

VOF法を用いた降積雪過程の有限要素解析

VOF-based finite element analysis for deposition and deformation of snow

小川徹*, 阿部和久**, 紅露一寛***

Toru Ogawa, Kazuhisa Abe, Kazuhiro Koro

*新潟大学大学院 環境共生科学専攻 (〒950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地)

**工博, 新潟大学准教授, 工学部建設学科 (〒950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地)

***博(工), 新潟大学准教授, 大学院自然科学研究科 (〒950-2181 新潟市西区五十嵐二の町 8050 番地)

The paper attempts to enhance the VOF-based finite element method for snow deformation problem by taking into account the deposition process. The variation of snow shape due to the deposition is modeled by involving the supply from snowfall in the advection equation of the VOF function. The snowfall process is described by simplified advection and diffusion models. The developed method is verified through a comparison with a semianalytical solution for a one-dimensional deposition problem. Besides, the simulation of Nakamura's experiment for snowpack with an embedded beam is achieved. Based on these analyses the significance of snow deposition process and deformation hardening in the mechanical behavior is discussed.

Key Words : snowfall, deposition, FEM, VOF method

キーワード: 降雪過程, 堆積過程, 有限要素法, VOF法

1. はじめに

積雪中に構造物が存在する場合, 積雪の沈降が妨げられるため, その周辺では雪の変形速度の空間分布に差異を生ずる. その結果, 構造物には上方の積雪深のみならず, 形状にも依存した荷重が作用することとなる. この積雪の変形に起因して生じる力を積雪の沈降荷重という. 沈降荷重は積雪の自重を大幅に上回る程の規模となることがあり, 構造設計上, 雪荷重の適切な評価が非常に重要となる. そのため数値解法を用いた積雪の変形解析が, 当該目的において有効な手段の1つとなり得る.

Nakamura¹⁾は, 箱の中に正方形断面のほりを設置しそこに新雪を充填して, ほりに作用する沈降荷重の計測実験を行った. また, これに合わせて有限要素法による沈降荷重の再現解析を試み, 実験結果との比較を行っている. なおこの解析では積雪変形の記述に Lagrange 記法が使用されている. この場合, 大変形を伴う積雪の長時間解析では要素のゆがみが生ずるため, 解析精度の低下や, 複雑な自由境界変動を伴う際には解析過程の破綻等が懸念される.

この点に鑑み, 阿部・紅露は文献2)において有限要素法に基づいたVOF法³⁾による積雪変形解析手法を構築し, Nakamuraの実験の再現解析を行った. 当該手法では, 要素内における積雪占有率を表すVOF関数 ψ を要素毎に定義することで積雪領域を表し, ψ に関する移流方程式を解き進めることによって積雪面を捕捉して行く. Euler記法に基づくこの手法は積雪領域と無関係に要素分割ができ, 雪塊どうしの融合, 分離な

ど複雑な積雪自由境界変動解析が可能となる. さらに ψ の補間にCIP法⁴⁾を併用することで, 移流解析における精度維持を図っている. しかし, Nakamuraと阿部らのいずれの解析結果も, 時間経過に伴う沈降荷重値の減少傾向が大きく, 実験結果との間に有意な差が認められた.

そこで阿部・紅露⁵⁾は, 篠島⁶⁾の長時間載荷実験に見られる雪の硬化現象に着目し, 実験結果からそのひずみ依存性を見出した. さらに, 阿部らはその硬化現象をモデル化し, 文献2)に構成した手法に実装して当該現象を反映させた. その下ではりに作用する沈降荷重を再度計算しており, 硬化モデルの導入により既往の解析結果に見られた沈降荷重の減少傾向が低減され, Nakamuraの実験結果に近い数値が得られることを示した. しかし, 文献5)の解析で得られた沈降荷重の時刻歴は, 解析初期段階で急激に上昇し, その後徐々に減少するというものであり, Nakamuraの実験結果に比べてその初期段階に未だ大きな差異が認められた. 徐々に新雪を充填しつつ沈降荷重を計測していくNakamuraの実験条件に対して, 文献5)の解析では予めほりを無変形の積雪内に埋設した状態から圧密変形解析を開始している. 上述の初期挙動の差異は, この力学条件の違いに因る可能性が高い.

積雪は時間の経過と共に圧密変形を受けるが, 上記の様な雪の充填過程や降雪供給を伴う場合, 変形と同時に積雪堆積を受ける. 積雪の堆積に伴いその自重は変化し, ひいては変形過程における荷重や密度および積雪形状に大きな影響を及ぼすであろうことは想像に

難くない。しかしこれまでに行われている様々な雪の解析では、文献 1), 2), 5) のように圧密変形はモデル化しているが、降積雪過程を考慮していないものや、逆に文献 7) のように降雪による積雪形状の成長は再現できるが、圧密変形は考慮していないものが一般的であり、積雪成長を伴う変形過程を対象とした解析手法は未だ構築されていない。

そこで本研究では、降雪下での積雪成長過程のモデル化、およびそれによる Nakamura の実験における沈降荷重発現過程の再現・解明を主な目的とし、有限要素法に基づく 2 次元降積雪過程解析手法を構築する。その際に、降雪の供給過程は簡易モデルで表し、それを文献 2), 5) の積雪変形解析手法に実装することで積雪の堆積・圧密変形の再現を試みる。なお降雪過程に関して、文献 7), 8) では Navier-Stokes 方程式に基づく風の解析が行われている。これに対し、本研究の主目的は降雪供給が与えられた下での積雪成長過程の再現にあるため、計算時間短縮の目的から降雪過程の表現には流体解析を行わず、簡易な移流拡散モデルを用いる。その下で、1 次元的な降積雪場の解析を通し、本手法の妥当性を検証する。さらに、Nakamura の実験の再現解析を通し、実験で得られたはりの沈降荷重の発生機構について考察する。

2. 積雪の変形解析手法

ここでは、文献 2) および文献 5) において構築された積雪変形解析手法について、その概略を述べる。

2.1 積雪の力学特性

積雪は一般に粘弾性体的性質を有するが、長時間に亘る変形過程においては粘性変形が支配的となる。そのため、本研究では積雪を粘性体として扱う。篠島は、文献 6) において新潟県塩沢の積雪を対象に、温度一定の条件下で一軸引張・圧縮および振り実験を実施した。文献 6) によると、積雪の粘性係数は雪温 θ と密度 ρ に依存し、次式のように与えられる。

$$\eta_i = \tilde{\eta}_{0i} e^{\kappa|\theta|} \cdot e^{\zeta\rho} \quad (1)$$

ここで、下添え字の i は t (引張), c (圧縮), s (せん断) のいずれかの条件を表し、 η_i は各変形下での粘性係数である。また、 $\tilde{\eta}_{0i}, \kappa, \zeta$ は積雪固有の定数であり、積雪により異なる。本研究では雪温 θ が一定の場合を対象とし、式 (1) を以下のように書き換える。

$$\eta_i = \eta_{0i} e^{\zeta\rho} \quad (2)$$

ここで $\eta_{0i} = \tilde{\eta}_{0i} e^{\kappa|\theta|}$ である。

また、積雪の一軸粘性変形下におけるポアソン比 ν は、引張時に 0.5(等体積変形)、圧縮時に 0 となることが知られている⁶⁾。以上の性質を反映させた一般の応

力状態下における積雪の力学モデルは、等方性および温度一定の仮定の下、次式により記述される。

$$\left. \begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= 2\eta_G \mathbf{D} + p \mathbf{I} \\ \text{tr} \mathbf{D} &= 0 \end{aligned} \right\} (p > 0), \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= 2\eta_G \mathbf{D} \quad (p \leq 0), \\ \eta_G &= \eta_0 e^{\zeta\rho} \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、 $\boldsymbol{\sigma}$ は応力、 $p = \text{tr} \boldsymbol{\sigma} / 3$ は圧力(引張を正)、 \mathbf{I} は恒等テンソル、 η_G はせん断粘性係数、 η_0 は定数である。また、 \mathbf{D} はひずみ速度であり次式で与えられる。

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} (\nabla \otimes \mathbf{v} + \mathbf{v} \otimes \nabla) \quad (5)$$

なお、 \mathbf{v} は積雪の変位速度である。

2.2 長時間変形時に生ずる硬化現象⁵⁾

篠島は文献 6) において、短時間載荷 (30 分) と長時間載荷 (50 時間) の実験をそれぞれ行い、短時間載荷実験の結果に基づいて式 (1) に示されるような積雪の力学モデルを構築している。

一方、長時間載荷実験において、引張・圧縮の両変形下での粘性係数が時間の経過と共に増大するという結果が得られている。これは密度一定(引張変形時)かつ温度一定の条件下においても積雪の粘性係数が増大し得ることを意味する。この結果は式 (1) の不備を示唆しており、積雪は密度や雪温以外の影響により硬化し得るということが見出されている。

そこで阿部らは文献 5) において、この硬化現象による影響を抽出し、圧縮載荷ではひずみと以下に示す硬化係数との関係が概ね比例関係にあり、引張載荷では、硬化係数がひずみの二乗に概ね比例するということが明らかにした。

そのひずみ依存性を反映させるために、式 (4) を修正した次の関係式が提案されている。

$$\eta_G = \eta_0 (1 + f) e^{\zeta\rho} \quad (6)$$

$$f = \int_0^t a(p, \bar{\epsilon}) \dot{\epsilon} dt \quad (7)$$

$$a(p, \bar{\epsilon}) = \begin{cases} 2a_t \bar{\epsilon} & (p > 0) \\ \frac{3}{2} a_c & (p \leq 0) \end{cases} \quad (8)$$

ここで、 f は上述のひずみ依存性を表す係数(硬化係数)、 $\bar{\epsilon}$ は次式で与えられる相当ひずみである。また、以降において t は時間を意味する。

$$\bar{\epsilon} = \int_0^t \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\epsilon} : \dot{\epsilon}} dt \quad (9)$$

なお、 $\dot{\epsilon}$ はひずみ速度の偏差成分であり、 $\dot{\epsilon} = \mathbf{D} - \frac{1}{3} (\text{tr} \mathbf{D}) \mathbf{I}$ で与えられる。さらに、式 (8) において a_t, a_c は一軸引張・圧縮時の硬化特性を定めるパラメータである。

ひずみの主軸が変化しない場合、ひずみ速度の時間積分は一軸載荷における対数ひずみを与えることとなる。なお、常に引張載荷状態にある場合は、 $\nu = 0.5$ より、一軸引張変形下での硬化係数 f_t は次式のように表すことができ、軸ひずみ ε の2乗に比例する結果を得る。

$$\begin{aligned} f_t &= \int_0^t 2a_t \bar{\varepsilon} \dot{\varepsilon} dt \\ &= a_t \bar{\varepsilon}^2 = a_t \varepsilon^2 \end{aligned} \quad (10)$$

一方、常に圧縮載荷状態にある場合、 $\nu = 0$ となり、 $3\bar{\varepsilon}/2$ は載荷軸方向の対数ひずみの絶対値を与える。すると式 (6), (7), (8) より、一軸圧縮変形下での硬化係数 f_c は次式のように表すことができ、軸ひずみに比例する結果を得る。

$$\begin{aligned} f_c &= \int_0^t \frac{3}{2} a_c \dot{\varepsilon} dt \\ &= \frac{3}{2} a_c \bar{\varepsilon} = a_c |\varepsilon| \end{aligned} \quad (11)$$

2.3 有限要素方程式²⁾

上で述べたような積雪の力学特性を反映させて有限要素方程式の定式化を行う。積雪は圧縮変形時 ($p \leq 0$) には圧縮性を示し、引張変形時 ($p > 0$) には等体積変形するという性質を持つため、圧力 p の符号によらない解析アルゴリズムの構成、および求解方程式の解法の安定化を図る目的から、積雪の変位速度 \mathbf{v} と圧力 p を未知量としたペナルティ混合法を採用する。このとき、重みつき残差式より部分積分を経て最終的に次式を得る。

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{2\eta_G}{\eta_0} \tilde{\mathbf{D}} : \mathbf{D} d\Omega + \int_{\Omega} \frac{(p)_+}{\eta_0} \text{tr} \tilde{\mathbf{D}} d\Omega \\ = \int_{\Gamma_t} \frac{1}{\eta_0} \mathbf{w} \cdot \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\Omega} \frac{1}{\eta_0} \mathbf{w} \cdot \mathbf{X} d\Omega \quad (12) \\ + \int_{\Omega} w_p (\eta_0 \text{tr} \mathbf{D} - \frac{p}{\gamma}) d\Omega \end{aligned}$$

ここで、 Ω は解析領域、 Γ_t は表面力 $\bar{\mathbf{t}}$ が規定されている境界、 \mathbf{X} は物体力、 \mathbf{w}, w_p は重み関数、 $\tilde{\mathbf{D}} = \frac{1}{2}(\mathbf{w} \otimes \nabla + \nabla \otimes \mathbf{w})$ 、 $(p)_+ = p(p > 0)$ 、 $(p)_+ = 0(p \leq 0)$ 、 $\gamma = G(p > 0)$ 、 $\gamma = 2\eta_G/3\eta_0(p \leq 0)$ であり、 G は等体積変形時に課するペナルティ係数である。なお、以降に示す解析では $G = \eta_G/\eta_0 \times 10^8$ と設定した。

式 (12) の離散化に際し、変位速度 \mathbf{v} および \mathbf{w} には2次元4節点一次要素を用い、圧力 p および w_p には要素内で一定値を取る一定要素近似を用いる。なお、解析では平面ひずみ場を対象とする。

2.4 VOF 法による積雪境界の捕捉

本研究では、積雪の変形挙動の解析に VOF 法³⁾を用いる。有限要素分割された解析領域において、各要素

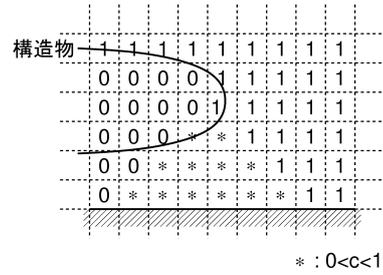


図-1 降雪濃度 c の分布

内における積雪占有率を表す VOF 関数 ψ ($0 \leq \psi \leq 1$) を定義する。積雪領域の変形は ψ の移流によって記述され、各計算セルの ψ の値を移流方程式にしたがって更新して行く。なお式 (12) の離散化は、解析領域全体で展開し、要素毎に求めた係数行列に各要素の ψ を乗じることで求解方程式を構成する。

ψ が満たす移流方程式は次式で表され、この式を解き進めることによって界面を捕捉する。

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \psi = 0 \quad (13)$$

なお VOF 関数の補間に関しては、 ψ の発展過程を高精度かつ安定に解析する目的から CIP 法⁴⁾を用いる。しかし、高精度の解法を用いても数値拡散の発生を完全に防ぐことは不可能であり、解析を進めていくうちに ψ の移流が適切に行われなくなる恐れがある。そこで本手法では各時間ステップにおいて、 $\psi \approx 0$ (負の場合を含む) となった要素は $\psi = 0$ 、 $\psi > 1$ となった要素は $\psi = 1$ に修正する。また $0.9 < \psi < 1$ でありながら積雪面を有していない要素 ($\psi = 1$ となる前に積雪面が他要素に移ってしまった場合) に関してはその要素の ψ を 1 にするという処理を行っている。

3. 降積雪過程のモデル化

次節以降の解析例では、無風状態下での降積雪問題を対象とする。ただし、本節で述べる降雪の簡易モデルは、一定方向に吹く一様な風の影響を考慮して構成されている。

3.1 降雪濃度

降雪は、風による空気の乱れなどの影響により、粒子単位で揺らぎを持ちながら落下していく。そのため、降雪が構造物の下に回りこむこともある。このような降雪の運動の厳密な再現には、空気の流れを解析し、降雪の移流拡散問題を解き進める必要がある。しかし、本研究の主目的は、積雪の堆積過程の再現にあり、そのためここでは降雪過程を簡易モデルで表現することで計算時間の短縮を図ることとする。本研究では降雪過

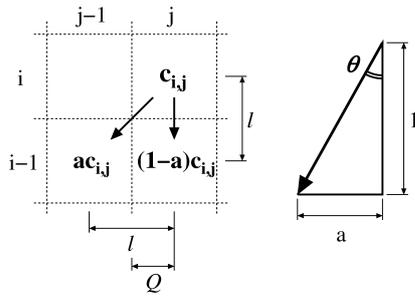


図-2 降雪の移流モデル

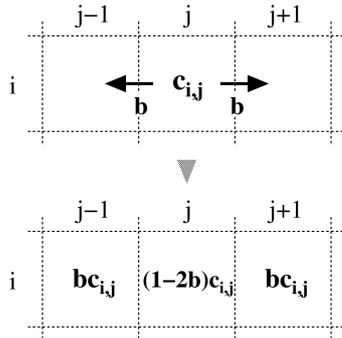


図-3 降雪の拡散モデル

程のうち、落下を移流、揺らぎを拡散とした2つの過程に分けて以下に示すような簡易モデルで表現する。

図-1のように解析領域を正方形有限要素で分割する場合を考える。その下で、ある要素 (i, j) における降雪濃度 $c_{i,j}$ を次式で定義する。

$$\rho_{i,j} = c_{i,j} \bar{\rho} \quad (14)$$

ここで、 $\rho_{i,j}$ は要素 (i, j) における降雪の質量密度、 $\bar{\rho}$ は障害物の無い無限空間における降雪の質量密度である。全く障害物の無い領域において $c_{i,j}$ は1、逆に全く降雪の無い領域（構造物や積雪で完全に占められている要素も含む）では0、構造物や積雪の下方の様に降雪強度が小さくなるような領域では $0 < c_{i,j} < 1$ となる。

3.2 降雪の簡易移流拡散モデル

解析領域における降雪濃度分布の具体的設定手順について述べる。まず降雪の落下に相当する移流モデルを図-2に示す。一様な風の下、図のように $\tan\theta = a$ の方向に雪が降っているものとする。ある要素 (i, j) の降雪濃度を $c_{i,j}$ とした場合、下方に位置する2要素 $(i-1, j-1), (i-1, j)$ に対して濃度を $ac_{i,j}, (1-a)c_{i,j}$ で分配するものとする。なお図中の Q は濃度の重心移動距離であり、降雪の鉛直方向移動距離を l とした場合 $Q = la$ で与えられる。

次に揺らぎに相当する拡散モデルを図-3に示す。拡散の処理は同一段の要素間において行う。ある要素 (i, j)

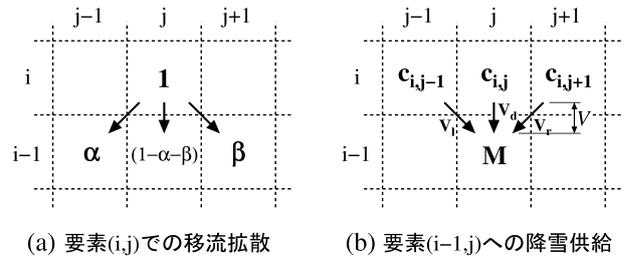


図-4 降雪の移流拡散モデル

の両隣の2要素 $(i, j-1), (i, j+1)$ に対して降雪濃度をそれぞれ $bc_{i,j}$ で分配するようなモデルとする。なお b は拡散方程式に基づいて決定されるパラメータであり、詳しくは3.5で述べる。

降雪は拡散しながら下方へ落下するため、上記の移流過程と拡散過程とを組み合わせる。今、図-4(a)のように i 段における要素 (i, j) を考える。この場合、要素 (i, j) から下方の $i-1$ 段における3要素 $(i-1, j-1), (i-1, j), (i-1, j+1)$ に対して降雪の供給がなされ、濃度はそれぞれ $ac_{i,j}, \{1 - (\alpha + \beta)\}c_{i,j}, \beta c_{i,j}$ と分配される。なお、 $\alpha = a + b - 3ab, \beta = b(1 - a)$ である。

この操作を i 段の各要素について実施し、 $i-1$ 段の要素における降雪濃度を求める。さらに、同様の操作を順次下段要素に対して行うことで、領域全体の降雪濃度分布を作成する。なお、領域内に構造物や積雪などの障害物が存在する場合、これらの要素では $c = 0$ となるため、構造物下方への降雪供給量は何も存在しない領域に比べて小さくなる。また、積雪の成長および圧密変形に伴い積雪領域は変化するため、各要素の降雪濃度も変化する。本解析では積雪の成長速度、時間増分などに応じて適宜数ステップ毎に降雪濃度分布を更新する。

3.3 積雪の成長解析

降雪が雪に付着することで積雪面は成長する。また降雪は風の影響および拡散により鉛直な面に付着することもある。さらに、降雪が供給される積雪面は必ずしも水平とは限らず、その形状に応じて積雪は堆積していく。そこで本研究では、前節に示した降雪過程の簡易モデルに基づいて積雪面の様々な向きに対する積雪成長過程のモデル化を行った。以下にその具体的計算手順を示す。

まず、降雪粒子の鉛直下方移動速度成分を V とすると、水平な単位面積を単位時間当りに通過する降雪質量 m_s は、降雪の質量密度 $\bar{\rho}$ を用い次式で表される。

$$m_s = \bar{\rho} V \quad (15)$$

一方、水平面での積雪堆積速度を U とすると、積雪

の初期密度 ρ_0 を用いて次式が成り立つ。

$$m_s = \rho_0 U \quad (16)$$

なお、本簡易モデル下では積雪面近傍における雪粒子の跳躍、浮遊などは考慮しないものとする。

式 (15),(16) から次式を得る。

$$\bar{\rho} V = \rho_0 U \quad (17)$$

ここで ρ_0 , U , V が事前に与えられていれば、式 (17) より $\bar{\rho}$ を決定することができる。

図-4(b) に示すように、3要素 $(i, j-1), (i, j), (i, j+1)$ における降雪濃度をそれぞれ $c_{i,j-1}, c_{i,j}, c_{i,j+1}$ で与えると、要素 $(i-1, j)$ へは $(i, j-1), (i, j), (i, j+1)$ の3要素から降雪が供給される。各要素から単位時間当りに供給される降雪質量はそれぞれ次式で与えられる。

$$\begin{cases} \beta \rho_{i,j-1} V, \\ \{1 - (\alpha + \beta)\} \rho_{i,j} V, \\ \alpha \rho_{i,j+1} V \end{cases} \quad (18)$$

ただし、式 (18) は単位体積当りで表している。また、図-4(b) に示すように $(i, j-1)$ から $(i-1, j)$ に移動して来る降雪粒子の移動速度ベクトルを \mathbf{V}_l 、同様に $(i, j), (i, j+1)$ からの移動速度ベクトルを $\mathbf{V}_d, \mathbf{V}_r$ とし、それぞれ鉛直下方成分が V で与えられるものとして簡易化すると、各ベクトルの成分は $\mathbf{V}_l = (V, -V)$, $\mathbf{V}_d = (0, -V)$, $\mathbf{V}_r = (-V, -V)$ で与えられる。

また、各ベクトルに平行な単位ベクトルをそれぞれ $\mathbf{s}_l, \mathbf{s}_d, \mathbf{s}_r$ とすると、 $\mathbf{V}_l = \sqrt{2}V\mathbf{s}_l$, $\mathbf{V}_d = V\mathbf{s}_d$, $\mathbf{V}_r = \sqrt{2}V\mathbf{s}_r$ となる。すると要素 $(i-1, j)$ においては、 $\mathbf{s}_l, \mathbf{s}_d, \mathbf{s}_r$ の3つの方向に、式 (18) で与えられる輸送量の雪が運動していると解釈できる。

次に、要素 $(i-1, j)$ に積雪面が存在しており、その外向き法線ベクトルが \mathbf{n} で与えられているものとする。このとき、当該の単位積雪面に単位時間当りに供給される降雪質量 M は式 (17) より次式で与えられる。

$$\begin{aligned} M = & -\rho_0 U \{ \sqrt{2}\beta c_{i,j-1} \mathbf{s}_l \\ & + [1 - (\beta + \alpha)] c_{i,j} \mathbf{s}_d \\ & + \sqrt{2}\alpha c_{i,j+1} \mathbf{s}_r \} \cdot \mathbf{n} \end{aligned} \quad (19)$$

すると、 \mathbf{n} 方向に成長していく積雪の堆積速度 V_s は、式 (19) より次式で与えられる。

$$\begin{aligned} V_s = & \frac{M}{\rho_0} \\ = & -U \{ \sqrt{2}\beta c_{i,j-1} \mathbf{s}_l \\ & + [1 - (\beta + \alpha)] c_{i,j} \mathbf{s}_d \\ & + \sqrt{2}\alpha c_{i,j+1} \mathbf{s}_r \} \cdot \mathbf{n} \end{aligned} \quad (20)$$

以上より、積雪堆積速度ベクトル \mathbf{v}_s は次式により与えられる。

$$\mathbf{v}_s = V_s \mathbf{n} \quad (21)$$

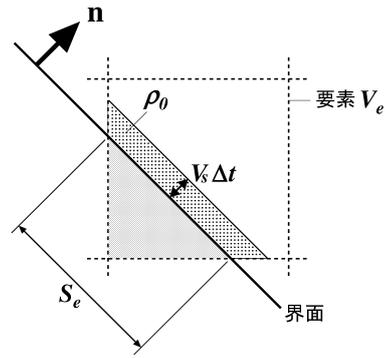


図-5 積雪面を有する要素への降雪の供給

式 (20),(21) より算出された積雪堆積速度ベクトル \mathbf{v}_s を、有限要素方程式から算出される積雪の変位速度 \mathbf{v} に加え $\mathbf{v} + \mathbf{v}_s$ と補正することによって、降雪積過程における VOF 関数の移流計算を実行する。

3.4 降雪供給に伴う積雪密度 ρ の更新

積雪密度は変形と共に変化するが、積雪境界では降雪により雪が堆積するため、それによる Euler メッシュ上での密度更新も必要となる。図-5 のように積雪面 ($\psi = 0.5$ の等高線) を内部に含んだ有限要素 V_e を考える。 V_e で切り取られる積雪面の長さを S_e とする。なお、積雪堆積速度ベクトル \mathbf{v}_s は、式 (21) より $\mathbf{v}_s = V_s \mathbf{n}$ で与えられる。ここで、 \mathbf{n} は ψ を用いて次式で与えられる。

$$\mathbf{n} = \frac{-\nabla \psi}{|\nabla \psi|} \quad (22)$$

この要素に対して微小時間 Δt 間に降雪供給がなされるとき、積雪面上には厚さ $V_s \Delta t = \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n} \Delta t$ の新たな雪の堆積を生ずる。よって、 Δt 間における V_e 内の積雪の質量増分 Δm は次式で与えられる。

$$\Delta m = \rho_0 \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n} \Delta t S_e \quad (23)$$

すると、要素内の平均密度増分 $\Delta \rho$ は次式によって与えられることとなる。

$$\Delta \rho = \frac{\Delta m}{V_e} = \frac{\rho_0 \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n} \Delta t S_e}{V_e} \quad (24)$$

上式を変形し、時間に関して極限をとると次式を得る。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho_0 \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{n} \frac{S_e}{V_e} \quad (25)$$

ここで、積雪面境界 S に沿って特異性を示すデルタ関数 $\delta(S)$ を定義すると、次式を得る。

$$S_e = \int_{V_e} \delta(S) dV \quad (26)$$

また

$$\mathbf{n} \delta(S) \simeq -\nabla \psi \quad (27)$$

と近似すると、式 (26), (27) より次式を得る.

$$\mathbf{n} S_e \simeq -\nabla \psi V_e \quad (28)$$

式 (28) を (25) に代入し、式 (22) を考慮すると最終的に次式を得る.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho_0 V_s \frac{-|\nabla \psi|^2}{|\nabla \psi|} = \rho_0 V_s |\nabla \psi| \quad (29)$$

式 (29) を積雪変形による密度の連続式²⁾, $\partial \rho / \partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = -\rho \nabla \mathbf{v}$ に加えると次式を得る.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho = -\rho \nabla \mathbf{v} + \rho_0 V_s |\nabla \psi| \quad (30)$$

式 (30) に基づく積雪密度更新の際には左辺にのみ CIP 法を適用し、その後右辺に関する計算を行うという 2 段階の計算手順をとる.

3.5 拡散パラメータ b の決定

降雪濃度 c に関して水平 (x 軸) 方向の拡散方程式は次式のように与えられる.

$$\frac{\partial c}{\partial t} = k \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \quad (31)$$

ここで k は拡散係数である. 式 (31) から、長さ l の分割下で次の差分式を得る.

$$\Delta c_{i,j} = \frac{k \Delta t}{l} (c_{i,j-1} + c_{i,j+1} - 2c_{i,j}) \quad (32)$$

ここで、**3.2** に述べた簡易モデルで、一段下の要素に降雪供給がなされる間の時間 l/V を時間増分 Δt にとる. **3.2** での議論より、簡易モデルでは時間増分 Δt の間に要素 (i, j) から隣接する 2 要素 $(i, j-1), (i, j+1)$ に濃度 $bc_{i,j}$ がそれぞれ分配されることとなるので、式 (32) との対応から次式が成り立つ.

$$bc_{i,j} = \frac{k \Delta t}{l} c_{i,j} = \frac{k}{V} c_{i,j} \quad (33)$$

したがって、 b は次式で与えられる.

$$b = \frac{k}{V} \quad (34)$$

4. 1次元降積雪場の解析による妥当性の検証

水平な雪面が一様な降雪を受ける 1 次元的な問題を対象に構成手法を適用し、以下の半解析解と比較することでその妥当性を検証する.

4.1 半解析解の導出

速度 U で雪が一様に堆積する場合を考える. なお、圧密を受けず無変形状態であれば、時刻 $t = t_0$ において高さ h_0 に位置することになる雪が、圧密変形を受けて時刻 t において $h(t, h_0)$ の位置にあるものとする.

t_0 までに降った雪の上には、時刻 $t > t_0$ において $\rho_0 U(t - t_0)$ だけの質量の雪が積もっている. よって、 t_0 に降った雪の上に作用する圧縮応力 σ は次式で与えられる.

$$\sigma(t, t_0) = g \rho_0 U(t - t_0) \quad (t \geq t_0) \quad (35)$$

ここで、 g は重力加速度である.

積雪のひずみ速度 $\dot{\epsilon}$ (圧縮を正) は次式で与えられる.

$$\dot{\epsilon} = \frac{1}{\eta_c} \sigma = \frac{1}{\eta_0 c} \sigma e^{-\zeta \rho} \quad (36)$$

ここで η_c は式 (2) で与えられる圧縮粘性係数である. また、無変形時に dh_0 であった積雪厚が時刻 t で dh になっているとすると、 $\dot{\epsilon}$ は次式で与えられる.

$$\dot{\epsilon} = -\frac{dh}{dh_0} = -\frac{dh}{dh_0} \frac{dh_0}{dh} \quad (37)$$

また、密度 ρ に関しては以下の式が成り立つ.

$$\rho = \rho_0 \times \frac{dh_0}{dh} \quad (38)$$

ここで $A = dh/dh_0$ とおくと、 dh_0 は時間に依存しないので、 $\dot{A} = \dot{dh}/dh_0$ となり、式 (37), (38) は以下のように表される.

$$\dot{\epsilon} = -\dot{A} \times \frac{1}{A} \quad (39)$$

$$\rho = \frac{\rho_0}{A} \quad (40)$$

式 (39) を式 (36) に代入し、変形すると次式を得る.

$$-\frac{\dot{A}}{A} e^{\frac{\zeta \rho_0}{A}} = \frac{g \rho_0 U}{\eta_0 c} (t - t_0) \quad (41)$$

ここで $1/A = r$, $t - t_0 = \tau$ とすると、 $dA/A = -dr/r$ となり、 $A(t = t_0) = 1$ より次式を得る.

$$\int_1^r \frac{1}{r} e^{\zeta \rho_0 r} dr = \int_0^\tau \frac{g \rho_0 U}{\eta_0 c} \tau d\tau \quad (42)$$

式 (42) の両辺を各々積分して次式を得る.

$$E_i(\zeta \rho_0 r) - E_i(\zeta \rho_0) = \frac{g \rho_0 U}{2 \eta_0 c} (t - t_0)^2 \quad (43)$$

ここで E_i は積分指数関数である.

時刻 t_0 に積もった雪の時刻 t における圧縮比 dh/dh_0 は、式 (43) を満たす r を用いて以下のように与えられる.

$$\frac{dh}{dh_0} = A = \frac{1}{r} \quad (44)$$

すると dh は次式のように表すことができる.

$$dh = \frac{dh_0}{r} = \frac{U}{r} dt \quad (45)$$

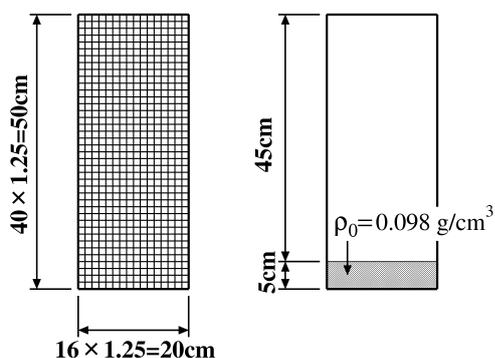


図-6 積雪深時刻歴解析における領域要素分割および解析条件

よって、時刻 t における積雪深 $H(t)$ は次式によって得られる。

$$H(t) = \int_0^H dh = \int_0^t \frac{U}{r} dt \quad (46)$$

$H(t)$ の計算に際し、時間増分 Δt の下で式 (46) を離散化する。式 (43) において、 $\tau = i\Delta t$ に対する r を r_i と定義し、Newton-Raphson 法を用い r_i について解く。

$t = n\Delta t$ での積雪深を H_n とすると、 H_n は次式で近似評価できる。

$$H_n \doteq U\Delta t \sum_i^n \frac{1}{r_i} \quad (47)$$

4.2 解析条件

解析条件を図-6 に示す。20cm×50cm の矩形領域を 1 辺 1.25cm の正方形要素で分割し、領域底部に初期密度 $\rho_0 = 0.098\text{g/cm}^3$ (=新雪密度) の初期積雪を 5cm 与える。時間増分 60s の下、降雪供給を 30 時間行い、積雪深の時刻歴を算出する。

また降雪条件は、文献 9), 10), 11) を参考に、降雪落下速度 $V = 1.0\text{m/s}$ 、積雪堆積速度 $U = 1.0\text{cm/hr}$ とした。このとき式 (17) より、障害物の無い空間における降雪質量密度 $\bar{\rho}$ は、 $\bar{\rho} = 2.78 \times 10^{-7}\text{g/cm}^3$ となる。なお、本解析では風は与えていない。

本研究では積雪の粘性係数を式 (2) により与えているが、式中の定数 η_0 , ζ を $\eta_0 = 2.085 \times 10^2(\text{N} \cdot \text{s/cm}^2)$, $\zeta = 25.3$ と設定した²⁾。

また、引張変形時の硬化パラメータ a_t および圧縮変形時の硬化パラメータ a_c に関しては、いずれもゼロとしている。

4.3 解析結果

解析結果を図-7 に示す。図は積雪深の時刻歴変化の様子を表したものであり、比較のため半解析解と合わせて図示している。なお、本研究における積雪領域の境界線、すなわち積雪面は VOF 関数 $\psi = 0.5$ の等高

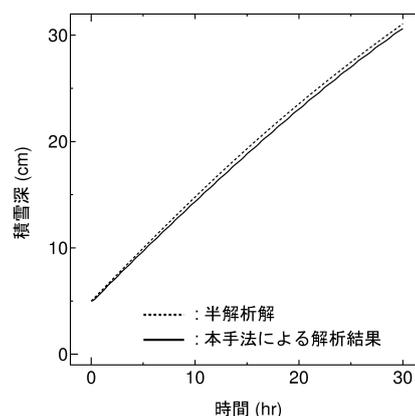


図-7 積雪深の時刻歴解析結果と半解析解との比較

線としている。図から、本手法による解析結果が、半解析解と同様に上に凸な曲線を描いていることを確かめることができる。時間の経過とともに多少の差異が認められるものの、全時刻に亘り 1 % 程度の精度が得られており、本手法の妥当性が確認できる。

5. 積雪中のはりに作用する沈降荷重の解析

Nakamura は文献 1) において、幅 200cm、高さ 90cm、奥行き 100cm の箱の中央に 10cm×10cm の正方形断面のはりを高さ 50cm の位置に水平奥行き方向に設置し、そこに屋外採取した新雪を充填し、はりに作用する沈降荷重を計測した。沈降荷重の計測は、はりが積雪中に埋没した時点から開始され、1 日に 1 回の間隔で行われ、文献 1) には 7 日経過時までの計測結果が示されている。以下ではこの Nakamura の実験の再現解析を行う。

なお当該実験の再現解析として、阿部ら²⁾⁵⁾は予めはりが埋設された積雪を解析初期条件として与え、圧密変形解析を行っている。一方、本解析では雪の供給を与えることで新雪の充填過程を再現し、その下での沈降荷重の算出を行った。

5.1 解析条件

解析条件を図-8, 図-9 に示す。幅 75cm、高さ 100cm の領域を、1 辺 1.25cm の正方形要素により一様分割した。なお、本解析では風は与えておらず、問題の対称性から右半分のみを解析領域としている。また図-8 に示すように、領域底部には初期密度 $\rho_0 = 0.117\text{g/cm}^3$ の積雪を 10cm 与える。なお本手法下での積雪の成長解析には初期積雪の設定を要するため、はり上面に対し初期密度 $\rho_0 = 0.098\text{g/cm}^3$ の積雪を厚さ 2.5cm、はり側面に対しては $\rho_0 = 0.129\text{g/cm}^3$ の積雪を厚さ 1.25cm それぞれ与えた。また文献 2), 5) と同様に、積雪とはりおよび壁面との間に摩擦は一切生じないものとした。

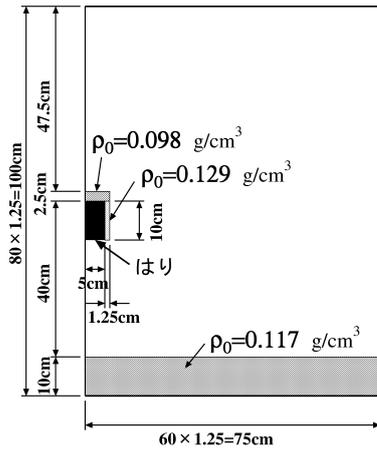


図-8 はりに作用する沈降荷重の解析条件

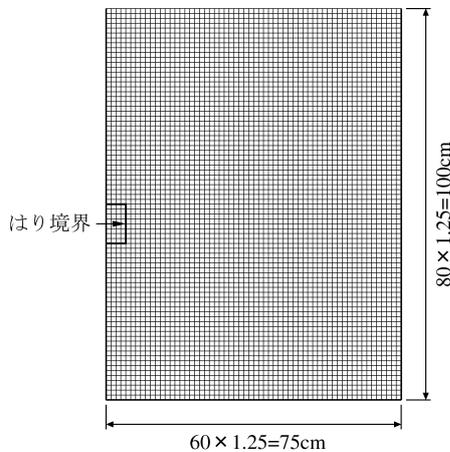


図-9 解析領域の要素分割

次に雪の充填条件について述べる。本解析では、最終的にはり上部に積もる積雪の質量を文献1)での実験と揃えることとし、はり上部の積雪質量が単位面積当たり 3.724g/cm^2 となった時点で雪の供給を終了させる。また図-10(後出)より、実験では約13時間で雪の充填を終了していたものと推測される。そこでその条件に合致する様に、降雪落下速度 $V = 1.0\text{m/s}$ 、積雪堆積速度 $U = 6.0\text{cm/hr}$ と設定した。さらに、測定開始時における雪の充填条件を実験に合わせるため、新雪密度 ρ_0 に関して $1.20 \times 10^4\text{s}$ 経過までは 0.117g/cm^3 、その後 $2.40 \times 10^4\text{s}$ 経過までは 0.129g/cm^3 、さらに降雪供給終了までは 0.098g/cm^3 と、時間の経過とともにその値を変更する。この時、これら3つの初期密度に対する $\bar{\rho}$ はそれぞれ $1.95 \times 10^{-6}\text{g/cm}^3$ 、 $2.15 \times 10^{-6}\text{g/cm}^3$ 、 $1.63 \times 10^{-6}\text{g/cm}^3$ となる。なお、解析初期にはり上に降雪を供給せず、積雪深がはり上の積雪面 (52.5cm) に一致すると同時にはり上にも雪を供給させる。また、式(34)の b は 0.01 s^{-1} とした⁷⁾。粘性係数の設定については、文献2)と同じく密度 $\rho < 0.11\text{g/cm}^3$ のと

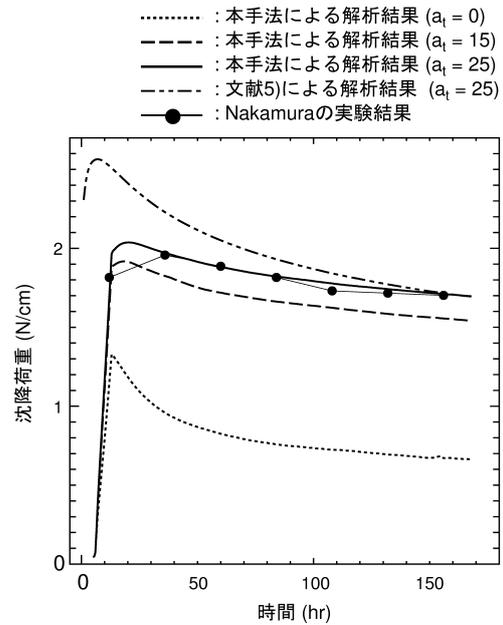


図-10 はりに作用する沈降荷重の時刻歴

き $\eta_0 = 10.58 \times (\text{N} \cdot \text{s}/\text{cm}^2)$ 、 $\zeta = 52.4$ 、 $\rho \geq 0.11\text{g/cm}^3$ のとき $\eta_0 = 2.085 \times 10^2 (\text{N} \cdot \text{s}/\text{cm}^2)$ 、 $\zeta = 25.3$ と設定した。

引張変形時の硬化パラメータ a_t は文献5)と同様に0,15,25と値を変更し、それぞれの結果を比較する。また圧縮変形時の硬化パラメータ a_c に関してはこれまでと同様にゼロのまま一定に設定した。なお本解析の場合、積雪堆積速度が速いため、降雪濃度の更新は毎ステップ行う。

以上の設定の下、時間増分を60sとし、降雪の供給を $4.68 \times 10^4\text{s}$ (13時間) まで行い、その後圧密変形を進行させ、約 $6.05 \times 10^5\text{s}$ (7日間) 経過までの解析を実施した。

5.2 解析結果の検討

(1) はりに作用する沈降荷重の時刻歴

$a_t = 0, 15, 25$ としたときのはりに作用する沈降荷重の時刻歴を、Nakamuraの実験結果および文献5)で $a_t = 25$ とした場合の解析結果と合わせ図-10に示す。本解析により得られた沈降荷重は、いずれも降雪供給時は増加し続け、供給終了後は徐々に減少している。

なお、本解析結果で $a_t = 0, 15, 25$ とした場合をそれぞれ比較すると、沈降荷重の減少傾向は、文献5)の場合と同様にパラメータ a_t の増加とともに緩和されることがわかる。また、それと同時に沈降荷重の値も大きく異なり、 $a_t = 25$ とした場合の結果は $a_t = 0$ とした場合の約2倍の値を示している。これらのことから、引張変形に関する硬化現象が沈降荷重の推移特性に及ぼす影響は大きいことが確認できる。

$a_t = 25$ とした場合の本解析結果が、Nakamura の実験結果に非常に近い値を示した。そこで $a_t = 25$ とした場合の本解析結果を、同じく $a_t = 25$ とした場合の文献 5) での解析結果と比較する。文献 5) における沈降荷重は、初期段階で実験値より 25 % 程度大きな値をとり、その後時間経過とともに減少し、実験値に漸近して行く傾向を示している。一方、本解析結果は解析時刻全体に亘り実験との良好な一致を示している。前者の解析では、解析開始時に所定の積雪深が設定されており、その下で無変形の積雪に対して同時に自重が作用するため、初期に過大な沈降荷重が発生したものと考えられる。一方、新雪が徐々に充填されていく Nakamura の実験や本解析の場合、積雪の充填が完了するまでに下層の積雪では既に圧密変形が進行しており、そのため初期の沈降荷重が相対的に低くなったことが推測される。

以上より、Nakamura の実験におけるはりの沈降荷重の発現には、積雪の充填過程と変形に伴う硬化現象の 2 つが大きく関与していることが明らかとなった。また、このことから、一般の積雪沈降荷重の適切な評価においても、降積雪過程の再現と硬化特性のモデル化が重要となることが結論づけられる。

(2) 圧力分布と密度分布

$a_t = 25$ としたときの、本解析による最終時刻における圧力 p の分布、密度 ρ の分布をそれぞれ図-11、12 に示す。これらの図より、はりの影響はその側方 30cm の範囲内に及び、それ以遠では概ね様な変形状態となっていることがわかる。またはり上部の角から側面付近にかけて最大約 $9.0 \times 10^{-2} \text{N/cm}^2$ 前後の引張力が発生しており、この引張力がはりに作用する大きな沈降荷重を引き起こしているものと考えられる。

また図-12 を見ると、はり側面付近の積雪密度が他の箇所比べて小さくなっている。その値は約 0.1g/cm^3 となっており、新雪密度と同程度の値のままであることがわかる。これは、はり付近に引張力が作用することと、引張時には等体積変形するという積雪特有の性質により、はり付近の積雪に密度変化を生じなかったためと考えられる。一方、領域右端底部の積雪密度は 0.271g/cm^3 であり、最大値を示している。なお、積雪の右側中段部付近の密度が局所的に高くなっているのは、前述のように雪の充填過程における積雪密度が下方から順に 0.117g/cm^3 、 0.129g/cm^3 、 0.098g/cm^3 と変化しているためである。

(3) 積雪面形状の比較

最後に本解析結果 ($a_t = 0, 25$) と Nakamura の実験結果における 3.7 日経過時の積雪面形状の比較を行う。結果を図-13 に示す。なお図中の各線は積雪面を示しており、解析結果においては $\psi = 0.5$ の等高線を描画したものである。 $a_t = 0, 25$ とした場合の本解析結果を比較すると、はり側面付近の形状に顕著な差異が認め

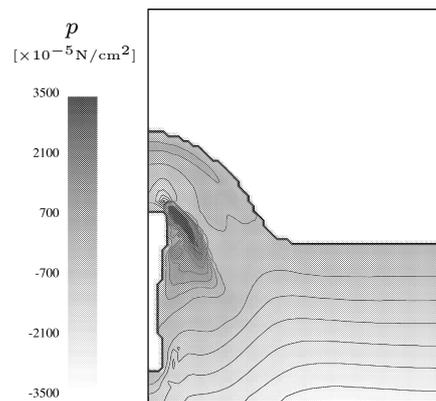


図-11 最終時刻における圧力 p の分布

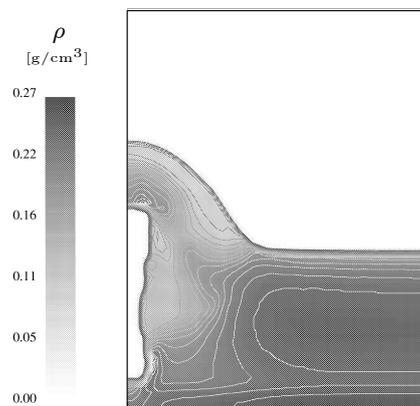


図-12 最終時刻における密度 ρ の分布

られる。図-11 に示したように、はり側面付近には引張力が集中して発生しているが、 a_t の値を大きく設定したことによって積雪の硬化現象が反映され、その結果変形の進行が抑制されたことが窺える。なお、両者のはり上部の積雪厚が等しいにも関わらず、図 10 に示した沈降荷重値の時刻歴には大きな差が見られる。このことは、沈降荷重の値は構造物の上部に存在する積雪のみならず、周辺の積雪の変形の影響を大きく受けるということを示しており、硬化現象を考慮したことにより荷重値に差を生じたものと思われる。また、 $a_t = 25$ とした本解析における雪面形状が実験結果と比較的近いことから、硬化モデルの妥当性を再確認することができる。

なお本解析結果は、はり周辺では実験結果に比べて変形が小さく目であり、逆に領域右側では大きく目となっている。文献 1) では雪の充填方法について詳細が述べられていない。そのため、解析では 5.1 に述べた様にして雪の充填条件を設定した。積雪面の高さの差は最大で約 5cm 程度となっているが、この差の原因の 1 つとして、実験時における実際の雪の充填方法と解析条件との違いが考えられる。

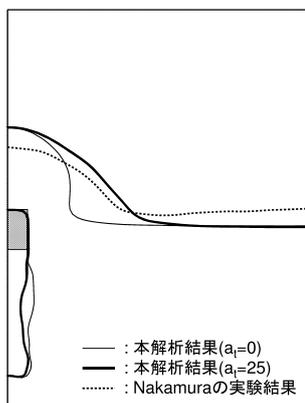


図-13 3.7日経過時における積雪面形状の比較

6. おわりに

本研究では降雪供給による堆積を伴った積雪の変形解析手法の構築を試みた。本研究を通して得た結果は以下の通りである。

(1) 降積雪過程解析手法の構築

降雪過程を簡易な移流・拡散モデルで与え、当該事象に対する計算量の軽減を図った。また、降雪からの雪の供給を積雪の変形過程に組み込むことで、積雪の成長・変形解析を構成した。一樣な降積雪場の問題に本手法を適用し半解析解と比較することで、その妥当性を確認した。

(2) Nakamuraによる実験の再現解析

Nakamuraによってなされた、はりに作用する積雪沈降荷重の測定実験に提案手法を適用し、その再現解析を試みた。その結果、Nakamuraの実験で得られた沈降荷重の発現特性の説明には、積雪の充填過程の考慮と文献5)に構築した雪の硬化現象の2つが不可欠であることが明らかとなった。なお、実際の積雪は降雪による堆積過程を経ながら自重による変形を受けることとなる。したがって、そのような状態下における雪荷重の適切な評価には、上述の2つの効果を考慮することが重要になるものと思われる。

(3) 今後の課題

本研究では、積雪の堆積・変形過程の解析を主目的とした。その際に、降雪による雪の供給過程については上述のように簡易なモデルを用いた。しかし、吹雪を伴う積雪形成とその力学挙動とを解析対象とする場合、風による影響の適切な評価が必要となる。そのためには吹雪の物理モデルの導入^{7),8)}が不可欠であるが、この点については今後の課題としたい。

参考文献

- 1) Nakamura, H. : Studies on the settlement force of snow as a generation mechanism, *Rep. of NRCDDP*, No.41,361-385, 1988.
- 2) 阿部和久, 紅露一寛 : VOF法を用いた積雪変形有限要素解析法, 構造工学論文集, Vol.51A, 277-284, 2005.
- 3) Hirt, C.W. and Nichols, B.D. : Volume of Fluid (VOF) Method for the Dynamics of Free Boundaries, *J. Comp. Phys.*, **39**, 201-225, 1981.
- 4) T.Yabe and T.Aoki : A universal solver for hyperbolic equations by cubic-polynomial interpolation, I. One-dimensional solver, II. Two- and three- dimensional solvers, *Comp. Phys. Commun.*, **66**, 219-242, 1991.
- 5) 阿部和久, 紅露一寛 : 雪の硬化現象のモデル化と積雪変形有限要素解析への適用, 構造工学論文集, Vol.52A, 109-117, 2006.
- 6) 篠島健二 : 雪の粘弾性的取り扱い, 鉄建報告, No.328, 1962.
- 7) 山下四郎, 河村哲也 : 防雪柵まわり流れと堆雪形成の数値的研究, 日本雪氷学会誌「雪氷」, 62巻5号, 451-461, 2000.
- 8) 根本征樹, 西村浩一 : 吹雪の物理モデルの現状と課題, 日本雪氷学会誌「雪氷」, 65巻3号, 249-260, 2003.
- 9) 石坂雅昭 : 雪粒付雪片の落下速度について, 日本雪氷学会誌「雪氷」, 57巻3号, 229-238, 1995.
- 10) 梶川正弘, 後藤博, 金谷晃誠, 菊池勝弘 : 気象要素を考慮した新積雪密度の推定式, 日本雪氷学会誌「雪氷」, 66巻5号, 561-565, 2004.
- 11) 梶川正弘, 後藤博, 猿渡琢, 金谷晃誠, 橋本正秀, 菊池勝弘 : 新積雪密度と降雪粒子の諸特性の関係, 日本雪氷学会誌「雪氷」, 67巻3号, 213-219, 2005.

(2007年9月18日 受付)