構造工学論文集 Vol. 54A (2008 年 3 月)　土木学会

重合メッシュ法による杭-地盤系の有限要素解析

Finite element analysis of Pile-Solid interaction system by Overlaying mesh method

太田篤志* ・小野祐輔** ・清野純史***
Ohta Atsushi , Ono Yusuke and Kiyono Junji

*学生会員 京都大学大学院 工学研究科都市社会工学専攻 京都市西京区京都大学桂
**京都大学助教 工学研究科都市社会工学専攻 京都市西京区京都大学桂
***京都大学准教授 工学研究科都市社会工学専攻 京都市西京区京都大学桂

The Overlaying mesh method(OMM) is an analytical approach that overlaps two or more independent meshes. OMM is used to have detailed wish in elected areas,with coarser FEM mesh else where, in order optimize calculational effort. And, OMM is used creating mesh complex model by diffrent material characteristics. In this research, we propose the application method of the overlaying mesh method use a different element like a beam element and a solid element. We analyzed friction pile foundation using OMM and proved the varidity of this method.

Key Words : *Finite Element Method, Overlaying Mesh Method*
キーワード : 有限要素法 重合メッシュ法

1. 背景と目的

地中構造物の耐震性に関して，兵庫県南部地震以前には特に問題となる場合は少なく，耐震設計が省略されている場合も多かった．しかし，兵庫県南部地震で甚大な被害が発生したことから，地中構造物においても耐震設計の重要性が認識されるようになった[1) 2) 3)]．地中構造物の設計に関しては応答変位法や有限要素法が用いられる．一般に有限要素解析を行う場合，応力の集中が予想される領域では細かな要素を用いる必要がある[4) 5) 6) 7) 8)]．そのため，杭基礎の解析では杭とその近傍の地盤部において細かな要素を作成しなければならないが，解析領域全体を細かく分割することは境界周辺では必要以上の精度で解析することになり，計算量も増大する．そのため細かい要素と粗い要素を組み合わせてメッシュを作成することが多い．この作業は鉛直杭など単純なモデルの場合ではさほど困難ではないが，複数の斜杭などの複雑なモデルの場合には，格段にメッシュ作成の難易度があがる. 特に斜杭基礎と周辺地盤を三次元に有限要素分割することは大変な労力を要する作業となる．加えて，近年ではマイクロパイルと呼ばれる直径の細い杭を多数利用する補強法が普及しつつある[9) 10)]．マイクロパイル基礎では，構造物外側に杭が傾くだけでなく，内側に傾いた杭が交差するといった形状となることもあり，その場合のメッシュ作成は極めて困難である．

メッシュ作成の簡略化の方法の 1 種に，複数の有限要素メッシュを重ね合わせることで解析を行う重合メッシュ法という手法がある[11)12)13)]. 重合メッシュ法では，解析領域全体を粗いメッシュで分割しておき，高い精度が求められる一部の範囲にのみ細かく分割したメッシュを重ね合わせることで解析を行う．また，異なる材料特性を持っている場合も解析することができるので[14)15)], 複雑なモデルでのメッシュ作成方法としても利用される. 重合メッシュ法はサブストラクチャ- 法とは違い，重ね合わせる要素境界や節点を一致させる必要がなく，個々のメッシュを独立に作成し，重ね合わせることができるので，非常に柔軟にメッシュを作成することができる．例えば，解析領域全体を粗いメッシュで構造物部分を細かいメッシュでそれぞれ作成し，それを重ね合わせることで解析を行う. また，杭の本数の変更など構造物の変更があった際に，構造物部分のメッシュだけ変更して解析を行うことができ，全体のメッシュを再構築する必要がないという利点がある．

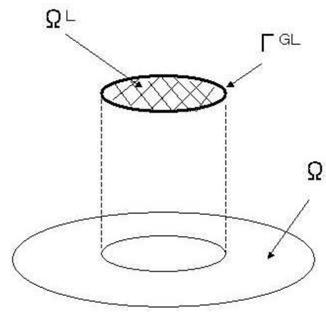
近年メッシュの自動生成法の発達が著しい．しかし，地中構造物のような異なるサイズの異なる要素を組み合わせる場合などでは完全自動化することは困難である．また，複雑なモデルでは計算精度の劣る不規則な形状の要素が生成されてしまう．重合メッシュ法ではあらかじめ作成者が必要とする部分だけに注目して作ることができ，自動生成法より効率のよいメッシュを使用することができる．また，重合メッシュ法では複雑なモデルでも規則的な要素の組合せで構築することができる．

本研究では杭基礎-地盤系の有限要素解析におけるメッシュ生成の困難さを解決する手段として 全体領域の要素に平面ひずみ要素，重ね合わせる要素に はり要素を用いた 異要素間での重合メッシュ法の適用を試みる．本論文では二次元問題を対象としているが，理論の三次元への拡張は容易である．

2. 重合メッシュ法の理論

2.1 有限要素方程式の導出

重合メッシュ法とは独立に存在する複数のメッシュを組み合わせて解析する有限要素法の手法である．重合メッシュ法においては，解析領域全体を分割したメッシュと, 解析領域内の任意の領域を異なるメッシュで分割し重ね合わせて解析を行う. ここでは全体領域をグ



図–1　グローバル領域とローカル領域の重ね合わせ

ローバル領域，異なるメッシュに分割した領域をローカル領域と呼び，それに属する要素をそれぞれグローバル要素，ローカル要素と呼ぶ．ローカル領域の境界，節点は必ずしもグローバル領域と一致する必要は無いため従来の有限要素法の複雑なメッシュが、単純なメッシュの重ねあわせで表現できる．

　ここで，全体領域を Ω，ローカル領域を Ω^L，グローバル領域を Ω^G とすると，Ω^L は Ω^G に含まれていなければならない. また，全体の領域の境界を Γ，グローバル領域とローカル領域の境界を Γ^{GL} とする．グローバル領域とローカル領域の重ね合わせのイメージを図-1に示す.

　領域 Ω^G と領域 Ω^L 内ではそれぞれ独立に変位場が定義されており，領域 Ω^L 内では, 実際の変位は領域 Ω^G における変位 u_i^G と領域 Ω^L における変位 u_i^L の和で定義され, ローカル領域とグローバル領域が重ならない領域では変位 u_i はグローバル領域の変位 u_i^G に等しい.

$$u_i = u_i^G + u_i^L \quad \text{in} \quad \Omega^L \tag{1}$$

$$u_i = u_i^G \quad \text{in} \quad \Omega^G - \Omega^L \tag{2}$$

ここで，境界 Γ^{GL} での変位の連続性を保つために次式のような条件が必要となる.

$$u_i^L = 0 \quad \text{on} \quad \Gamma^{GL} \tag{3}$$

グローバルな領域とローカルな領域の変位はそれぞれ関数マトリクス N^G，N^L と節点変位ベクトル $\{\bar{u}^G\}$，$\{\bar{u}^L\}$ を用いて以下のように表すことができる.

$$u_i^G = N_{ij}^G \bar{u}_j^G \tag{4}$$

$$u_i^L = N_{ij}^L \bar{u}_j^L \tag{5}$$

これを偏微分してひずみを求めると，

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^G + \varepsilon_{ij}^L \tag{6}$$

となる．ただし，

$$\varepsilon_{ij}^G = B_{ijk}^G \bar{u}_k^G \tag{7}$$

$$\varepsilon_{ij}^L = B_{ijk}^L \bar{u}_k^L \tag{8}$$

である．

　外力による仮想変位の仕事は，それによって生じる内部の応力による仮想ひずみの仕事と等しいという関係 (仮想仕事の原理) から次式を得る.

$$\int_\Omega \delta\varepsilon_{ij} D_{ijkl} \varepsilon_{kl} d\Omega = \int_\Omega \delta u_i b_i d\Omega + \int_\Gamma \delta u_i t_i d\Gamma \tag{9}$$

ここに，$\delta\varepsilon_{ij}$，ε_{ij}，δu_i，b_i，t_i，D_{ijkl} はそれぞれ仮想ひずみ，ひずみ，仮想変位，物体力，表面力，弾性テンソルを表す．左辺は内力仮想仕事 (仮想ひずみによる仕事) を表し，右辺は外力仮想仕事 (第１項は仮想変位と物体力による仕事，第２項は仮想変位と表面力による仕事) を表している．式 (9) に式 (1)，式 (6)，式 (7)，式 (8) を代入すると，次式が得られる．

$$\begin{aligned}\int_\Omega \delta(\varepsilon_{ij}^G + \varepsilon_{ij}^L) D_{ijkl} (\varepsilon_{kl}^G + \varepsilon_{kl}^L) d\Omega = \\ \int_\Omega \delta(u_i^G + u_i^L) b_i d\Omega + \\ \int_\Gamma \delta(u_i^G + u_i^L) t_i d\Gamma\end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned}\int_\Omega (B_{ijm}^G \delta\bar{u}_m^G + B_{ijm}^L \delta\bar{u}_m^L) D_{ijkl} (B_{kln}^G u_n^G + B_{kln}^L u_n^L) d\Omega \\ = \int_\Omega (N_{ij}^G \delta\bar{u}_j^G + N_{ij}^L \delta\bar{u}_j^L) b_i d\Omega \\ + \int_\Gamma (N_{ij}^G \delta\bar{u}_j^G + N_{ij}^L \delta\bar{u}_j^L) t_i d\Gamma\end{aligned} \tag{11}$$

この式を整理すると，解くべき方程式は以下のようになる．

$$\begin{bmatrix} K^G & K^{GL} \\ K^{LG} & K^L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}^G \\ \bar{u}^L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{f}^G \\ \bar{f}^L \end{Bmatrix} \tag{12}$$

ここで，

$$\begin{aligned} K^G &= \int_{\Omega^G} B_{ij}^G D_{ijkl} B_{kl}^G d\Omega \\ K^{GL} &= \int_{\Omega^L} B_{ij}^G D_{ijkl} B_{kl}^L d\Omega \\ K^{LG} &= \int_{\Omega^L} B_{ij}^L D_{ijkl} B_{kl}^G d\Omega \\ K^L &= \int_{\Omega^L} B_{ij}^L D_{ijkl} B_{kl}^L d\Omega \\ \bar{f}^G &= \int_{\Omega^G} N_i^G b_i d\Omega + \int_{\Gamma_t} N_i^G t_i d\Gamma_t \\ \bar{f}^L &= \int_{\Omega^G} N_i^G b_i d\Omega + \int_{\Gamma_t} N_i^G t_i d\Gamma_t \end{aligned} \tag{13}$$

であり, K^G，f^G はグローバル領域だけを解析対象とした有限要素法の剛性マトリクス，荷重ベクトルと全く同じものになる．同様に K^L，f^L もローカル領域だけを解析対象とした有限要素法の剛性マトリクス，荷重ベクトルと全く同じものになる．

2.2　はり要素と平面ひずみ要素の連成項

既往の研究では平面要素同士では連成項 K^{GL}, K^{LG} は式 (13) より求められている．しかし，はり要素と平面要素といった異なる要素間で重合メッシュ法を適用とすると，ひずみの種類が異なるためこの方法を使うことは困難である．そこで，連成項 K^{GL}, K^{LG} をグローバル変位とローカル要素から導く方法を提案する．

まず，ローカル節点と同座標上におけるグローバル変位 u'^G はグローバルの形状関数 N^G とグローバルの節点変位 $\bar{u}^G$ を用いて求まる．

$$u'^G_l = N^G_{kl}\bar{u}^G_k \tag{14}$$

ある 1 点のグローバルひずみ ε^G は式 (7) で求められるが，その点を内部に含み，かつ節点座標が既知であれば別の要素を用いても求めることができる．よって，u'^G とローカルの B^L を用いてローカル要素内での，グローバルひずみ ε^G を求める．

$$\begin{aligned}\varepsilon^G_{ij} &= B^G_{ijk}\bar{u}^G_k \\ &= B^L_{ijl}u'^G_l\end{aligned} \tag{15}$$

式 (14) を用いて，

$$\begin{aligned}B^L_{ijl}u'^G_l &= B^L_{ijl}N^G_{kl}\bar{u}^G_k \\ B^G_{ijk}\bar{u}^G_k &= B^L_{ijl}N^G_{kl}\bar{u}^G_k \\ B^G_{ijk} &= B^L_{ijl}N^G_{kl}\end{aligned} \tag{16}$$

従って，K^{LG} は以下のようにして求められる．

$$\begin{aligned}\left[K^{LG}\right] &= \int_{\Omega^L} B^L_{ij}D_{ijkl}B^G_{kl}d\Omega^L \\ &= \int_{\Omega^L} B^L_{ij}D_{ijkl}B^L_{klm}N^G_{mn}d\Omega^L \\ &= \int_{\Omega^L} B^L_{ij}D_{ijkl}B^L_{klm}d\Omega^L N^G_{mn} \\ &= \left[K^L\right]\left[N^G\right]\end{aligned} \tag{17}$$

同様にして K^{GL} は

$$\left[K^{LG}\right] = \left[N^G\right]^T\left[K^L\right] \tag{18}$$

平面要素同士でこの方法で K^{GL}, K^{LG} を求めると，式 (13) と同じ値が得られた．この方法の利点として，

- はり要素と平面要素といった異なる要素間でも適用することができる．
- ローカル要素が複数のグローバル要素にまたがっている場合でも，同じ計算量で K^{LG}, K^{GL} を求めることができる．

ということが挙げられる．

2.3　ローカルメッシュの構成

グローバル領域とローカル領域で材料定数が異なる場合，平面要素同士のような同要素種間では，材料定数がグローバル領域と異なるローカル領域 Ω^C の周りに材料定数がグローバル領域と同一であるローカル領域 Ω^B を配置することにより，領域 Ω^C の剛性がローカル領域の剛性のみで表現できることが証明されている[16]．

はり要素と平面要素を組み合わせた場合の重合メッシュ法でも，同要素間の材料定数が異なる場合と同様に次のようになる．図-2 は全体領域 Ω を表すグローバルモデルと，その部分集合である領域 Ω^L を表すローカルモデルを示している．さらにその領域 Ω^L 内部の一部の領域内では，はり要素を含むものとする．ここでははり要素の領域を領域 Ω^C とし，ローカル領域が存在する平面要素の領域を領域 Ω^B，グローバルモデルだけが存在する領域を領域 Ω^A とする．ここで，領域 Ω^A は領域 Ω^C と接触しないものと仮定する．つぎに弾性定数は，領域 Ω^A，領域 Ω^B 内において，D^1_{ijkl} とし，領域 Ω^C 内では，グローバルモデルが D^1_{ijkl}, ローカルモデルが D^L_{ijkl} とする．

また，境界については，Ω^A と Ω^B の境界を Γ^{AB}，Ω^B と Ω^C の境界を Γ^{BC} とする．そして全体領域 Ω が Ω^A，Ω^B，Ω^C に分割されるのに伴い，それぞれ Γ^A，Γ^B，Γ^C に分割されるものとする．これらの中で，力学的境界条件が存在する部分をそれぞれ $\Gamma^A_t(\Gamma^A_t \subset \Gamma^A)$，$\Gamma^B_t(\Gamma^B_t \subset \Gamma^B)$，$\Gamma^C_t(\Gamma^C_t \subset \Gamma^C)$ とする．以上をふまえると $[K^G]$，$[K^L]$ をテンソル表記すると，以下のようになる．

$$[K^G] = \int_{\Omega^A+\Omega^B+\Omega^C}[B^G_{ij}]^T[D^1_{ijkl}][B^G_{kl}]d\Omega \tag{19}$$

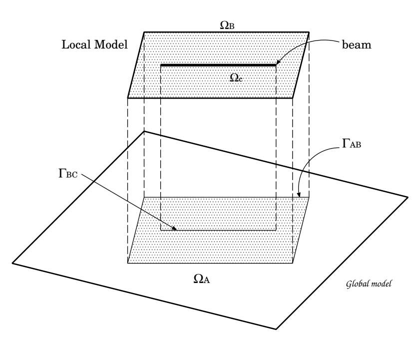
$$\begin{aligned}[K^L] = &\int_{\Omega^B}[B^L_{ij}]^T[D^1_{ijkl}][B^L_{kl}]d\Omega \\ &+ \int_{\Omega^C}[B^L_{ij}]^T[D^L_{ijkl}][B^L_{kl}]d\Omega\end{aligned} \tag{20}$$

また，$[K^{GL}]$ は以下のようになる．

$$\begin{aligned}[K^{GL}] = &\int_{\Omega^B}[B^G_{ij}]^T[D^1_{ijkl}][B^L_{kl}]d\Omega \\ &+ \int_{\Omega^C}[B^G_{ij}]^T[D^L_{ijkl}][B^L_{kl}]d\Omega\end{aligned} \tag{21}$$

次に，式 (11) の第一式をテンソル表記すると，

$$\begin{aligned}&\int_{\Omega} \delta\varepsilon^G_{ij}D_{ijkl}\varepsilon^G_{kl}d\Omega + \int_{\Omega^L} \delta\varepsilon^G_{ij}D_{ijkl}\varepsilon^L_{kl}d\Omega \\ &+ \int_{\Omega^L} \delta\varepsilon^L_{ij}D_{ijkl}\varepsilon^G_{kl}d\Omega + \int_{\Omega^L} \delta\varepsilon^L_{ij}D_{ijkl}\varepsilon^L_{kl}d\Omega\end{aligned}$$



図–2　はり要素と平面要素の重ね合わせ

$$= \int_{\Omega} \delta u_i^G b_i d\Gamma + \int_{\Omega^L} \delta u_i^L b_i d\Gamma + \int_{\Gamma_t} \delta u_i^G t_i d\Gamma + \int_{\Gamma_t} \delta u_i^L t_i d\Gamma \quad (22)$$

となる．また，変位・ひずみについてはグローバル・ローカルを示す添字 G，L の後に領域を示す A，B，C を付けることとすると，変位は以下のように表すことができる．

$$u_i = \begin{cases} u_i^G = u_i^{GA} & in \quad \Omega^A \\ u_i^G + u_i^L = u_i^{GB} + u_i^{LB} & in \quad \Omega^B \\ u_i^G + u_i^L = u_i^{GC} + u_i^{LC} & in \quad \Omega^C \end{cases} \quad (23)$$

ひずみについても同様の表記を行うこととする．次に式 (22) において，グローバルモデルの変位の変分 δu_i^G，$\delta \varepsilon_{ij}^G$ に関する項のみを取り出すと，次式が得られる．

$$\int_{\Omega^A} \delta \varepsilon_{ij}^{GA} D_{ijkl}^1 \varepsilon_{kl}^{GA} d\Omega + \int_{\Omega^B} \delta \varepsilon_{ij}^{GB} D_{ijkl}^1 \varepsilon_{kl}^{GB} d\Omega + \int_{\Omega^C} \delta \varepsilon_{ij}^{GC} D_{ijkl}^1 \varepsilon_{kl}^{GC} d\Omega + \int_{\Omega^B} \delta \varepsilon_{ij}^{GB} D_{ijkl}^1 \varepsilon_{kl}^{LB} d\Omega + \int_{\Omega^C} \delta \varepsilon_{ij}^{GC} D_{ijkl}^L \varepsilon_{kl}^{LC} d\Omega =$$
$$\int_{\Omega^A} \delta u_i^{GA} b_i d\Gamma + \int_{\Omega^B} \delta u_i^{GB} b_i d\Gamma + \int_{\Omega^C} \delta u_i^{GC} b_i d\Gamma + \int_{\Gamma_t^A} \delta u_i^{GA} t_i d\Gamma + \int_{\Gamma_t^B} \delta u_i^{GB} t_i d\Gamma + \int_{\Gamma_t^C} \delta u_i^{GC} t_i d\Gamma \quad (24)$$

Green の公式を用いて式 (24) の左辺を部分積分すると，次式が得られる．

$$\begin{aligned} &- \int_{\Omega^A} \{D_{ijkl}^1 \varepsilon_{kl,l}^{GA} + b_i\} \delta u_i^{GA} d\Omega \\ &- \int_{\Omega^B} \{D_{ijkl}^1 (\varepsilon_{kl,l}^{GB} + \varepsilon_{kl,l}^{LB}) + b_i\} \delta u_i^{GB} d\Omega \\ &- \int_{\Omega^C} \{(D_{ijkl}^1 \varepsilon_{kl,l}^{GC} + D_{ijkl}^L \varepsilon_{kl,l}^{LC}) + b_i\} \delta u_i^{GC} d\Omega \\ &+ \int_{\Gamma_t^A} (D_{ijkl}^1 \varepsilon_{kl}^{GA} n_j^A - t_i) \delta u_i^{GA} d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_t^B} \{D_{ijkl}^1 (\varepsilon_{kl}^{GB} + \varepsilon_{kl}^{LB}\} n_j^B - t_i) \delta u_i^{GB} d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_t^C} \{(D_{ijkl}^1 \varepsilon_{kl}^{GC} + D_{ijkl}^L \varepsilon_{kl}^{LC}) n_j^C - t_i\} \delta u_i^{GC} d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma^{AB}} \{D_{ijkl}^1 \varepsilon_{kl}^{GA} - D_{ijkl}^1 (\varepsilon_{kl}^{GB} + \varepsilon_{kl}^{LB})\} n_j^B \delta u_i^{GAB} d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma^{BC}} \{D_{ijkl}^1 (\varepsilon_{kl}^{GB} + \varepsilon_{kl}^{LB}) \\ &-(D_{ijkl}^1 \varepsilon_{kl}^{GC} + D_{ijkl}^L \varepsilon_{kl}^{LC})\} n_j^B \delta u_i^{GBC} d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (25)$$

ここで，グローバルの変位 u_i^G は領域 Ω において連続であるため，次式の関係が存在する．

$$\delta u_i^{GA} = \delta u_i^{GB} = \delta u_i^{GAB} \quad on \quad \Gamma^{AB} \quad (26)$$
$$\delta u_i^{GB} = \delta u_i^{GC} = \delta u_i^{GBC} \quad on \quad \Gamma^{BC} \quad (27)$$

式 (22) のローカルモデルの変位の変分 δu_i^L，$\delta \varepsilon_{ij}^L$ に関する項は，

$$\int_{\Omega^B} \delta \varepsilon_{ij}^{LB} D_{ijkl}^1 \varepsilon_{kl}^{GB} d\Omega + \int_{\Omega^C} \delta \varepsilon_{ij}^{LC} D_{ijkl}^L \varepsilon_{kl}^{GC} d\Omega$$
$$\int_{\Omega^B} \delta \varepsilon_{ij}^{LB} D_{ijkl}^1 \varepsilon_{kl}^{LB} d\Omega + \int_{\Omega^C} \delta \varepsilon_{ij}^{LC} D_{ijkl}^L \varepsilon_{kl}^{LC} d\Omega$$
$$= \int_{\Omega^B} \delta u_i^{LB} b_i d\Omega + \int_{\Omega^C} \delta u_i^{LC} b_i d\Omega + \int_{\Gamma_t^B} \delta u_i^{LB} t_i d\Gamma + \int_{\Gamma_t^C} \delta u_i^{LC} t_i d\Gamma \quad (28)$$

となる．グローバルに対する作業と同様にして式 (28) を整理すると，次式が得られる．

$$\begin{aligned} &- \int_{\Omega^B} \{D_{ijkl}^1 (\varepsilon_{kl,l}^{GB} + \varepsilon_{kl,l}^{LB}) + b_i\} \delta u_i^{LB} d\Omega \\ &- \int_{\Omega^C} \{(D_{ijkl}^L \varepsilon_{kl,l}^{GC} + D_{ijkl}^L \varepsilon_{kl,l}^{LC}) + b_i\} \delta u_i^{LC} d\Omega \\ &+ \int_{\Gamma_t^B} \{D_{ijkl}^1 (\varepsilon_{kl}^{GB} + \varepsilon_{kl}^{LB}) n_j^B - t_i\} \delta u_i^{LB} d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma_t^C} \{(D_{ijkl}^L \varepsilon_{kl}^{GC} + D_{ijkl}^L \varepsilon_{kl}^{LC}) n_j^C - t_i\} \delta u_i^{LC} d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma^{AB}} D_{ijkl}^1 (\varepsilon_{kl}^{GB} + \varepsilon_{kl}^{LB}) n_j^B \delta u_i^{LB} d\Gamma \\ &+ \int_{\Gamma^{BC}} \{D_{ijkl}^1 (\varepsilon_{kl}^{GB} + \varepsilon_{kl}^{LB}) \\ &-(D_{ijkl}^L \varepsilon_{kl}^{GC} + D_{ijkl}^L \varepsilon_{kl}^{LC})\} n_j^B \delta u_i^{LBC} d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

また，

$$\delta u_i^{LB} = 0 \quad on \quad \Gamma^{AB} \quad (30)$$

である．ここで，式 (25)，(29) について仮想変位の任意性により，

$$D_{ijkl}^1 \varepsilon_{kl,l}^{GA} + b_i = 0 \quad in \quad \Omega^A \quad (31)$$
$$D_{ijkl}^1 (\varepsilon_{kl,l}^{GB} + \varepsilon_{kl,l}^{LB}) + b_i = 0 \quad in \quad \Omega^B \quad (32)$$
$$(D_{ijkl}^1 \varepsilon_{kl,l}^{GC} + D_{ijkl}^L \varepsilon_{kl,l}^{LC}) + b_i = 0 \quad in \quad \Omega^C \quad (33)$$
$$(D_{ijkl}^L \varepsilon_{kl,l}^{GC} + D_{ijkl}^L \varepsilon_{kl,l}^{LC}) + b_i = 0 \quad in \quad \Omega^C \quad (34)$$
$$D_{ijkl}^1 \varepsilon_{kl}^{GA} n_j^A - t_i = 0 \quad on \quad \Gamma_t^A \quad (35)$$
$$D_{ijkl}^1 (\varepsilon_{kl}^{GB} + \varepsilon_{kl}^{LB}) n_j^B - t_i = 0 \quad on \quad \Gamma_t^B \quad (36)$$
$$(D_{ijkl}^1 \varepsilon_{kl}^{GC} + D_{ijkl}^L \varepsilon_{kl}^{LC}) n_j^C - t_i = 0 \quad on \quad \Gamma_t^C \quad (37)$$
$$(D_{ijkl}^L \varepsilon_{kl}^{GC} + D_{ijkl}^L \varepsilon_{kl}^{LC}) n_j^C - t_i = 0 \quad on \quad \Gamma_t^C \quad (38)$$
$$D_{ijkl}^1 \varepsilon_{kl}^{GA} - D_{ijkl}^1 (\varepsilon_{kl}^{GB} + \varepsilon_{kl}^{LB})\} n_j^B = 0 \quad on \quad \Gamma^{AB} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} &\{D_{ijkl}^1 (\varepsilon_{kl}^{GB} + \varepsilon_{kl}^{LB}) \\ &-(D_{ijkl}^1 \varepsilon_{kl}^{GC} + D_{ijkl}^L \varepsilon_{kl}^{LC})\} n_j^B = 0 \quad on \quad \Gamma^{BC} \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} &\{D_{ijkl}^1 (\varepsilon_{kl}^{GB} + \varepsilon_{kl}^{LB}) \\ &-(D_{ijkl}^L \varepsilon_{kl}^{GC} + D_{ijkl}^L \varepsilon_{kl}^{LC})\} n_j^B = 0 \quad on \quad \Gamma^{BC} \end{aligned} \quad (41)$$

ここで，式 (33) から式 (34) を引くと，次式が得られる．

$$(D_{ijkl}^1 - D_{ijkl}^L) \varepsilon_{kl,l}^{GC} = 0 \quad in \quad \Omega^C \quad (42)$$

さらに (37) 式- (38) 式，(40) 式- (41) 式より次式が得られる．

$$(D^1_{ijkl} - D^L_{ijkl})\varepsilon^{GC}_{kl} n^C_j = 0 \quad on \quad \Gamma^C_t \tag{43}$$

$$(D^1_{ijkl} - D^L_{ijkl})\varepsilon^{GC}_{kl} n^C_j = 0 \quad on \quad \Gamma^{BC} \tag{44}$$

式 (43)，式 (44) より，境界 Γ^{BC}，Γ^C 上においてはグローバルモデルが独立した応力の釣り合いを示しており，外向き法線方向の応力が 0 であることがわかる．式 (42)，式 (43)，式 (44) より次式が得られる．

$$(D^1_{ijkl} - D^L_{ijkl})\varepsilon^{GC}_{kl} = 0 \quad in \quad \Omega^C \tag{45}$$

すなわち，領域 Ω^C 内及び境界上，つまり，はり要素上においては，グローバルモデルの変位による応力は 0 であることが示された．また式 (45) より，

$$\varepsilon^{GC}_{ij} = 0 \quad in \quad \Omega^C \tag{46}$$

となるので，式 (33) と式 (34) は共に

$$D^L_{ijkl}\varepsilon^{LC}_{kl,l} + b_i = 0 \quad in \quad \Omega^C \tag{47}$$

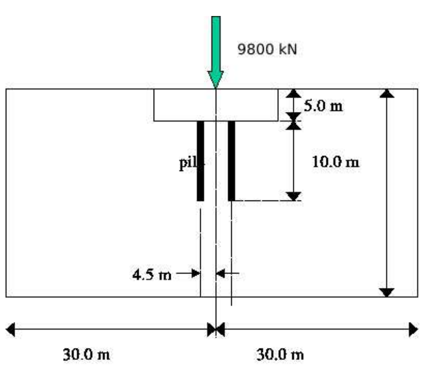
となる．同様にして，式 (40) と式 (41) は共に，

$$\{D^1_{ijkl}(\varepsilon^{GB}_{kl} + \varepsilon^{LB}_{kl}) - D^L_{ijkl}\varepsilon^{LC}_{kl}\} n^B_j = 0 \quad on \quad \Gamma^{BC} \tag{48}$$

となる．これは領域 Ω^C 内のローカルモデルの変位から生じる応力が Γ^{BC} 上で領域 Ω^B の応力と釣り合っていることを示している．したがって，はり要素内での応力はローカルモデルによってのみ表現でき，領域 Ω^C の剛性が，はり要素の剛性のみで評価できることが示された．

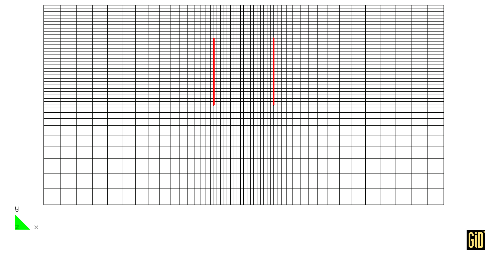
3. 解析例

3.1 鉛直杭モデルの解析

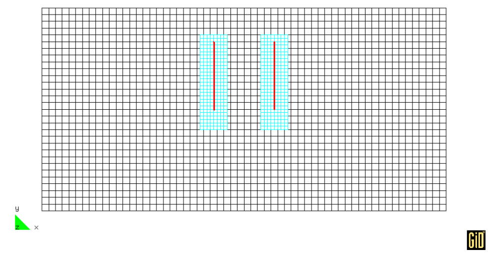


図–3 鉛直杭の解析モデル

鉛直杭の解析として (図 3) のようなモデルの通常の有限要素法と重合メッシュ法による静的解析をおこなった．今回は地盤，杭は弾性体とし，地盤，フーチングの物性値を同じとした．各材料の物性値は, 杭のヤング率, 断面積, 断面 2 次係数は それぞれ, $206GPa$, $0.009628m^2$, $7.86 \times 10^{-5}m^4$, 地盤の物性値はせん断波速度, 単位体積重量, ポワソン比は $300m/s$, $16.67kN/m^3$, 0.3 とする．はり近辺のメッシュの粗度が同程度になるように通常の有限要素法と重合メッシュ法をメッシュを作成した (図 4, 5)．また，連立方程式の解法には CG 法を用いた.



図–4 通常の FEM による鉛直杭のメッシュ



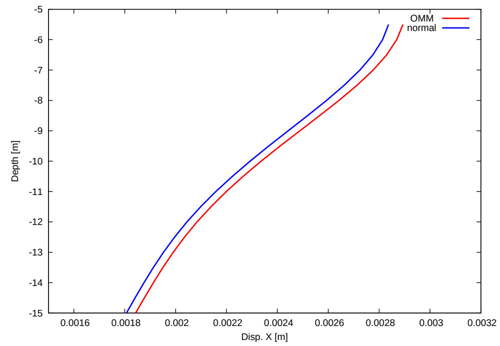
図–5 重合メッシュ法による鉛直杭のメッシュ

解析結果としてはり要素の変位は (図 6, 7, 8) のような結果が得られた．通常の有限要素法の結果を normal, 重合メッシュ法の結果を OMM と表示する. はりの領域の変位の差は $0.1mm$ 以下であり，系の最大変位応答 $77mm$ に比べ、十分小さいと判断できる．また, 通常の有限要素法と重合メッシュ法での全体の変位分布をそれぞれ (図 9, 10, 11, 12) に示す．これも両者ともほぼ同じ結果が得られた．(図 9, 10) の数値区分の最大値はともに $0.005m$, 最小値は $-0.005m$ であり，(図 11, 12) の数値区分の最大値は $0.00035m$, 最小値は $-0.077m$ である．

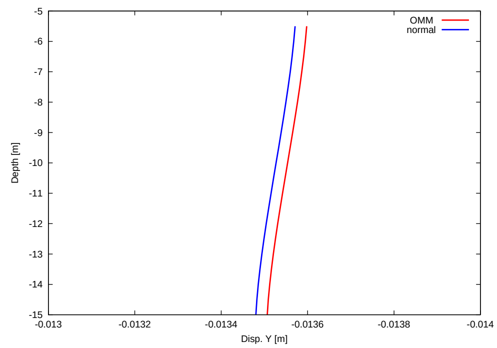
3.2 斜杭モデルの解析

鉛直杭モデル同様の物性値を用い，はりを外側に $30°$ 傾けたモデル (図 13) の解析をおこなった． 通常の有限要素法と重合メッシュ法のそれぞれのメッシュは (図 14, 15) のようにした. なお重合メッシュ法のグローバルメッシュは鉛直杭モデルと同じものを使用した．

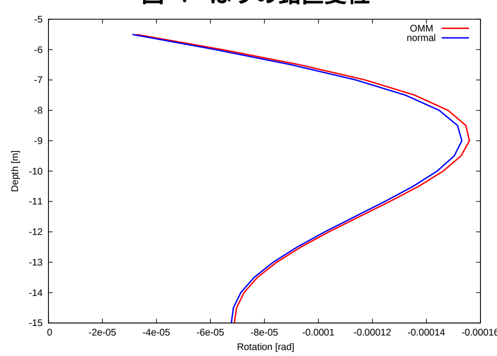
解析結果としてはり要素の変位は (図 16, 17, 18) のような結果が得られた．また, 通常の有限要素法と重合メッシュ法での全体の変位分布をそれぞれ (図 19, 20, 21, 12) に示す．(図 19, 20) の数値区分の最大値は $0.0053m$, 最小値は $-0.0053m$ であり，(図 21, 22) の数値区分の最大値は $0.00045m$, 最小値は $-0.065m$ である．鉛直杭に比べ斜杭では変位の差は大きくなり，$0.5mm$ 程度の差が生じた．これは，重合メッシュ法では式 (45) よりローカル要素とグローバル要素の物性値が異なる場合，その領域ではグローバルのひずみは 0



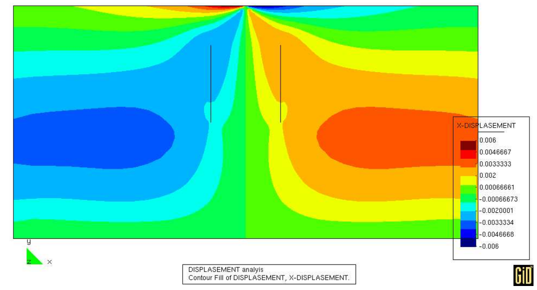
図–6　はりの水平変位



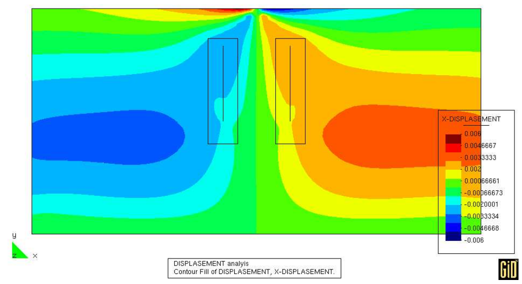
図–7　はりの鉛直変位



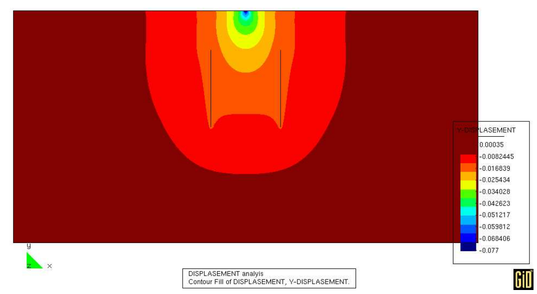
図–8　はりの回転変位



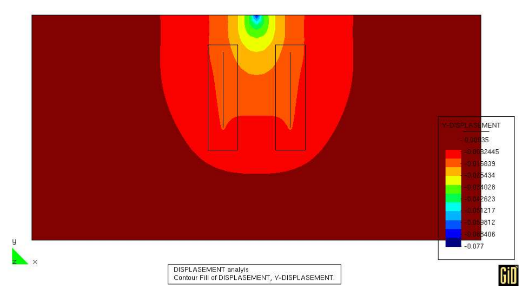
図–9　鉛直杭の通常の FEM での水平変位



図–10　鉛直杭の OMM での水平変位



図–11　鉛直杭の通常の FEM での鉛直変位



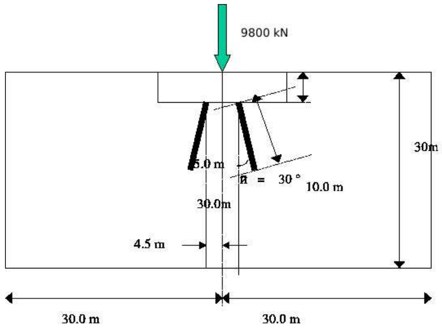
図–12　鉛直杭の OMM での鉛直変位

となる．したがって，はりと重なっている部分ではグローバル変位はほぼ一定となるはずである．鉛直杭モデルではローカルはり要素の節点上グローバル変位 $u_i'^G$ の差 $\delta u'^G$ は 10^{-8} 程度である．一方，鉛直杭では $\delta u'^G$ は 10^{-5} 程度であり，ローカルのはり要素に働くべき力がグローバル要素に残っており，はり要素のひずみが減少したと考えられる．解析時間については，K^{GL}, K^{LG} の項が必要なため剛性マトリクスの作成までの工程が増えるため，要素数が同じなら重合メッシュ法のほうが長くなる．しかし，今回の解析では CG 法による収束計算の影響 が大きく，鉛直杭では重合メッシュ法の方が解析時間は短くなり，逆に斜杭では長くなり，重合メッシュ法と解析時間の差は顕著にあらわれなかった．一方，メッシュ作成では重合メッシュ法では単純なメッシュの重ね合わせであるため，モデルが異なると新しくメッシュを作成しなければならない従来の有限要素法に比べ，簡単にメッシュを作成することができる．

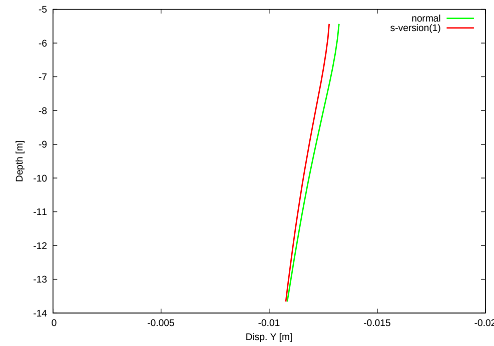
4.　結論と今後の課題

今回の研究で得られた知見をまとめると以下の通りである．

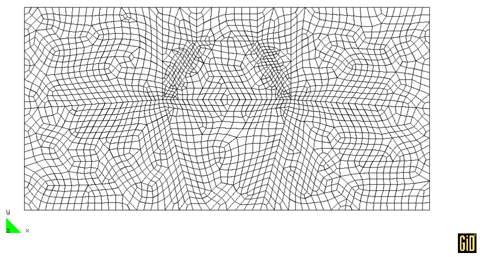
- 重合メッシュ法の連成項 K^{GL}, K^{LG} をグローバル変位とローカル要素を用いて求める方法を提案した．
- ローカル要素にはり要素を用いる場合，はり要素



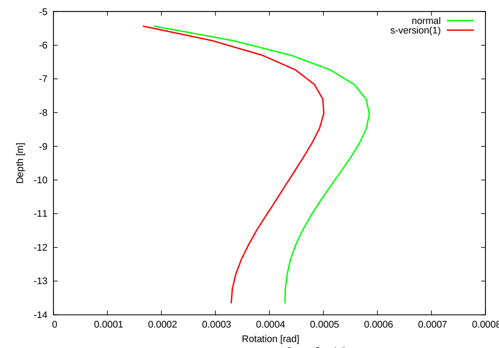
図–13 斜杭の解析モデル



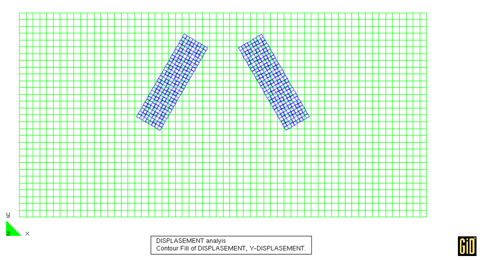
図–17 鉛直変位



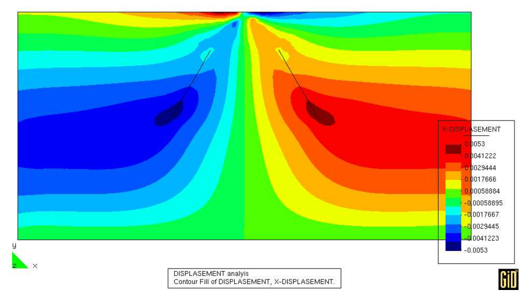
図–14 通常の FEM による斜杭のメッシュ



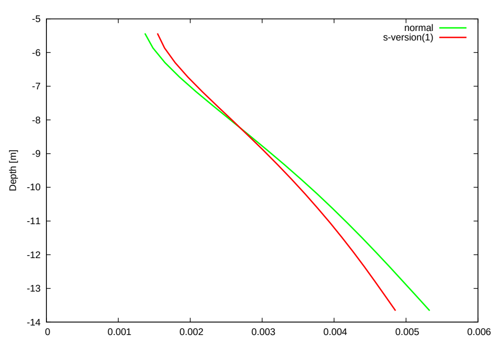
図–18 回転変位



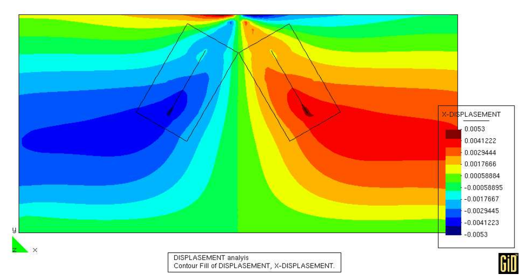
図–15 重合メッシュ法による斜杭のメッシュ



図–19 斜杭の通常の FEM での水平変位



図–16 水平変位



図–20 斜杭の OMM での水平変位

の周りにグローバル平面要素と同じ性質を持つ平面要素を付け加える必要がある．

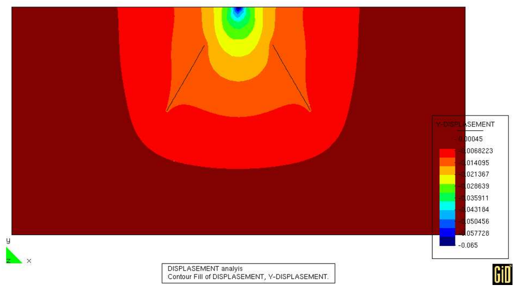
- 重合メッシュ法を用いることで，複雑な形状のモデルも簡単なモデルの重ね合わせで表現できるため，メッシュの作成が簡便になる．
- 今回のモデルのようにメッシュの粗度が同程度ならば，重合メッシュ法と通常の有限要素法の解は近い値を示した．

今後の課題としては，

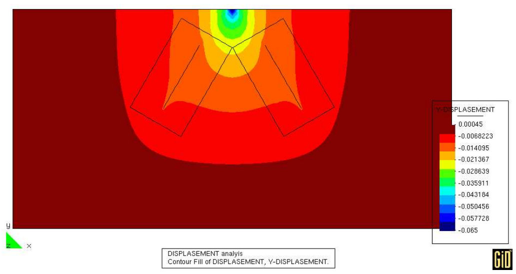
- 今回は有限要素法で得られる近似解との比較のため，両者のどちらが真値に近いかはわからないため，厳密解との比較等で重合メッシュ法の解の検証することが必要である．

- 三次元への拡張, 及び複雑な実構造物への適用を行う．

が挙げられる．



図–21　斜杭の通常の FEM での鉛直変位



図–22　斜杭の OMM での鉛直変位

参考文献

1) 土岐憲三・三浦房紀：地盤-構造物系の非線形地震応答解析，土木学会報告集，No 317，pp.61-68，1982
2) 泉博充・三浦房紀・宮坂亨明・福嶋研一：高靭性能耐震ジョイント杭の繰り返し曲げ特性とそのモデル化について，土木学会論文集, No.612, I-46, pp.109-127, 1999.1
3) 大塚久哲:最新 地中・基礎構造物の耐震設計, 九州大学出版会, 2001.11
4) O.C.Zienchiewicz:The Finite Element Method(The third, expanded and revised edition of Finite Element Method in Engineering Science), McGRAWW-HiLL, 1977.
5) O.C.ZIENKIEWICZ, R.L.TAYLOR & J.Z.ZHU:The Finite Element Method : Its Basis and Fundamentals Six edition, Elserver Butterworth-Heinemann , 2005
6) O.C.ZIENKIEWICZ & R.L.TAYLOR: The Finite Element Method for Solid and Structual Mechanics Six edition, Elserver Butterworth-Heinemann, 2005
7) 鷲津久一郎，宮本博，山田善之，川井忠彦；有限要素法ハンドブック１基礎編，培風館，1981
8) 鷲津久一郎，宮本博，山田善之，川井忠彦；有限要素法ハンドブック２応用編，培風館，1981
9) 塚田幸広・ 三浦均也 ・坪川将丈 ・西村右敏: 砂地盤上のマイクロパイル基礎の模型実験, 土と基礎 , 社団法人地盤工学会,vol 46 no.1 pp 35-38 ,1999.1
10) 高耐力マイクロパイル 設計・施行マニュアル (新設基礎編) ，高耐力マイクロパイル研究会, 2003.9
11) T. Belytchko, J. Fish and A. Bayliss: The spectral overlay on finite elements for problems with high gradients, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.81, pp.71-89, 1990.
12) J. Fish: The s-version of the finite element, *Computers & Structures*, Vol.43(3), pp.539-547, 1992.
13) 鈴木克幸, 大坪英臣, 閔勝載 and 白石卓士郎: 重合メッシュ法による船体構造のマルチスケール解析, 日本計算工学講演会論文集, 1, pp.155-160, 1999.
14) 高野直樹, 座古勝 and 石園学: 局所的不均質部を有する構造体のグローバル/ローカルモデリング, 日本機械学会論文集（A 編）,66(642), pp.14-20, 2000.
15) 中住昭吾, 鈴木克幸, 藤井大地 and 大坪英臣: 重合メッシュ法による穴あき板の解析に関する一考察, 日本計算工学会論文集, pp.Paper No.20010016, 2001.
16) 中住昭吾, 鈴木克幸, 藤井大地 and 大坪英臣: 重合メッシュ法を用いた弾性・弾塑性混合解析, 日本機械学会論文集 A 編, 68(668), pp.603-610, 2002.
17) 山東篤 and 鈴木克幸: 重合メッシュ法によるモード解析, 日本計算工学会論文集, 2005.

(2007 年 9 月 18 日 受付)