

空間柔ケーブルによる非抗圧膜構造モデルの有限変位解析

Large displacement analysis of compression-free membrane structures modeled by elastic-catenary cables

井嶋克志*, 帯屋洋之**, 川崎徳明***
Katsushi Ijima, Hiroyuki Obiya, Noriaki Kawasaki

*工博, 佐賀大学教授, 理工学部都市工学科 (〒840-8502 佐賀市本庄 1 丁目)

**工博, 佐賀大学准教授, 理工学部都市工学科 (〒840-8502 佐賀市本庄 1 丁目)

***佐賀大学技術職員, 理工学部都市工学科 (〒840-8502 佐賀市本庄 1 丁目)

During construction of membrane structures, the structures change the shape considerably and both of slack and tense area intermingle in the structures. The paper proposes a frame unit mainly composed by elastic-catenary cables that can simulate the large displacement behavior of compression-free membrane. The frame unit possesses nearly equivalent strain energy to the uniform strain element in the tense state, and keeps tensile field in the slack state. When a membrane structure is modeled in the frame units composed by cables with positive stiffness, the Newton-Raphson's method gives the equilibrium solution after large displacement by not many times of iteration under stable convergence.

Key Words: Finite displacement, membrane structure, compression-free model, elastic-catenary cable

キーワード: 有限変位, 膜構造, 非抗圧モデル, 弾性カテナリーケーブル

1. まえがき

膜構造物は軽量であるとともに収納性や展開性に優れているため, 大空間ドームなどの大規模膜構造物から膜面アンテナなどの宇宙構造物にまで幅広く利用されている. 膜構造物は主に張力によりその形態を維持し, 曲げ剛性は非常に小さいため仮設時には弛緩から緊張まで大変位とともに膜状態は大きく変化する. この現象を解析できれば施工時の安全性や効率性を高めることになるものの, 現状では 2 軸弛緩を含む膜状態を計算できる合理的な解析手法は見当たらないようである.

膜構造の非線形解析に関する研究の多くは, 2 次元有限要素を用いた膜内に部分的に発生する皺解析が中心である. その解析手法は張力場理論による手法と座屈分岐解析に分けられる. 張力場理論は皺発生時に圧縮軸剛性をゼロとする方法^{1), 2), 3)}が用いられ, 座屈分岐解析に比べ容易に解を得る. しかし, 常に要素内 1 軸は張力である条件から, 解析は皺発生領域とその方向に限定され, 膜構造の面外変位を求めることはできない. 最近では張力場理論により 1 軸引張状態のまま面外変位を試みる研究⁴⁾もある. 一方, 僅かな曲げ剛性のもとにシェル要素により座屈分岐解析を行う手法は最小ポテンシャルエネルギー解を常に追跡できれば高精度の皺形状を得る. しかし, シェル構造の持つ多様な分岐現象か

ら座屈形状を得るには多大の計算を必要とする. 最近ではランダムな初期不整から動的緩和法の利用^{5), 6)}や, Newton-Raphson 法と動的緩和法の併用⁷⁾による計算量の削減が図られているものの, 構造規模が大きくその曲げ剛性が無視できる膜構造に用いるには合理的とは言えないように思える.

膜材の僅かな曲げ剛性を無視するとき弛緩状態を含めて張力場のみとなり, 膜全体構造のエネルギー曲面は常に唯一の極値を持つ凸曲面と推測できる. したがって, 膜状態の正確な接線剛性を用いるならば少ない反復計算により平衡解を得ると考えられる. 本研究はこの張力場理論の利点を活用し, 弛緩域を含む大変位形状を容易に解析できる手法を示している.

張力場理論に用いられる定ひずみ三角形膜要素の形状と要素剛性方程式に基づき, 6 本の軸力部材による骨組形状と各部材剛性を適切に定めれば定ひずみ要素と完全に等価にできる. これを非抗圧膜モデルに応用し, 骨組の全部あるいは一部を柔ケーブルに置換すれば, 緊張時は定ひずみ要素の剛性方程式にほぼ等しい挙動を示し, 既存張力場理論が表現できない 2 軸弛緩状態も常に張力場での解を得る. すなわち, 弛緩した膜曲面形状を求めることは非常に困難であるが, 膜自重に等価とするケーブル骨組により自重による張力を主とした弛緩状態を平衡条件により解析可能とするものである. 以下,

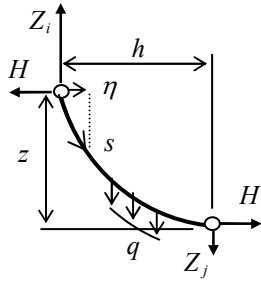


図-1 平面ケーブル

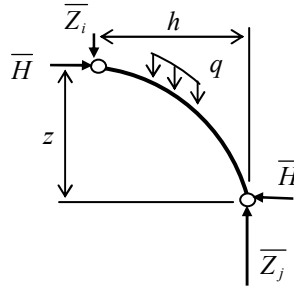


図-2 負剛性ケーブル

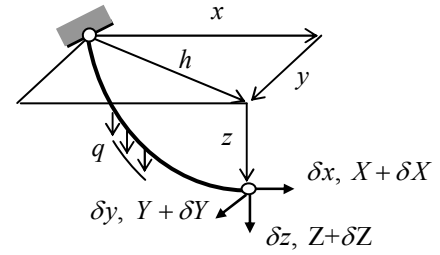


図-3 空間ケーブル

膜要素を近似するケーブルや軸力部材による骨組をケーブルユニットと呼び、ユニットを構成する弾性カテナリーケーブルの理論を最初に示し、このケーブルを用いた膜モデルを論じている。

2. 空間弾性カテナリーケーブル理論

非抗圧膜モデルに空間弾性カテナリーケーブルを使用する。ケーブル系構造物に関する既存の研究は、3次元空間問題に弾性カテナリーケーブルを用いたものは少なく⁸⁾、軸力部材によるモデル化⁹⁾あるいは曲線要素^{10), 11)}が一般的なようである。ここでは、軸圧縮力発生のおそれなく、要素分割も細かくする必要のない弾性カテナリーケーブルを膜モデルに用いることとする。

本論では、有限要素法によるケーブル解析¹⁰⁾の検証にも用いられた文献¹²⁾の平面弾性カテナリーケーブルを3次元に展開して使用する。膜モデルには負の伸び剛性を有するケーブルも用いるため、平面ケーブルから示すこととする。この負剛性ケーブルは正剛性のそれと同様に曲げ剛性を持たず、張力が発生することなくケーブルの伸びとともに圧縮力が増大する部材である。

2.1 平面ケーブルの状態量と接線剛性方程式¹²⁾

弾性カテナリーケーブルは無応力時単位長重量 q_0 、伸び剛性 EA_c および無応力長 l_0 をその属性として有する。図-1のように鉛直面内にケーブル両端位置が定まるとき、分布自重 q は一樣であると仮定し、分布自重とケーブル長 l_c との積に $ql_c = q_0 l_0$ が成り立つ。この仮定よりカテナリー理論を適用でき、ケーブル長およびケーブル両端支持力は次のように表される。

$$l_c = \sqrt{z^2 + h^2 \sinh^2 \psi / \psi^2} \quad (1)$$

$$H = \frac{qh}{2\psi} \quad (2)$$

$$Z_i = \frac{qz}{2} \coth \psi + \frac{ql_c}{2}, \quad Z_j = \frac{qz}{2} \coth \psi - \frac{ql_c}{2} \quad (3a, b)$$

ここに、 ψ はケーブル状態量や接線幾何剛性方程式を決定付けるパラメータであり、次のように求める。

張力によるケーブル伸び量は伸び剛性を用いて次のように表される。

$$\Delta l_c = \int_0^h \frac{H}{EA_c} \frac{l_0}{l_c} \frac{ds}{d\eta} ds = \frac{Hhl_0}{2EA_cl_c} \left(1 + \frac{l_c^2 + z^2}{h^2} \psi \coth \psi \right) \quad (4)$$

式(2)、(4)および $\Delta l_c = l_c - l_0$ から ψ が満足すべき式は次式となる。

$$f(\psi) = l_c^2(l_c - l_0) - \frac{q_0 h^2 l_0^2}{4EA_c} \left(\frac{1}{\psi} + \frac{l_c^2 + z^2}{h^2 \tanh \psi} \right) = 0 \quad (5)$$

式(1)と(5)を満たす ψ を求め、これを式(2)、(3)に代入すればケーブル端力を得る。

図-1の状態からケーブル両端の微小変位に伴い、支点間水平距離 h および鉛直距離 z それぞれに微小増分 δh 、 δz が生じるものとする。これに伴う張力水平成分およびケーブル端支持力鉛直成分それぞれの微小増分 δH 、 δZ は式(1)~(4)を微分することにより求めることができ、次の接線幾何剛性方程式を得る。

$$\begin{Bmatrix} \delta H \\ \delta Z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_H & k_{HZ} \\ k_{HZ} & k_Z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta h \\ \delta z \end{Bmatrix} \quad (6)$$

ここに、

$$k_H = \{K_c b(l_c/h) + (H/l_c)(z/h)^2 B\} / C \quad (7a)$$

$$k_{HZ} = \{K_c z l_c / (l_c^2 - z^2) - (H/l_c)(z/h)B\} / C \quad (7b)$$

$$k_Z = \{K_c(l_c/h)(B-b) + (H/l_c)B\} / C \quad (7c)$$

$$C = \frac{K_c l_c}{Ha} + \frac{h}{l_c} \left\{ \frac{1}{a} + \frac{b}{a} \frac{z^2}{h^2} + \left(\frac{l_c^2}{l_c^2 - z^2} \right)^2 \right\} \quad (7d)$$

$$K_c = \frac{EA_c}{l_0}, \quad a = \frac{\sinh \psi}{\psi \cosh \psi - \sinh \psi} \quad (7e, f)$$

$$b = \psi \coth \psi, \quad B = b^2 + \frac{h^2 z^2}{(l_c^2 - z^2)^2} \quad (7g, h)$$

2.2 負剛性ケーブルについて

伸び剛性が負となることはケーブル伸びに伴い圧縮力が増大することを意味し、ひずみエネルギーは負となる。負剛性部材については3.1節にて物理的説明を行うが、負ひずみエネルギーはハミルトンの最小作用の原理から現実には存在し得ないものといえ、非抗圧膜置換モデル上の仮想的部材である。しかし、この負剛性ケーブルについても正剛性ケーブルと全く同様に弾性カテナリー理論を適用できる。

座標軸の方向を変えず図-2に示すようにケーブル端力方向を正剛性のそれから反転させた系を考える。このとき、

$$EA_c = -\overline{EA}_c, \quad H = -\overline{H}, \quad \bar{Z}_{ij} = -\bar{Z}_{ij}, \quad \psi = -\bar{\psi} \quad (8)$$

と置きカテナリー理論を適用すれば、前節の式(3)を除き正剛性ケーブルと等価な式となる。式(3)はケーブル端力鉛直成分の反転により、ケーブル重量の項のみ正負入れ替わった次式となる。

$$\bar{Z}_i = \frac{qz}{2} \coth \bar{\psi} - \frac{ql_c}{2}, \quad \bar{Z}_j = \frac{qz}{2} \coth \bar{\psi} + \frac{ql_c}{2} \quad (9a, b)$$

接線幾何剛性方程式についても、式(8)を式(6)、(7)に代入すれば、負剛性の絶対値を用いた正剛性マトリクスを単に負とすればよいことが分かる。

以上のことから、負剛性ケーブルは伸び剛性の絶対値を用いて正剛性と同一の式によりケーブル端力と接線幾何剛性方程式を求めた後これらを負とする簡単な処理により対応できる。

2.3 空間ケーブルの接線剛性方程式

弾性カテナリーケーブルを3次元空間表示としてその接線幾何剛性方程式を導くことは困難である。しかし、両端位置が定まった空間ケーブルの状態量は合同な鉛直平面ケーブルのそれと同一である。したがって、平面ケーブルの接線幾何剛性方程式のみについて、重力方向軸が平面と同じ3次元空間に展開した接線幾何剛性方程式を求めておけば、空間ケーブルの解析が可能となる。

平面ケーブルと同様 z 軸を重力方向とする図-3を参照し、空間ケーブルの水平面射影線の方法余弦を $\alpha = x/h$, $\beta = y/h$ とすれば、水平面射影長の微小増分 δh は次式のように表すことができる。

$$\delta h = \alpha \delta x + \beta \delta y \quad (10)$$

張力の水平成分 H は X と Y の2方向成分に分けることができ、これらの微小増分は次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} \delta X \\ \delta Y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} \delta H + \begin{Bmatrix} \delta \alpha \\ \delta \beta \end{Bmatrix} H \quad (11)$$

ここに、方向余弦の微小増分は次式となる。

$$\delta \alpha = \delta(x/h) = (\beta^2 \delta x - \alpha \beta \delta y)/h \quad (12a)$$

$$\delta \beta = \delta(y/h) = (-\alpha \beta \delta x + \alpha^2 \delta y)/h \quad (12b)$$

式(10)~(12)を式(6)に使用すれば、空間ケーブルの接線幾何剛性方程式が次のように得られる。

$$\begin{Bmatrix} \delta X \\ \delta Y \\ \delta Z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha^2 k_H + \beta^2 H/h & \alpha \beta (k_H - H/h) & \alpha k_{HZ} \\ & \beta^2 k_H + \alpha^2 H/h & \beta k_{HZ} \\ \text{sym.} & & k_Z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{Bmatrix} \quad (13)$$

式(13)を $\delta \mathbf{X} = \mathbf{k}_c \delta \mathbf{x}$ と表し、共通座標系直交3軸が δx , δy , δz 方向に一致するものとする。ケーブル両端の微小節点変位ベクトルを $\{\delta \mathbf{u}_i, \delta \mathbf{u}_j\}^T$ とすれば $\delta \mathbf{x} = \delta \mathbf{u}_j - \delta \mathbf{u}_i$, 節点力ベクトルの微小増分を $\{\delta \mathbf{U}_i, \delta \mathbf{U}_j\}^T$ とすれば $\delta \mathbf{U}_i = -\delta \mathbf{X}$, $\delta \mathbf{U}_j = \delta \mathbf{X}$ であるから、ケーブル構造物の解析に使用する接線幾何剛性方程式は次式のように表される。

$$\begin{Bmatrix} \delta \mathbf{U}_i \\ \delta \mathbf{U}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_c & -\mathbf{k}_c \\ -\mathbf{k}_c & \mathbf{k}_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \mathbf{u}_i \\ \delta \mathbf{u}_j \end{Bmatrix} \quad (14)$$

2.4 ケーブルネットの有限変位解析例

本理論によるケーブルネット有限変位解析の一例からその計算安定性について述べる。解析手法には、任意に与えた節点座標からケーブル端力を求め、節点力とケーブル端力の不平衡力を式(14)の定数ベクトルとして接線幾何剛性方程式を解き、節点位置を更新する力学的な Newton-Raphson 法を用いる。すなわち、節点力を節点変位による高次非線形式としてこれを解けば純粋な Newton-Raphson 法であるが、本論では一貫して節点変位により更新されたケーブル端の節点座標値からケーブル状態量を求めている。以下、本論に使用する Newton-Raphson 法を力学的 NR 法と呼ぶことにする。

図-4に示す周辺固定されたケーブルネットを計算例に用いた。ケーブルの無応力単位長重量と伸び剛性はそれぞれ $q_0 = 10\text{N/m}$, $EA_c = 2.618\text{MN}$, 各ケーブル無応力長 l_0 は図中に指定した8本のみ1.414m, 他は全て1mである。まず、全節点を水平面とする初期位置から図-4に示す平衡形状を求め、次に、周辺固定点を鉛直軸に対して 30° 傾け図-5左図の状態を求めた。さらに、図-5左図を初期状態として図中の2節点それぞれに水平力2kNと鉛直力1kNを同時に一括载荷する。载荷後の形状は

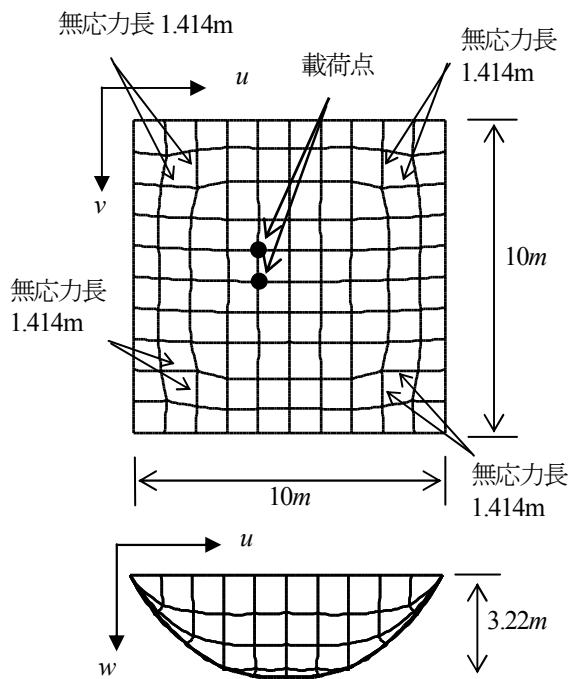


図-4 初期状態前のケーブルネット

図-5 右図となり、一括载荷による全節点中の最大不平衡力は図-6 の収束過程をとる。許容不平衡力は 10^{-7} kNであり 64 回の反復回数で許容値を満足した。これら初期状態を求める有限変位解析から緊張と弛緩のケーブルが混在する平衡形状の算出まで全て安定な収束計算となった。

この計算例以外にも様々なネット形状について有限変位解析¹³⁾を行い、いずれも安定な収束過程により平衡解を得ている。正剛性の弾性カテナリーケーブルにより構成されるネット解析は張力場の中で行われるものであるから、安定な解析となることは必然と考えられる。

3. ケーブルユニットによる非抗圧膜モデル

非抗圧膜構造をケーブルによりモデル化できれば2軸弛緩状態を含めた解析が容易となる。本節では、既存張力場理論に用いられる定ひずみ三角形要素を元にひずみエネルギー等価な軸力部材ユニットを導き、ユニットに非抗圧性を与えるためのケーブル置換方法について述べる。

3.1 定ひずみ要素に等価な骨組ユニット要素

有限要素法では定ひずみ三角形要素を平面内に置くと、1節点2自由度の計6自由度表示の剛性マトリクス¹⁴⁾が用いられる。この6自由度には要素の剛体変位3自由度が含まれ、等価ひずみエネルギーを適用するには、剛体変位を除去した独立な3自由度の変形による剛性方程式が必要となる。本論で

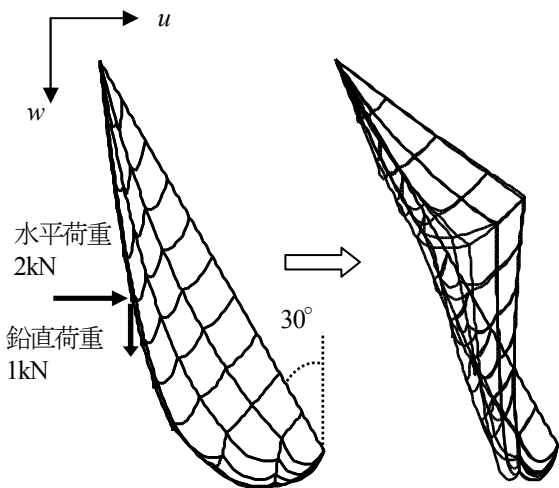


図-5 ケーブルネット初期形状と変位後の形状

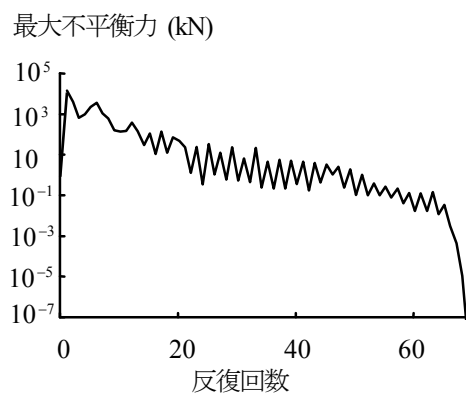


図-6 最大不平衡力の収束過程

はこの独立な3自由度の要素変形として、図-7 に示す要素3辺無応力長からの伸び量を採用する。この変形に仕事の対となる要素端力を用いれば次の定ひずみ要素剛性方程式が得られる。なお、付録に6自由度の定ひずみ要素に拘束条件を与えて式(15)が得られることを示している。

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \frac{D}{4A} \begin{bmatrix} e_1^2 + \mu l_1^2 & e_1 e_2 - \mu l_1 l_2 & e_3 e_1 - \mu l_3 l_1 \\ & e_2^2 + \mu l_2^2 & e_2 e_3 - \mu l_2 l_3 \\ \text{sym.} & & e_3^2 + \mu l_3^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta l_1 \\ \Delta l_2 \\ \Delta l_3 \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ & K_{22} & K_{23} \\ \text{sym.} & & K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta l_1 \\ \Delta l_2 \\ \Delta l_3 \end{Bmatrix} \quad (15)$$

ここに、

$$D = \frac{Et}{1-\nu^2}, \quad \mu = \frac{1-\nu}{2} \quad (16a, b)$$

また、 t ：膜厚、 A ：無応力時要素面積、 E ：ヤング率、 ν ：ポアソン比、 l_n, e_n ：無応力要素における辺 n の長さおよび頂点 n と垂心間の距離である。本論で使用する膜材は等方性と仮定する。

式(15)に等価な骨組構造として図-8に示すモデ

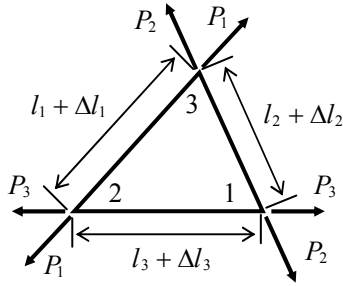


図-7 定ひずみ三角形要素

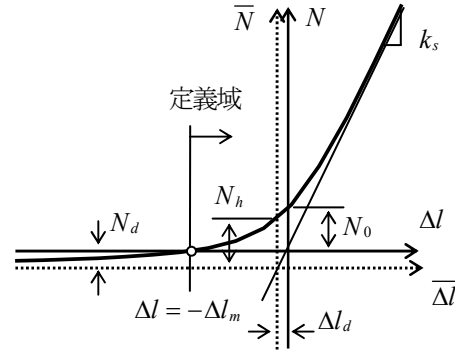
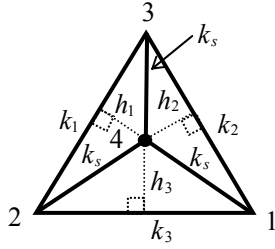


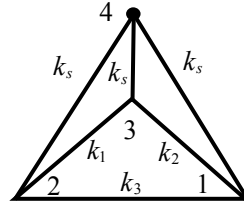
図-9 双曲線張力材の軸力図



$$h_1 > 0, h_2 > 0, h_3 > 0$$

全部材ケーブル

(1) タイプ 1



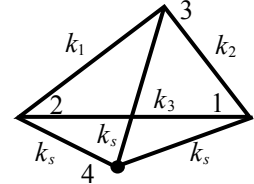
$$h_1 < 0, h_2 < 0, h_3 > 0 \text{ の例}$$

主材：ケーブル

$\overline{34}$ ：軸力材

$\overline{14}, \overline{24}$ ：双曲線張力材

(2) タイプ 2



$$h_1 > 0, h_2 > 0, h_3 < 0 \text{ の例}$$

主材：ケーブル

$\overline{34}$ ：双曲線張力材

$\overline{24}$ ：双曲線圧縮力材

$\overline{14}$ ：軸力材

(3) タイプ 3

図-8 定ひずみ要素に等価な骨組ユニットのタイプとそのケーブル置換

ルを用いる。無応力膜要素形状と同一の形状を構成する辺部材を主材，主材を除く 3 部材を副材，副材が結合する点を補助点と呼ぶことにする。

3 主材の各伸び剛度，2 つの辺から補助点までの距離および副材伸び剛度 k_s の計 6 個を未知数とすれば，簡潔な式によって任意三角形の定ひずみ要素に等価な骨組ユニットを表すことが可能となる。図中に示す k_1, k_2, k_3, k_s が各部材の伸び剛度であり，副材伸び剛度は未知数の設定に基づき全て等しい。

図-8 (1) の 1 次不静定トラス骨組において，要素端力 P_1, P_2, P_3 による主材伸び量を求めれば次の剛性方程式を得る。

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 + \frac{k_s}{Fh_1^2} & \frac{k_s}{Fh_1h_2} & \frac{k_s}{Fh_1h_3} \\ & k_2 + \frac{k_s}{Fh_2^2} & \frac{k_s}{Fh_2h_3} \\ \text{sym.} & & k_3 + \frac{k_s}{Fh_3^2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta l_1 \\ \Delta l_2 \\ \Delta l_3 \end{Bmatrix} \quad (17)$$

ここに， h_n ：辺 n から補助点までの距離，頂点 n の内角を θ_n とすれば，

$$F = 2\{1/h_1^2 + 1/h_2^2 + 1/h_3^2 + (h_1 \cos \theta_1 + h_2 \cos \theta_2 + h_3 \cos \theta_3)/(h_1h_2h_3)\} \quad (18)$$

式(17)のマトリクス内の独立な 6 項を，式(15)の対応する項に等しくおけば 6 個の未知数が定まる。このように 2 つの剛性マトリクスを等しくおくことは異なる 2 つの要素のひずみエネルギーを等価とすることと同意である。

補助点位置と副材伸び剛度はマトリクス非対角項から定まり，補助点位置は，

$$h_1 = K_{23} / K_{sT}, h_2 = K_{13} / K_{sT}, h_3 = K_{12} / K_{sT} \quad (19a,b,c)$$

ここに， a_n を頂点 n からの垂線の長さとするれば，

$$K_{sT} = K_{23} / a_1 + K_{13} / a_2 + K_{12} / a_3 \quad (20)$$

副材伸び剛度は，

$$k_s = 2(K_{23}K_{13} / K_{12} + K_{12}K_{23} / K_{13} + K_{13}K_{12} / K_{23} + K_{23} \cos \theta_1 + K_{13} \cos \theta_2 + K_{12} \cos \theta_3) \quad (21)$$

主材伸び剛度はマトリクス対角項から得られ次式となる。

$$k_n = K_{nn} - k_s / (Fh_n^2), \quad (n=1,2,3) \quad (22)$$

補助点位置を表す各 h_n は正あるいは負の値を取り，これは式(15)が示すように膜材ポアソン比と三角形要素形状に依存する。なお，図-8 (1) から式(17)を導いているから，正の h_n は補助点が辺 n に対して要素側に，負は要素外側に在ることを示す。 h_n

の正負によりユニットは図-8 に示す3つの骨組タイプに分けられる。3つの h_n 全てが正のときをタイプ1, その2つが負であればタイプ2, 1つが負のときタイプ3の骨組形状とする。3つの h_n 全てが負となることはない。

補助点が要素内部にあるタイプ1は, 式(19)と(20)より式(15)のマトリクス非対角項全てが正あるいは全てが負となるときである。式(20)より $K_{st} > 0$ である条件は要素形状に関わらずポアソン比のみ $\nu > 1/3$ となることが導かれる。このとき式(15)の非対角項が全て正であればタイプ1となり, 式(19)より要素3内角について式(23a)の条件が導かれる。同様に $K_{st} < 0$ より式(23b)の条件を得る。

$\nu > 1/3$ のとき,

$$2 \tan^{-1} \sqrt{\frac{1-\nu}{2}} < \theta_n < 2 \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{1+\nu}} \quad (23a)$$

$\nu < 1/3$ のとき,

$$2 \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{1+\nu}} < \theta_n < 2 \tan^{-1} \sqrt{\frac{1-\nu}{2}} \quad (23b)$$

これらの式よりタイプ1は正三角形に近い形状に限られる。このタイプ1は後述するように数値計算上の利点を有するため特にそのポアソン比と要素形状の条件を示した。

h_n の正負によるタイプ種別, 補助点位置および各部材伸び剛度が確定すれば次節に示すようにシステマティックなケーブル置換により膜構造解析が可能となる。したがって, タイプ2, 3となるポアソン比や要素形状の条件については詳述しないものの, 頂点1を頂角とする二等辺三角形要素を例として簡単に示しておく。タイプ1の判定と同様に K_{st} の正負と h_n の正負からタイプ2, 3は次のような場合となる。

$\nu > 1/3$ のとき h_1 のみ正の条件より式(24a)の頂角を取る二等辺三角形であればタイプ2, h_1 のみ負の条件より式(24b)であればタイプ3となる。

$$\theta_1 > 2 \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{1+\nu}}, \quad \theta_1 < 2 \tan^{-1} \sqrt{\frac{1-\nu}{2}} \quad (24a,b)$$

一方, $\nu < 1/3$ のとき式(25a)であればタイプ2, 式(25b)であればタイプ3となる。

$$\theta_1 < 2 \cos^{-1} \frac{1}{\sqrt{1+\nu}}, \quad \theta_1 > 2 \tan^{-1} \sqrt{\frac{1-\nu}{2}} \quad (25a,b)$$

主材と副材伸び剛度の正負も要素形状とポアソン比によって変化する。タイプ1では $\nu < 1/3$ のとき副材が負剛性となり, タイプ2と3では主材の一部材が負剛性となることもある。このように負剛性部材が現れる原因は次のように考えられる。定ひず

み要素と骨組ユニットのひずみエネルギーを等価としているから, 例えば副材の伸び剛度が負であることは同じ要素変形状態において, 過大となる主材ひずみエネルギーを負剛性副材の負ひずみエネルギーによって相殺していることを意味する。

式(15)の非対角項あるいは K_{st} がゼロの場合, 補助点位置は要素辺上あるいは無限遠点となる。これらのケースはそれぞれの条件に応じた対応が可能であるが, ポアソン比と要素形状が同時に特定の値を取るためであり要素形状を変えれば3タイプの何れかになる。なお, $\nu = 1/3$ の正三角形要素では主材のみの簡潔なモデルに置換できる。

以上の理論に基づく軸力骨組ユニットの剛性方程式は定ひずみ要素と完全に一致する。しかし, 非抗圧ではないためこの特性を与えるには軸力材を適切に柔ケーブルに置換する必要がある。

3.2 ケーブルユニット要素

骨組ユニットをケーブル置換するとき, 非抗圧性を常に維持しながら緊張時には定ひずみ要素の挙動にほぼ等しくするため次の条件を定める。

- i) ユニット総重量は膜要素重量に等しい。
- ii) 各部材両端を結ぶ弦方向の伸び剛度は前節で定めた軸力部材伸び剛度に等しい, あるいは軸力が十分大きいときほぼ等しい。
- iii) ユニットの要素変形は,

$$\Delta l_1 > -l_1, \Delta l_2 > -l_2, \Delta l_3 > -l_3$$

の定義域を持ち, この定義域において常に,

$$P_1 > 0, P_2 > 0, P_3 > 0$$

である。さらに, 補助点を除くユニット3頂点が一点に収斂するとき P_1, P_2, P_3 全てゼロに収束する。

- iv) 軸力骨組ユニット緊張時,

$$\Delta l_1 \geq 0 \text{ and } \Delta l_2 \geq 0 \text{ and } \Delta l_3 \geq 0$$

において微小変形仮定のもとに定まる各部材軸力の引張あるいは圧縮は iii)の定義域内で変化せず, その軸力および剛性は常に連続とする。

なお, ケーブル置換にのみ緊張時微小変形仮定を適用し, 数値計算は全定義域において有限変形とする。

- v) ユニット弛緩時は有限変形とするものの, 変形によってユニットタイプや置換された各部材種は換えない。また, 定ひずみ仮定は有限変形とする弛緩時には適用されない。

以上の条件を満足するためには次の3種類の部材による置換が必要となる。

- a) 弾性カテナリーケーブル: 単にケーブルと呼ぶ。
- b) 通常の弾性軸力材: 主に圧縮副材に用いる。
- c) 双曲線軸力材: iii)の条件を満たすため副材に用い, 部材両端を結ぶ弦長変化量を変数として双

曲線関数によって単相軸力が表わされる部材である。

以下、部材剛性が正である場合についてタイプ毎に説明する。剛性が負となっても絶対値剛性によるケーブル端力と接線剛性式を正負反転するのみで対応でき、双曲線軸力材も同様である。

(1) タイプ 1：条件 iii) から全てケーブルに置換できる。主材と副材の無応力長はそれぞれ各頂点間距離および各頂点と補助点間距離であり、式(21)、(22)より伸び剛性が定まる。ユニット全ケーブル総重量を膜自重と等しくおけば、無応力時ケーブルの単位長重量が定まる。

(2) タイプ 2：主材のみケーブルとなり主材総重量が要素重量となる。主材の無応力長および伸び剛性はタイプ 1 に同じである。副材については、 $h_n > 0$ の辺に対する頂点 n から射出する副材は条件 iv) のもとに圧縮力であるため弾性軸力材となる。一方、 $h_n < 0$ である 2 辺それぞれに対する頂点から射出する 2 副材は張力であり、条件 iii) を満たすため双曲線軸力部材を用いる。

(3) タイプ 3：主材はタイプ 2 に同じである。副材については、 $h_n > 0$ の 2 辺それぞれに対する頂点から射出する 2 副材は圧縮力となる。変形の定義域においてこの 2 部材軸力に相変化が発生しないためには、短い方の副材は弾性軸力材、長い方の副材は変形の上限が定められた双曲線圧縮軸力材となる。 $h_n < 0$ の辺に対する頂点 n から射出する副材は変形の下限が定められた双曲線張力材となる。

なお、タイプ 2 と 3 は構造から明らかなようにその補助点位置は要素平面上に限定される。

双曲線軸力材を導入する目的は、副材軸力が圧縮力から引張力に、あるいは引張力から圧縮力のように相変化することなく定めた変形量で軸力をゼロに設定できる点にある。

双曲線関数の引張力式を用いたケーブルネット解析の研究⁹⁾では弦長変化を変形量としてその定義域を $-\infty < \Delta l < \infty$ としている。本論ではその定義域を引張力では下限、圧縮力では上限を明確に定めて使用する。図-9 に引張力の例を示すように、この双曲線軸力式は任意の下限 ($\Delta l \geq -\Delta l_m$) を設定できる利点を持つ。また、 $\Delta l_1 = \Delta l_2 = \Delta l_3 = 0$ の状態で重力場に水平支持されたケーブルユニットにおいて副材に発生する軸力を $\Delta l = 0$ における軸力 N_0 と定めることができる。これら 2 点を通る双曲線軸力式は、線形剛性直線上の原点移動により次のように表わされる。

$$N \pm N_d = \frac{k_s}{2} (\Delta l \pm \Delta l_d) \pm \sqrt{N_h^2 + \frac{k_s^2}{4} (\Delta l \pm \Delta l_d)^2} \quad (26)$$

ここに、複号同順であり + が張力式、- が圧縮力式

である。また、 Δl_m と N_0 より次の定数が決まる。

$$N_d = N_h^2 / N_m, \quad \Delta l_d = N_h^2 / (k_s N_m) \quad (27a, b)$$

$$N_h^2 = N_0^2 N_m / (N_m - N_0), \quad N_m = k_s \Delta l_m \quad (27c, d)$$

双曲線圧縮力式では、伸び変形の上限 $\Delta l = \Delta l_m$ において $N = 0$ 、 $\Delta l = 0$ において $N = -N_0$ である。なお、タイプ 2 および 3 に使用する双曲線軸力材の変形下限値あるいは上限値は、3 頂点が弾性軸力材のユニット頂点側端部に収斂した極限状態であるため弾性軸力材長と双曲線軸力材長の差となる。

これらのケーブルユニットを用いた有限変位解析は、ケーブルを含む骨組構造の幾何学的非線形問題であるため補助点変位も有限であり、膜要素を有限変形として解析することになる。式(26)の接線剛性を $\bar{k}_s = dN / d\Delta l$ 、3 次元共通座標系における部材弦方向余弦を α とすれば、双曲線軸力材の接線幾何剛性方程式は次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} \delta U_n \\ \delta U_4 \end{Bmatrix} = \left[\bar{k}_s \begin{bmatrix} \alpha \alpha^T & -\alpha \alpha^T \\ -\alpha \alpha^T & \alpha \alpha^T \end{bmatrix} + \frac{N}{l_p} \begin{bmatrix} \mathbf{e} - \alpha \alpha^T & -(\mathbf{e} - \alpha \alpha^T) \\ -(\mathbf{e} - \alpha \alpha^T) & \mathbf{e} - \alpha \alpha^T \end{bmatrix} \right] \begin{Bmatrix} \delta \mathbf{u}_n \\ \delta \mathbf{u}_4 \end{Bmatrix} \quad (28a)$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{k}_p & -\mathbf{k}_p \\ -\mathbf{k}_p & \mathbf{k}_p \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \mathbf{u}_n \\ \delta \mathbf{u}_4 \end{Bmatrix} \quad (n = 1, 2, 3) \quad (28b)$$

ここに、 l_p ：部材弦長、 $\mathbf{e}$ ：単位マトリクスである。通常軸力部材では式(28a)の $\bar{k}_s$ を単に式(21)の k_s に変えればよい。

本節最後に要素内応力について述べておく。2 主軸ともに弛緩状態にあるとき、ケーブルを用いるためその応力を求めることはできない。しかし、弛緩時引張応力は非常に小さく、実用上は引張側主軸応力が重要となる。この主軸引張応力は次のように計算できる。ユニットの変形に基づき付録中に示す式(32)より図-17 の座標系に基づく要素内定ひずみを得る。このひずみ $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma$ から得られる主ひずみを $\varepsilon_{\bar{x}}, \varepsilon_{\bar{y}}$ とおけば、 $\varepsilon_{\bar{y}} \leq -\nu \varepsilon_{\bar{x}}$ のとき $\bar{y}$ 軸は弛緩状態にあり引張軸である $\bar{x}$ 軸の応力は $\sigma_{\bar{x}} = E \varepsilon_{\bar{x}}$ となる。

3.3 ケーブルユニット要素と定ひずみ要素の比較

前節において構成されたケーブルユニットについて緊張時には定ひずみ要素の挙動にほぼ等しく、弛緩時には完全に非抗圧であることを数値計算によって確認する。

ケーブルユニット要素単体について、要素端外力による弛緩、緊張およびせん断変形状態を定ひずみ要素とともに求め比較する。計算に用いた要素は図、

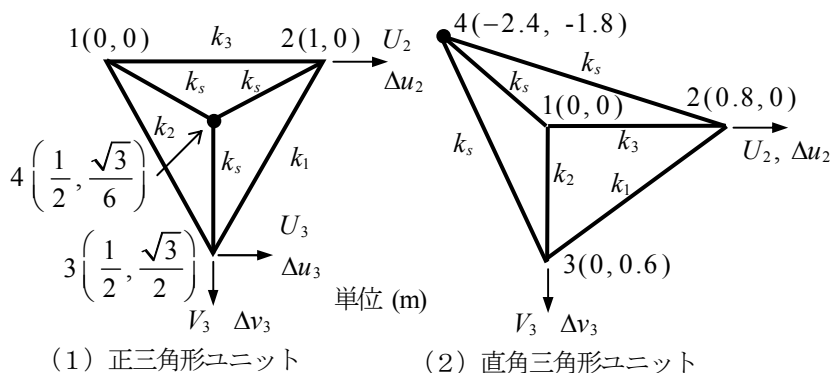


図-10 計算に用いたタイプ1と2のケーブルユニット

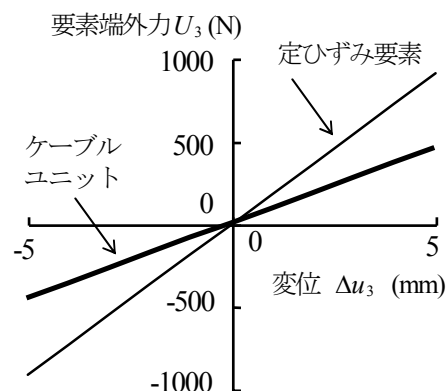
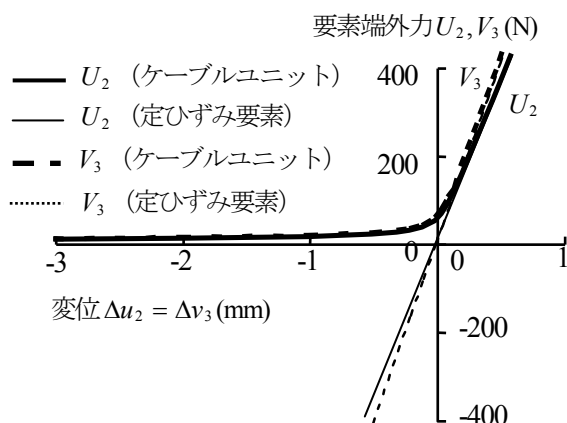
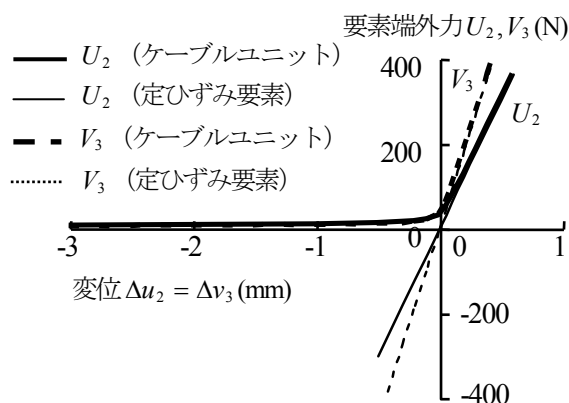


図-12 正三角形ユニットのせん断抵抗



(1) 正三角形要素



(2) 直角三角形要素

図-11 ケーブルユニットの弛緩から緊張状態における要素端外力と変形の関係

-10 に示す一辺 1m の正三角形と辺長がそれぞれ 1m, 0.8m, 0.6m の直角三角形である。膜材には伸び剛性: $Et = 882\text{kN/m}$, 単位面積重量: $w = 9.8\text{N/m}^2$ ポアソン比: $\nu = 0.4$ を用い, これらは塩ビコーティングポリエステル基布に相当する。正三角形要素はタイプ1, 直角三角形要素はタイプ2となり, それぞれのユニット各部材伸び剛性を 3.1 節の理論から求めれば表-1 となる。

表-1 ユニット各部材の伸び剛性(kN/m)

Type	k_1	k_2	k_3	k_s
1	363.7	363.7	363.7	181.9
2	187.5	542.5	113.8	1156

単一ユニットを重力場で3頂点水平支持し, 図-10 に示すように支点2と3に要素が弛緩あるいは緊張状態となる強制変位 $\Delta u_2, \Delta v_3$ を同時に同じ大きさを与える。これにより強制変位と要素端外力の関係は図-11 (1), (2) となる。強制変位ゼロは支点間距離が要素無応力寸法するときであり, これより僅かな緊張の導入とともにケーブルユニットの

要素端外力は定ひずみ要素のそれとほぼ等しくなる。一方, 弛緩進行とともに外力は反転することなくゼロに漸近している。したがって, ケーブルユニットは緊張時には定ひずみ要素とほとんど同じ挙動を示すとともに非抗圧性を持つことが確認できる。図-10 (2) と同じ要素形状にポアソン比のみ $\nu = 0.3$ に変えればタイプ3となり, この場合も図-11 と同様の結果を得た。多くの建築用膜材¹⁵⁾は $\nu > 1/3$ であり, タイプ1か2のケーブルユニットを主体とした膜構造解析となる。

ケーブルユニットのせん断抵抗について正三角形要素の例を図-12 に示している。ケーブルユニットは有限変形とするため外力と変形は比例しないものの, 図のように変形が非常に小さいところではほとんど直線となり, その傾きは定ひずみ要素のせん断抵抗に対しほぼ 1/2 である。このことは, 正三角形の対称性と非抗圧膜材として圧縮側剛性が存在しない点を考えれば, ケーブルユニットはせん断状態にある膜材の特性についてもほぼ正しく表していると評価できる。

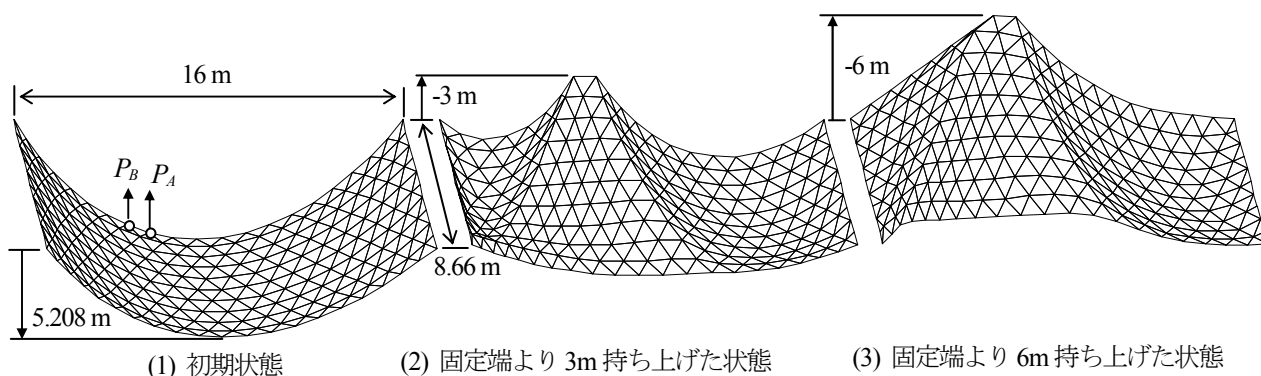


図-13 吊り下げられた矩形平面膜($\nu = 0.4$, 8.66x20m)の有限変位解析例

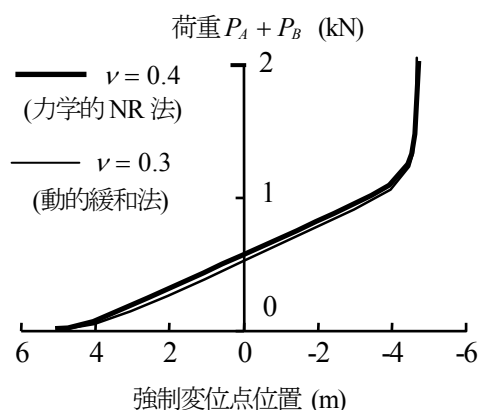


図-14 強制変位点の位置と荷重の関係

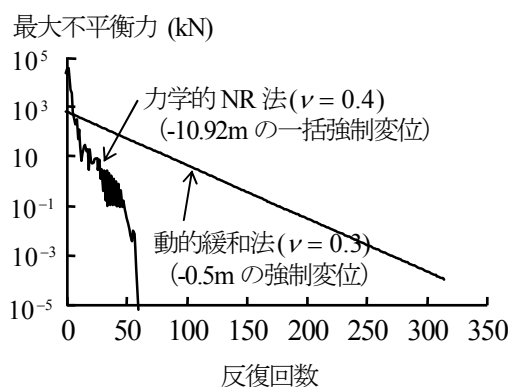


図-15 最大不平衡力の収束過程

4. 膜構造物の有限変位解析例

ケーブルユニットを用いた2つの膜構造物について数値計算例を示す. 以下の計算ではケーブルユニットを部分構造として解析を行った. すなわち, 全体構造の接線幾何剛性方程式を解き, 節点変位より更新したユニット頂点座標から有限変位反復計算のもとに補助点位置を求めるものである. 補助点位置が定まればユニット端力を含む状態量が確定する. この部分構造の適用により, 補助点を節点に含める全体骨組解析に比べ半分以下の総自由度数となる. また, 全体構造解析は力学的 NR 法あるいは動的緩和法を負剛性ケーブルの有無により使い分けている.

図-13 は短辺を固定し吊り下げられた矩形平面膜 (8.66 x 20m, ポアソン比 0.4) の強制変位による変形形状を示したものである. 平面膜は固定辺部のみ斜辺 1m の直角三角形要素, それ以外は全て辺長 1m の正三角形とする総数 410 要素によって構成されている. 変形図は隠線処理を優先したため節点間を直線としているが, 図-13(2)のように大域的な弛緩状態とともに左側手前に発生した部分的な皺状況も視覚的に判別できる. 勿論, 各要素について式(32)よりひずみを求めれば弛緩と緊張の別は

明確に判別できる.

図-14 は図-13 における強制変位点の鉛直位置と強制変位支点反力の関係を示したもので, ポアソン比 0.4 と 0.3 のケースを比較している. これらの使用膜材は 3.3 節と同じものであるが, ポアソン比のみ 0.3 に変えた膜を比較に用いた. 正三角形要素はポアソン比に関わらずタイプ 1 のユニットであるものの, 副材はポアソン比 0.4 のとき正剛性, 0.3 のとき負剛性となる. 直角三角形要素は 3.3 節に述べたようにポアソン比 0.4 のときタイプ 2, 0.3 のときタイプ 3 となり, 副材剛性はともに正である. このように副材剛性やケーブルユニットタイプがポアソン比によって異なっても図-14 のように応答はそれ程大きく変化せず, 膜の変形状態についても節点位置の差は最大で 40cm 程度であった.

しかし, 採用した解析手法は2つのケースで異なり, ポアソン比 0.4 のとき力学的 NR 法, 0.3 のとき動的緩和法を用いている. ポアソン比 0.4 ではタイプ 2 に軸圧縮力材が含まれるものの正剛性ケーブルが主体となるため, ケーブルネット解析と同様に力学的 NR 法を用いて少ない反復計算によって平衡解を得ることができる. 一方, ポアソン比 0.3 のケースに力学的 NR 法を適用すれば最大不平衡力の推移はカオス的となった. したがって, 反復回

数は力学的 NR 法に比べ増加するものの収束性に対するロバスト性が高い動的緩和法を用いることとした。

2つのケースについて最大不平衡力の収束過程を図-15に示している。ポアソン比 0.3 のケースは強制変位点レベルを-5.5m から-6m に挙げたとき、ポアソン比 0.4 は初期状態から最終強制変位点レベル-6m まで一気に強制変位を与えたものである。このように動的緩和法の反復回数は増加するものの、確実に収束解を算出する。なお、実膜構造物では多くの使用膜材のポアソン比は 1/3 を超えることから、正剛性ケーブルのタイプ 1 を主体としてタイプ 2, 3 を平面裁断膜周辺部に限定する要素分割により力学的 NR 法を適用できると考えている。

部分構造を用いた一つの目的は、圧縮材である負剛性ケーブルが存在しても非抗圧ユニットとしての張力場解析となり、ケーブルネット解析と同様の収束過程を取ると推測したためである。しかし、力学的 NR 法を用いてカオスの反復過程を取るとは負剛性ケーブルを含む構造はケーブルネット構造が持つエネルギー曲面とは異なることを意味している。ただし、極値は唯一でありながら凹凸のエネルギー曲面ではないかと推測している。

他の計算例は図-16 に示す五角形空気膜ドームのインフレーション解析であり、膜材は 3.3 節と同じものを使用している。ドームは頂角 58° 、底辺 10m の二等辺三角形平面膜 5 枚を貼り合わせた立体膜構造であり、この平面膜に相似な底辺 1m の二等辺三角形 500 要素によって構成されている。この要素形状とポアソン比 $\nu=0.4$ から全て正剛性ケーブルから成るタイプ 1 のユニットとなる。したがって、通常の荷重解析であれば網目形状は異なるものの 2.4 節に示したケーブルネット解析と同様の計算によって膜構造の解析を行うことを意味する。

空気圧はユニット 3 頂点より定まる平面に直交方向に作用するものとして計算している。したがって、この膜構造に作用する外力は非保存力となる。しかし、全て正剛性ケーブルから構成された構造より力学的 NR 法を適用でき、図のように内圧増加による空気膜ドームの変形計算が少ない反復回数により可能である。

図-16(1)のようにドーム周辺と頂部 6 節点を固定した状態を初期状態として徐々に内圧を増加させ、内圧 13Pa から 14Pa に増加するとき頂部固定点を解放した。内圧 15Pa のときドーム頂部のレベルは 4.55m となった。

5. 結論

張力場理論として 3 次元弾性カテナリーケーブ

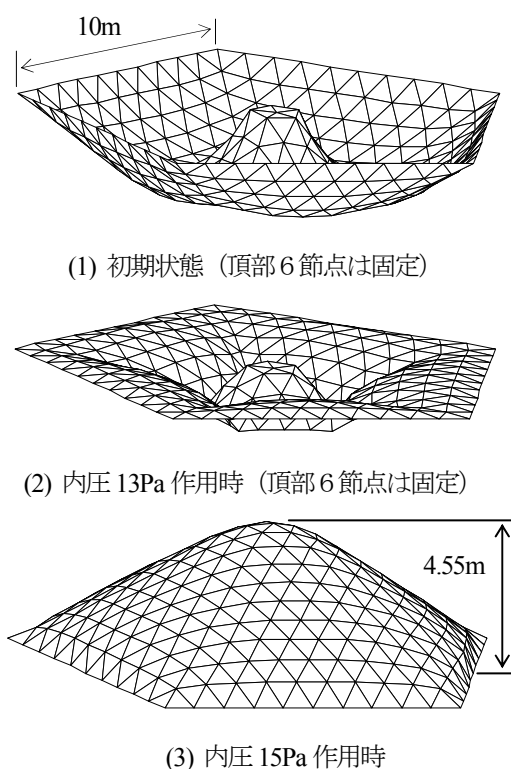


図-16 五角形膜ドームのインフレーション解析

ルを主体とする非抗圧膜モデルを提案し、このモデルによる膜構造物の有限変位解析例を示した。本論により得られた結果をまとめれば次の通りである。

(1)これまで示されていない 3 次元弾性カテナリーケーブルの接線幾何剛性方程式を提案した。

(2) 3 次元ケーブル理論をネット構造の有限変位解析に応用し、安定な反復計算により平衡解を算出できることを示した。

(3) 三角形定ひずみ要素にひずみエネルギー等価な軸力部材ユニットを導き、要素形状とポアソン比によって 3 タイプのユニットに分けられることを示した。

(4) ユニットに非抗圧性を与える軸力部材からのケーブル置換について説明した。置換されたケーブルユニットは緊張時には定ひずみ要素の挙動とほぼ等しく、弛緩の進行とともにユニット端力は張力のままゼロに漸近し、ユニット全体として張力場は維持される。

(5) 膜構造物の有限変位解析例を示し、正剛性ケーブルにより構成されるタイプ 1 を主体とする要素分割を行えば、力学的 NR 法により少ない反復計算により大变位現象を解析できる。また、多くの建築用膜材についてはこのモデル化が可能と考える。

(6) 負剛性ケーブルを含む場合であっても動的緩和法を用いれば反復回数は増えるもののケーブルユニットによる非抗圧膜構造の解析は可能である。

なお、ケーブルユニットによる膜構造有限変位解

析結果の検証の必要があるものの、弛緩膜の大変位現象を取り扱った研究は見当たらず実験が必要と思われる。このとき実際の膜材は縦糸と横糸が編まれたものであるため直交異方性を考慮したケーブルユニットの開発も必要である。

付録. 定ひずみ三角形要素の剛性方程式

定ひずみ三角形要素の剛性方程式(15)を導く。以下に述べる方法より簡潔な導き方¹⁶⁾があるものの、参考文献14)の6自由度表示式から剛体変位3成分を除去したことが明瞭な方法を示すこととする。

平面内に置かれた三角形要素の剛体変位を拘束する静定な支点条件を図-17のように与える。すなわち、頂点1の2方向変位、頂点2のy方向変位を拘束している。頂点2の変位を Δx_2 、頂点3の変位を Δx_3 、 Δy_3 とすれば定ひずみ仮定より要素内の変位は着目点の座標(x, y)による1次式によって表され、

$$\Delta x = \frac{\Delta x_2}{l_3} x + \frac{l_3 \Delta x_3 - c_3 \Delta x_2}{a_3 l_3} y, \quad \Delta y = \frac{\Delta y_3}{a_3} y \quad (29)$$

ここに、 a_3 、 c_3 は図-17に示す三角形の寸法である。式(29)より要素定ひずみは次のように表される。

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma \end{Bmatrix} = \frac{1}{a_3 l_3} \begin{bmatrix} a_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 \\ -c_3 & l_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta y_3 \end{Bmatrix} \quad (30)$$

一方、定ひずみの定義に用いた微小変位仮定のもとに、頂点2, 3の変位を用いて各辺の伸び量 Δl_1 、 Δl_2 、 Δl_3 は次のように表される。

$$\begin{Bmatrix} \Delta l_1 \\ \Delta l_2 \\ \Delta l_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} d_3/l_1 & -d_3/l_1 & a_3/l_1 \\ 0 & c_3/l_2 & a_3/l_2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta x_2 \\ \Delta x_3 \\ \Delta y_3 \end{Bmatrix} \quad (31)$$

式(31)より Δx_2 、 Δx_3 、 Δy_3 を求め式(30)に代入すれば要素内定ひずみは次式となる。

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_3 \\ c_3 l_1 / a_3 & d_3 l_3 / a_3 & -c_3 d_3 / a_3 \\ -l_1 & l_2 & d_3 - c_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta l_1 \\ \Delta l_2 \\ \Delta l_3 \end{Bmatrix} \quad (32)$$

要素を等方性と仮定すれば応力は、

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau \end{Bmatrix} = \frac{D}{t} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma \end{Bmatrix} \quad (33)$$

ここに、 D と μ は式(16a, b)に示している。

式(32)を $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \boldsymbol{\Delta l}$ 、式(33)を $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} \boldsymbol{\varepsilon}$ と表せば、定ひずみ三角形要素のひずみエネルギー U は、

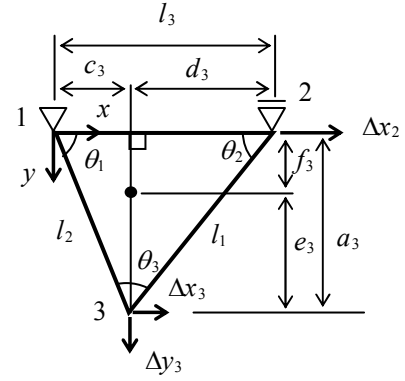


図-17 静定な支点条件の定ひずみ三角形要素とその寸法

$$U = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV = \frac{1}{2} t A \boldsymbol{\Delta l}^T \mathbf{B}^T \mathbf{E} \mathbf{B} \boldsymbol{\Delta l} \quad (34)$$

式(34)にカスティリャーノの定理を適用し、マトリクスを具体的に計算すれば、

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \frac{D}{4A} \begin{bmatrix} c_3^2 l_1^2 / a_3^2 + \mu l_1^2 & c_3 d_3 l_1 l_2 / a_3^2 - \mu l_1 l_2 & d_3^2 l_2^3 / a_3^2 + \mu l_2^2 \\ \text{sym.} & & \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta l_1 \\ \Delta l_2 \\ \Delta l_3 \end{Bmatrix} \quad (35)$$

ここに、 $S_3 = (a_3^2 - c_3 d_3) / a_3$ である。

図-17に示す a_3 、 c_3 、 d_3 と同様に頂点1, 2からの垂線 a_1 、 a_2 、辺1, 2を分割した寸法 c_1 、 d_1 および c_2 、 d_2 を用いれば次の式を得る。

$$\begin{Bmatrix} d_1 l_1 = c_2 l_2 = a_3^2 - c_3 d_3 = a_3 S_3 \\ d_2 l_2 = c_3 l_3 = a_1^2 - c_1 d_1 = a_1 S_1 \\ d_3 l_3 = c_1 l_1 = a_2^2 - c_2 d_2 = a_2 S_2 \end{Bmatrix} \quad (36)$$

式(36)を用いて式(35)を変形すれば、

$$\begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} = \frac{D}{4A} \begin{bmatrix} S_1^2 + \mu l_1^2 & S_1 S_2 - \mu l_1 l_2 & S_3 S_1 - \mu l_3 l_1 \\ & S_2^2 + \mu l_2^2 & S_2 S_3 - \mu l_2 l_3 \\ \text{sym.} & & S_3^2 + \mu l_3^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta l_1 \\ \Delta l_2 \\ \Delta l_3 \end{Bmatrix} \quad (37)$$

さらに、垂心と辺 n の距離を f_n とすれば次のような式が成り立つ。

$$c_1 d_1 = a_1 f_1, \quad c_2 d_2 = a_2 f_2, \quad c_3 d_3 = a_3 f_3 \quad (38)$$

式(38)より例えば S_3 は次のように頂点3と垂心間の距離 e_3 であることが分かる。

$$S_3 = (a_3^2 - c_3 d_3) / a_3 = (a_3^2 - a_3 f_3) / a_3 = a_3 - f_3 = e_3 \quad (39)$$

同様にその他の頂点と垂心の距離を用いれば $S_1 = e_1$ 、 $S_2 = e_2$ となり式(15)を得る。

参考文献

- 1) Miller, R. K., and Hedgepeth, J. K.: An algorithm for finite element analysis of partly wrinkled membranes, AIAA Journal, Vol.20, No.12, pp.1761-1763, 1982.
- 2) Roddeman, D. G., Drukker, J., Oomens, C. W., and Janssen, J. D.: The wrinkling of thin membranes: Part I-Theory, Journal of Applied Mechanics, Vol.54, pp.884-887, 1987.
- 3) Roddeman, D. G., Drukker, J., Oomens, C. W., and Janssen, J. D.: The wrinkling of thin membranes: Part II-Numerical analysis, Journal of Applied Mechanics, Vol.54, pp.888-892, 1987.
- 4) 岩佐貴史, 名取通弘: 張力場膜要素で求まる膜面形状について, 膜構造研究論文集, No.20, pp.43-50, 2006.
- 5) Haseganu, E. M. and Steigmann, D. J.: Analysis of partly wrinkled membranes by the method of dynamic relaxation, Computational Mechanics, Vol.14, pp.596-614, 1994.
- 6) Zhang, W., Hisada, T. and Noguchi, H.: Post-buckling analysis of shell and membrane structures by dynamic relaxation method, Computational Mechanics, Vol.26, pp.267-272, 2000.
- 7) 柏宗孝, 小野田淳次郎: 動的緩和法による膜構造物のしわ解析, 膜構造研究論文集, No.20, pp.51-58, 2006.
- 8) 阿井正博, 西岡隆, 奥村敏恵: ケーブル構造に関する一理論解析, 土木学会論文報告集, No.260, pp.17-32, 1977.
- 9) 犬飼佳幸, 木村昭雄, 藤井文夫, 野口裕久: たるみ性と非抗圧性のあるネットの計算技法, 構造工学論文集, Vol.50A, pp.151-156, 2004.
- 10) 中西宏, 波田凱夫: 曲線要素を用いた有限要素法によるケーブル構造の大変形解析, 土木学会論文報告集, No.318, pp.41-50, 1982.
- 11) 謝旭, 伊藤学, 山口宏樹: Updated Lagrangian手法に基づく柔ケーブルの非線形解析, 構造工学論文集, Vol.41A, pp.427-434, 1995.
- 12) 後藤茂夫: 柔ケーブル材の接線剛性方程式について, 土木学会論文報告集, No.270, pp.41-49, 1978.
- 13) Sato, T., Ijima, K., Obiwa, H. and Kawasaki, N.: Large displacement analysis of sagged nets in three-dimensional space, APCOM'07 in conjunction with EPMESC XI, on CD-ROM, 2007.
- 14) 鷺津久一郎他: 有限要素法ハンドブック I 基礎編, 培風館, 1981.
- 15) 石井一夫: 空気膜構造—設計と応用, (株)工業調査会, 1977.
- 16) 後藤茂男: 膜構造, 骨組構造の形状決定と挙動解析に関する統一理論の確立とプログラムの開発, 能村膜構造技術振興財団助成研究成果報告書, 1995.

(2008年9月18日受付)