Croll, J.G.A: Buckling and reduced stiffness criteria for FRP cylindrical shells under compression, *Proceedings of Asia-Pacific Conference on FRP in Structures*, APFIS, IFC, Vol.1, pp.465-470, 2007.
15) Singer, J., Arbocz, J. and Weller, T.: *Buckling Experiments*, John Wiley & Sons, Inc., Vol.2, 2002.
16) Croll, J.G.A.: Lower bound elasto-plastic buckling of cylinders, *Proc. Instn Civil Engrs*, Part 2, Vol.71, pp.235-261, 1981.
17) Kawamoto, Y. and Yuhara, T.: Buckling of fabricated ring-stiffened steel cylinders under axial compression, *Int. Conf. on Advances in Marine Structures*, pp.262-280, 1986.
18) Batikha, M., Chen, J.F. and Rotter, J.M.: Elastic buckling of FRP-strengthened cylinders with axisymmetric imperfections, *Proc. of Asia-Pacific Conf. on FRP in Structures*, APFIS, Vol.2, pp.1099-1103, 2007.

（2008 年 9 月 18 日受付）