構造工学論文集 Vol.54A (2008 年 3 月)　土木学会

B-spline Ritz 法による中実円筒体の 3 次元自由振動解析

Three-dimensional free vibration analysis of solid circular cylinders using the B-spline Ritz method

名木野　晴暢*，三上　隆**，水澤　富作***
Harunobu Nagino, Takashi Mikami and Tomisaku Mizusawa

*博 (工)　大分工業高等専門学校助教　都市システム工学科 (〒870-0152 大分市大字牧 1666 番地)
**工博　北海道大学大学院教授　工学研究科北方圏環境政策工学専攻 (〒060-8628 札幌市北区北 13 条西 8 丁目)
***工博　大同工業大学教授　都市環境デザイン学科 (〒457-0818 名古屋市南区白水町 40)

This paper presents the three-dimensional free vibration analysis of solid circular cylinders with any lengths and arbitrary boundary conditions using the B-spline Ritz method based on the theory of elasticity. The proposed method is formulated by the Ritz procedure with the double series of B-spline functions as amplitude displacements and the Fourier series. To demonstrate the convergence and accuracy of the present method, several examples are solved, and the results are compared with other published solutions by the Ritz method with global functions based on the theory of elasticity. Rapid, stable convergence and excellent upper bound solution are obtained by the present method. Moreover, the effects of length-radius ratio and circumferential wave number on frequency parameters of solid circular cylinders having clamped and stress free boundary conditions are also investigated.

Key Words: solid circular cylinder, three-dimensional analysis, free vibration, B-spline Ritz method, theory of elasticity
キーワード：中実円筒体，3 次元解析，自由振動，B-spline Ritz 法，弾性論

1. まえがき

中実円筒体 (以下，円筒体) は，橋梁の橋脚，海洋構造物の基礎工やシャフトに代表されるように各種構造物を支える基礎的な構造要素として用いられる．近年，構造技術の発展にともない，構造物は，大型化かつ長大化の傾向にある．これらの構造物は，静的な外力に加え，地震動，波浪，風荷重や衝撃荷重などの種々の周波数特性を有する複雑な動的外力を受ける．したがって，動的な構造設計においては, 円筒体の正確な自由振動特性 (固有振動数と固有振動モード) の把握が重要になる．

さて, 十分に長い円筒体の軸対称振動や曲げ振動に関する自由振動解析では, 棒理論や梁理論などの近似理論による解析が可能であるが, 円筒体の半径 (直径) に対してその長さが小さくなると，面外せん断変形や運動にともなう慣性力の影響が顕著に現れ，また，半径方向の応力-ひずみ成分が無視できなくなるため，近似理論の適用が困難になり，さらに, 円周方向の波数が大きな円筒体の自由振動特性を把握する必要がある場合には, 近似理論が適用できなくなる．したがって，円筒体のより正確な自由振動特性を把握するためには, 円筒弾性体としての正確な境界条件および半径方向の影響を厳密に取り扱うことができる 3 次元弾性論に基づかねばならない．しかしながら，3 次元弾性論に基づく円筒体の自由振動問題は, 面内変位と面外変位が連成する 3 元連立偏微分方程式の境界値問題に帰着されるため，任意の境界条件下では，厳密な解を得ることが困難になるので, 何らかの数値解析法によって近似的に解を得ねばならない．

Armenakas ら [1] は, 無限長の円筒体の自由振動問題を wave propagation 法により解析している．McMahon[2] は，差分法を用いて，初めて相対する 2 面が自由な有限長の円筒体の軸対称自由振動問題を解析し，また，自由振動実験 [3] も実施している．Hutchinson[4), 5] は，級数解法を提示し，相対する 2 面が自由な円筒体の自由振動問題を解析している．Gladwell・Tahbildar[6] は，有限要素法を用いて，円筒体の軸対称自由振動問題を解析している．また，Gladwell・Vijay[7] は，有限要素法を用いて，初めて円周方向の波数を一般的に取り扱い，相対する 2

面が自由な円筒体の自由振動解析を行なっている．Nelson ら [8] は，半径方向に 2 次の形状関数を，Cheung・Wu[9] と Loy・Lam[10] は，半径方向に 1 次の形状関数を仮定した finite layer 法を用いて，円筒体の自由振動解析を行なっている．Leissa・So[11, 12] は，軸方向と半径方向の試行関数にべき級数を採用した Ritz 法を提示し，相対する 2 面が自由な円筒体と片持円筒体の自由振動解析を行なっている．Liew ら [13] は，軸方向に 1 変数の直交多項式を，断面内には 2 変数の直交多項式を仮定した Ritz 法を用いて，種々の境界条件を有する円筒体の自由振動問題を解析している．Zhou ら [14] は，軸方向と半径方向の試行関数に Chebyshev 多項式を採用した Ritz 法を用いて，円筒体の自由振動問題を解析している．最近，著者ら [15] は，双 $(k-1)$ 次の 2 変数の B-spline 関数を振幅変位に仮定し，ポテンシャルエネルギー最小の原理に基づく B-spline 円筒リング法を提示し，中空円筒体の自由振動解析を行なっているが，この方法では軸方向と半径方向に同一の spline 次数を仮定せねばならず，数値解析上の効率が良くないという問題点が残されていた．

本論文では，先に提案している B-spline 円筒リング法 [15] の問題点を修正した半解析的な B-spline Ritz 法 (以下，B-spline Ritz 法) を提示し，これを用いて，3 次元弾性論に基づく円筒体の自由振動問題を定式化する．本論文の目的は，(1) 相対する 2 面で任意の境界条件を有する円筒体の 3 次元自由振動解析への B-spline Ritz 法の適用の可能性と最適な離散化条件について検討すること， (2) 厳密な解を得ることが困難な固定面と自由面を有する円筒体の自由振動特性に与える幾何形状と円周方向の波数の影響について明らかにし，基礎的な情報を整理すること，の 2 点である．

2. B-spline Ritz 法による自由振動問題の定式化

ここでは，B-spline Ritz 法を提示し，これを用いて，3 次元弾性論に基づく円筒体の自由振動問題を定式化する．ここで提示する B-spline Ritz 法は，円周方向に Fourier 級数展開し，軸方向と半径方向の試行関数には，各方向で任意の spline 次数と区分点数を設定できる正規化された B-spline 関数を採用した区分的な Ritz 法であり，幾何学的境界条件は，仮想ばね法 [15] により数値的に考慮している．

図-1 には，円筒体，座標系および変位方向の定義が示してある．ここで，3 次元弾性論に基づく円筒体は，微小ひずみかつ線形弾性であり，その運動は調和振動すると仮定する．また，R_o と L は，それぞれ，円筒体の半径と長さであり，円筒体の外径面 $(r = R_o)$ は自由面 $(\sigma_r = \tau_{\theta r} = \tau_{xr} = 0)$ とする．ま

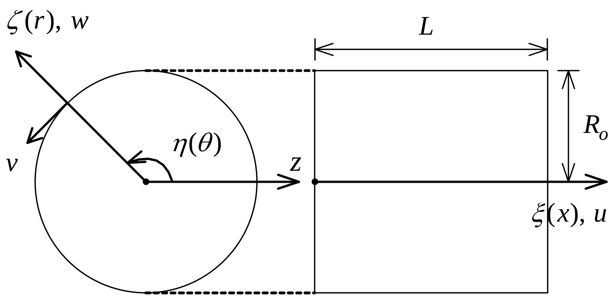


図-1　中実円筒体，座標系および変位方向の定義

ず，定式化にあたり，式(1) で表される無次元座標系を用いる．

$$\zeta(r) = r / R_o;\ \eta(\theta) = \theta;\ \xi(x) = x / L \tag{1}$$

時間依存性の r, θ, x 方向の変位成分は，t を時間の変数として，それぞれ，面外変位 $w(r, \theta, x, t)$ および面内変位 $v(r, \theta, x, t)$, $u(r, \theta, x, t)$ と定義し，各変位成分 w, v, u は，無次元振幅変位 $W(\zeta, \eta, \xi)$, $V(\zeta, \eta, \xi)$, $U(\zeta, \eta, \xi)$ を用いて，次式で表される．

$$w(r,\theta,x,t) = R_o W(\zeta,\eta,\xi) e^{\mathrm{i}\omega t};$$

$$v(r,\theta,x,t) = R_o V(\zeta,\eta,\xi) e^{\mathrm{i}\omega t};$$

$$u(r,\theta,x,t) = R_o U(\zeta,\eta,\xi) e^{\mathrm{i}\omega t} \tag{2}$$

ここで，ω は円振動数，$\mathrm{i}^2 = -1$ は虚数単位である．

円筒弾性体の相対する 2 つの境界面 $(\xi = 0, 1)$ で，幾何学的境界条件 u, v, w に対応する 3 種類の仮想ばね係数を α, β, γ とし，この仮想ばねに蓄えられる弾性エネルギーを付加した円筒弾性体の最大ひずみエネルギー $U_{\max}$ は，次式で与えられる．

$$\begin{aligned} U_{\max} = \frac{G R_o^2 L}{2} \Bigg\{ & \int_0^1 \int_0^{2\pi} \int_0^1 [\, \Lambda(\varepsilon_x + \varepsilon_\theta + \varepsilon_r)^2 \\ & + 2(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_\theta^2 + \varepsilon_r^2) + \gamma_{x\theta}^2 + \gamma_{\theta r}^2 + \gamma_{rx}^2 \,]\, \zeta \,\mathrm{d}\zeta \,\mathrm{d}\eta \,\mathrm{d}\xi \\ & + \frac{R_o}{L} \int_0^{2\pi} \int_0^1 (k_\alpha U^2 + k_\beta V^2 + k_\gamma W^2)\, \zeta \,\mathrm{d}\zeta \,\mathrm{d}\eta \Bigg|_{\xi = 0,\, 1} \Bigg\} \end{aligned} \tag{3}$$

$$\Lambda = \frac{2\nu}{1 - 2\nu};\ \ k_\alpha = \frac{\alpha R_o}{G};\ \ k_\beta = \frac{\beta R_o}{G};\ \ k_\gamma = \frac{\gamma R_o}{G} \tag{4}$$

ここで，$G = E / 2(1 + \nu)$ はせん断弾性係数，E と ν は，それぞれ，ヤング係数とポアソン比であり，k_α, k_β, k_γ は無次元仮想ばね係数である．また，3 次元弾性論で定義される 6 つのひずみ成分は，次のように与えられる．

$$\varepsilon_x = \left(\frac{R_o}{L}\right) \frac{\partial U}{\partial \xi};\ \ \varepsilon_\theta = \frac{1}{\zeta}\left(W + \frac{\partial V}{\partial \eta}\right);\ \ \varepsilon_r = \frac{\partial W}{\partial \zeta};$$

$$\gamma_{x\theta}=\frac{1}{\zeta}\frac{\partial U}{\partial \eta}+\left(\frac{R_o}{L}\right)\frac{\partial V}{\partial \xi}\,;\ \ \gamma_{\theta r}=\frac{\partial V}{\partial \zeta}+\frac{1}{\zeta}\left(\frac{\partial W}{\partial \eta}-V\right);$$

$$\gamma_{rx}=\left(\frac{R_o}{L}\right)\frac{\partial W}{\partial \xi}+\frac{\partial U}{\partial \zeta} \tag{5}$$

この円筒弾性体の最大運動エネルギー$T_{\max}$は，次式で与えられる．

$$T_{\max}=\frac{\rho\omega^2 R_o^4 L}{2}\int_0^1\int_0^{2\pi}\int_0^1 (U^2+V^2+W^2)\zeta\,\mathrm{d}\zeta\,\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\xi \tag{6}$$

ここで，ρ は単位体積あたりの密度である．

円筒体が軸対称構造であることを考慮すれば，振幅変位 U, V, W は，円周方向の変位の周期性から，$\Theta(\zeta, n(\eta+2\pi), \xi)=\Theta(\zeta, \eta, \xi)$, $(\Theta=U, V, W)$ を満たさなければならない．したがって，振幅変位 U, V, W は，軸方向と半径方向に正規化された B-spline 関数の 2 重積を仮定する．

$$U=\sum_{m=1}^{i_\xi}\sum_{l=1}^{i_\zeta}\sum_{\psi=0}^{1}A_{ml}N_{m,k_\xi}(\xi)N_{l,k_\zeta}(\zeta)\cos\left(n\eta-\frac{\pi}{2}\psi\right);$$

$$V=\sum_{m=1}^{i_\xi}\sum_{l=1}^{i_\zeta}\sum_{\psi=0}^{1}B_{ml}N_{m,k_\xi}(\xi)N_{l,k_\zeta}(\zeta)\sin\left(n\eta-\frac{\pi}{2}\psi\right);$$

$$W=\sum_{m=1}^{i_\xi}\sum_{l=1}^{i_\zeta}\sum_{\psi=0}^{1}C_{ml}N_{m,k_\xi}(\xi)N_{l,k_\zeta}(\zeta)\cos\left(n\eta-\frac{\pi}{2}\psi\right) \tag{7}$$

ここで，$n=0, 1, 2, 3, ..., \infty$ は円周方向の波数，$(\pi/2)$ は位相角であり，$\psi=0$ および$\psi=1$ は，それぞれ，$\eta=0$ の軸に対して振幅変位が対称および逆対称分布を意味する．また，$N_{\phi,\chi}(\Xi)$ $(\phi=m, l; \chi=k_\xi, k_\zeta; \Xi=\xi, \zeta)$ は正規化された B-spline 関数 [15] であり，$(k_j-2;\ j=\xi, \zeta)$ 階の導関数まで連続な区分的多項式である．なお，A_{ml}, B_{ml}, C_{ml} は未定係数，$i_\xi=m_\xi+k_\xi-2$, $i_\zeta=m_\zeta+k_\zeta-2$ であり，m_ξ, m_ζ および k_ξ, k_ζ は，それぞれ，ξ, ζ 方向に設けた区分点の数および spline 階数 $(k_j-1; j=\xi, \zeta$ は spline 次数) である．

ここで，$n=0$ (axisymmetric mode) の場合は，式(8) および式(9) で表される 2 つの振動モードが定義される．

(a) $n=0$ and $\psi=0$ for longitudinal / radial mode

$$U=\sum_{m=1}^{i_\xi}\sum_{l=1}^{i_\zeta}A_{ml}N_{m,k_\xi}(\xi)N_{l,k_\zeta}(\zeta);$$

$$W=\sum_{m=1}^{i_\xi}\sum_{l=1}^{i_\zeta}C_{ml}N_{m,k_\xi}(\xi)N_{l,k_\zeta}(\zeta);\ \ V=0 \tag{8}$$

(b) $n=0$ and $\psi=1$ for torsional mode

$$V=\sum_{m=1}^{i_\xi}\sum_{l=1}^{i_\zeta}B_{ml}N_{m,k_\xi}(\xi)N_{l,k_\zeta}(\zeta);\ \ U=W=0 \tag{9}$$

また，$n\geq 1$ ($n=1$ は bending mode, $n\geq 2$ は breathing mode) では，$\psi=0$ と$\psi=1$ による固有振動数は等しいため，縮退が起こる．なお，これらの振動モードの形状については，文献 13) を参照されたい．

円筒弾性体の相対する 2 面 ($\xi=0, 1$) における境界条件は，次のように定義される．

(a) 単純支持面

$$v=w=0,\ \sigma_x=0 \tag{10}$$

(b) 固定面

$$u=v=w=0 \tag{11}$$

(c) 自由面

$$\sigma_x=\tau_{\theta x}=\tau_{rx}=0 \tag{12}$$

したがって，幾何学的境界条件に対応する無次元仮想ばね係数の取り扱いは，例えば，$\xi=0, 1$ の境界面が単純支持面の場合には $k_\beta=k_\gamma=\infty$ であり，固定面では $k_\alpha=k_\beta=k_\gamma=\infty$ を用い，自由面では $k_\alpha=k_\beta=k_\gamma=0$ とすればよい．しかしながら，数値計算上，無限大の数値を取り扱うことはできないため，数値実験を行ない，解に影響を与えない範囲の大きな値を用いる．これについては，第 3 章で検討する．

円筒弾性体の全ポテンシャルエネルギーΠは，式(3) と式(6) を用いて，次式で与えられる．

$$\Pi=U_{\max}-T_{\max} \tag{13}$$

したがって，式(7) を式(13) に代入し，このΠを未定係数で極値化する．

$$\frac{\partial \Pi}{\partial A_{ml}}=0\,;\ \ \frac{\partial \Pi}{\partial B_{ml}}=0\,;\ \ \frac{\partial \Pi}{\partial C_{ml}}=0\ \ \text{for}\ \ \begin{cases} m=1, 2, \cdots, i_\xi \\ l\ =1, 2, \cdots, i_\zeta \end{cases} \tag{14}$$

その結果，次式の線形代数方程式が得られる．

$$(\{[\mathrm{K}]+[\mathrm{K}^L]\}-\Omega^2[\mathrm{M}])\{\Delta\}=\{0\};\quad n=0, 1, ..., \infty \tag{15}$$

ここで，$\Omega=\omega R_o(\rho/G)^{1/2}$ は振動数パラメータ，[K], $[\mathrm{K}^L]$ と [M] は，それぞれ，円筒弾性体の剛性マトリックス，仮想ばねによる剛性マトリックスおよび質量マトリックスであり，{0} は零ベクトル，$\{\Delta\}$ は未定係数ベクトルである．この未定係数ベクトル $\{\Delta\}$ は，次式のように構成されている．

$$\{\Delta\}=\{\ \{\delta_A\}\quad \{\delta_B\}\quad \{\delta_C\}\ \}^{\mathrm{T}} \tag{16}$$

$$\{\delta_A\}=\{A_{11}\quad A_{12}\quad \cdots\quad A_{1i_\zeta}\quad \cdots\quad A_{i_\xi i_\zeta}\}^{\mathrm{T}};$$

$$\{\delta_B\}=\{B_{11}\quad B_{12}\quad \cdots\quad B_{1i_\zeta}\quad \cdots\quad B_{i_\xi i_\zeta}\}^{\mathrm{T}};$$

$$\{\delta_C\}=\{C_{11}\quad C_{12}\quad \cdots\quad C_{1i_\zeta}\quad \cdots\quad C_{i_\xi i_\zeta}\}^{\mathrm{T}} \tag{17}$$

円周方向の波数 n に対応する各振動モードごとに，式(15) をマトリックス表示すれば，次のように表される．

(a) $n = 0$ and $\psi = 0$

$$\left(\left\{\begin{bmatrix}[K_{UU}] & [K_{UW}]\\ [K_{WU}] & [K_{WW}]\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}[K_{UU}^{L}] & [0]\\ [0] & [K_{WW}^{L}]\end{bmatrix}\right\} -\Omega^2\begin{bmatrix}[M_{UU}] & [0]\\ [0] & [M_{WW}]\end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix}\{\delta_A\}\\ \{\delta_C\}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\{0\}\\ \{0\}\end{Bmatrix} \tag{18}$$

(b) $n = 0$ and $\psi = 1$

$$(\{[K_{VV}]+[K_{VV}^{L}]\}-\Omega^2[M_{VV}])\{\delta_B\}=\{0\} \tag{19}$$

(c) $n \geq 1$ and $\psi = 0, 1$

$$\left(\left\{\begin{bmatrix}[K_{UU}] & [K_{UV}] & [K_{UW}]\\ [K_{VU}] & [K_{VV}] & [K_{VW}]\\ [K_{WU}] & [K_{WV}] & [K_{WW}]\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}[K_{UU}^{L}] & [0] & [0]\\ [0] & [K_{VV}^{L}] & [0]\\ [0] & [0] & [K_{WW}^{L}]\end{bmatrix}\right\} -\Omega^2\begin{bmatrix}[M_{UU}] & [0] & [0]\\ [0] & [M_{VV}] & [0]\\ [0] & [0] & [M_{WW}]\end{bmatrix}\right)\begin{Bmatrix}\{\delta_A\}\\ \{\delta_B\}\\ \{\delta_C\}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}\{0\}\\ \{0\}\\ \{0\}\end{Bmatrix} \tag{20}$$

ここで，$[K_{IJ}]$, $[K^{L}_{II}]$, $[M_{II}]$ ($I, J = U, V, W$) は，それぞれ，サブ剛性マトリックス，仮想ばねによるサブ剛性マトリックスおよびサブ質量マトリックスであり，これらのサブマトリックスは，k_p ($p = \xi, \zeta$) 点の Gauss-Legendre の数値積分により求めている．本解析法により定式化されるサブマトリックスは，対称の帯行列で構成されるため，剛性マトリックスは正値対称 (剛体振動モードを含む系の場合には，正値ではなくなる) の非密行列になり，質量マトリックスは対称の帯行列になる．また，その大きさは，(a) では $2 \times (m_\xi + k_\xi - 2) \times (m_\zeta + k_\zeta - 2)$，(b) では $(m_\xi + k_\xi - 2) \times (m_\zeta + k_\zeta - 2)$, (c) では $3 \times (m_\xi + k_\xi - 2) \times (m_\zeta + k_\zeta - 2)$，で表される．

3. 数値計算例および考察

ここでは，3 次元弾性論に基づく中実円筒体の自由振動解析への本解析法の適用性と最適な離散化条件について検討する．まず，解に与える仮想ばね係数の値の影響について検討し，短い円筒体から長い円筒体までを取り扱うことができる仮想ばね係数の値を検討する．次に，本解析法の解の収束状態と区分点の数，区分点の配置パターンおよび自由度数の関係と本解析法を用いるにあたって，解の収束値と実用上十分な解析精度を得るために必要な離散化条件について調べ，また，解の精度比較について検討し，本解析法の有用性，有効性および妥当性の確認を行なう．さらに，厳密な解を得ることが困難な固定面と自由面を有する円筒体の自由振動特性に与える長さ-外径比 L / R_o や円周方向の波数 n の影響について検討し，基礎的な情報を整理する．

ここで，ξ 軸に垂直な相対する 2 つの境界面 ($\xi = 0, 1$) での境界条件は，例えば，C-F のように表し，これは，$\xi = 0$ で固定面 (C)，$\xi = 1$ で自由面 (F) であることを意味する．また，境界条件に対称性のある (例えば，C-C や F-F) 円筒体の振動モードは，ξ 方向に対して面外振幅変位 W が対称モード (S) または逆対称モード (A) で表す．ただし，ねじれ振動モードの場合には，ξ 方向に対して円周方向の振幅変位 V が対称 (S) または逆対称 (A) で表す．

全ての数値計算は，personal computer を用い，Fortran による倍精度計算で行なった．また，本論文は，数値解析法の適用に関する内容でもあるため，振動数パラメータΩ は，有効数字 5 桁で整理した．なお，特に断りがない限り，数値計算例では，ポアソン比 $\nu = 0.3$ を用い，ξ, ζ 方向の spline 次数$(k_\xi - 1) \times (k_\zeta - 1)$ は，応力-ひずみ場まで連続になることを考慮し，また，文献 15) に示した結果を参考にして，4×3 に設定した．

3.1 解の収束性に与える仮想ばね係数の影響

本解析法では，境界面に導入した仮想ばねの剛性を大きくすることで，斉次の幾何学的境界条件を表現している．数学的には，この仮想ばねの剛性を無限大にすることで，斉次の幾何学的境界条件が満足されるが，先にも述べたように，数値計算では，無限大の数値を取り扱うことはできない．また，仮想ばねの有限の値は，大きいほど幾何学的境界条件の拘束度は高まるが，むやみに大きな値を用いると，剛性マトリックスの構成要素の最大値と最小値の差が非常に大きくなり，剛性マトリックスの条件数が悪化するという数値計算上の問題点があるため，仮想ばねの値は，数値実験によって解に影響を与えない大きな値を用いなければならない．そこで，まず，円筒体の振動数パラメータΩ に与える無次元仮想ばね係数 $k_\alpha, k_\beta, k_\gamma$ (以下，仮想ばね係数) の影響を調べ，短い円筒体からある程度長い円筒体までを統一的に取り扱うことができる仮想ばね係数について検討する．ここで，円筒体は等質かつ等方的であることから，$\Gamma = k_\alpha = k_\beta = k_\gamma$ とした．

表-1 と**表-2** には，それぞれ，$L / R_o = 2$ (短い円筒体) と L / R_o = 10 (長い円筒体) である両端固定 (C-C) された円筒体の振動数パラメータΩ に与える仮想ばね係数Γ の影響が示してある．ここで，区分点数 $m_\xi \times m_\zeta$ は 11×5 とし，Γ の値は 10^2 から 10^{10} まで変化させ，Ω の値の変化について調べた．

これより，n と L / R_o にかかわらず，Γ の値が

表−1 短い円筒体のΩ の収束性に与えるΓ の影響：$L / R_o = 2$, C-C

n	Γ	Modes 1st	2nd	3rd	4th	5th
		A	S	A	S	A
0	10^2	2.5516	3.7342	3.9429	4.7942	4.9895
	10^4	2.5790	3.7484	3.9554	4.8128	5.0176
	10^6	2.5793	3.7485	3.9555	4.8131	5.0179
	10^8	2.5793	3.7485	3.9555	4.8131	5.0179
	10^{10}	2.5793	3.7485	3.9555	4.8131	5.0179
		S	A	S	S	A
0^t	10^2	1.5648	3.1296	4.6943	5.3687	6.0140
	10^4	1.5707	3.1415	4.7122	5.3705	6.0203
	10^6	1.5708	3.1416	4.7124	5.3705	6.0203
	10^8	1.5708	3.1416	4.7124	5.3705	6.0203
	10^{10}	1.5708	3.1416	4.7124	5.3705	6.0203
		S	A	S	A	A
1	10^2	1.4217	2.6523	3.1914	3.2694	4.2159
	10^4	1.4313	2.6652	3.1953	3.2906	4.2288
	10^6	1.4314	2.6653	3.1953	3.2908	4.2290
	10^8	1.4314	2.6653	3.1953	3.2908	4.2290
	10^{10}	1.4314	2.6653	3.1953	3.2908	4.2290
		S	A	S	A	A
10	10^2	10.710	10.948	11.339	11.848	11.943
	10^4	10.711	10.952	11.346	11.856	11.949
	10^6	10.711	10.952	11.346	11.856	11.950
	10^8	10.711	10.952	11.346	11.856	11.950
	10^{10}	10.711	10.952	11.346	11.856	11.950

t stands for torsional mode.

表−2 長い円筒体のΩ の収束性に与えるΓ の影響：$L / R_o = 10$, C-C

n	Γ	Modes 1st	2nd	3rd	4th	5th
		A	S	A	S	A
0	10^2	0.50986	1.0131	1.5010	1.9592	2.3653
	10^4	0.51117	1.0157	1.5047	1.9636	2.3699
	10^6	0.51119	1.0157	1.5047	1.9637	2.3700
	10^8	0.51119	1.0157	1.5047	1.9637	2.3700
	10^{10}	0.51119	1.0157	1.5047	1.9637	2.3700
		S	A	S	A	S
0^t	10^2	0.31392	0.62784	0.94175	1.2557	1.5697
	10^4	0.31416	0.62831	0.94247	1.2566	1.5709
	10^6	0.31416	0.62832	0.94248	1.2566	1.5709
	10^8	0.31416	0.62832	0.94248	1.2566	1.5709
	10^{10}	0.31416	0.62832	0.94248	1.2566	1.5709
		S	A	S	A	S
1	10^2	0.15462	0.36558	0.62155	0.90109	1.1961
	10^4	0.15530	0.36687	0.62326	0.90302	1.1981
	10^6	0.15531	0.36689	0.62328	0.90305	1.1981
	10^8	0.15531	0.36689	0.62328	0.90305	1.1981
	10^{10}	0.15531	0.36689	0.62328	0.90305	1.1981
		S	A	S	A	S
10	10^2	10.633	10.641	10.656	10.676	10.702
	10^4	10.633	10.641	10.656	10.676	10.702
	10^6	10.633	10.641	10.656	10.676	10.702
	10^8	10.633	10.641	10.656	10.676	10.702
	10^{10}	10.633	10.641	10.656	10.676	10.702

t stands for torsional mode.

増大すると，Ω の値も増大しながら一定値へ収束している．また，$\Gamma = 10^6$ 以上になると Ω の値に変化が見られなくなるため, これを用いれば十分であることがわかる．

以後の数値計算例では，$\Gamma = 10^6$ を用いる．

3.2 解の収束性に与える区分点の数および配置パターンの影響と本解析法による収束値

本解析法の解の収束性と解析精度は, 試行関数に全体基底関数を採用する従来の Ritz 法と異なり，多項式の次数に相当する spline 次数 $(k_\xi - 1) \times (k_\zeta - 1)$ の組み合わせのみでなく，局所基底を構成する区分点の数 $m_\xi \times m_\zeta$ とその配置にも大きく依存する．本解析法の特徴は，適切に設定した多項式の次数を一定に保ったまま区分点の数を操作することによって, 解の収束状態や解析精度を改善できる点, 多項式を高次まで展開する必要がないので, 数値的に安定している点が挙げられる．しかしながら，区分点の配置パターンが解の収束状態に与える影響については，未だ未検討であった．したがって，振動数パラメータΩ の収束状態と区分点の数 $m_\xi \times m_\zeta$ および区分点の配置パターンの関係を調べることは，本解析法の特性を把握する上で重要である．ここでは, 本解析法の解の収束性に与える区分点の数 $m_\xi \times m_\zeta$ とその配置パターンについて調べ，本解析法により求められる解の収束値について検討する．

ここで，Ritz 法では，変分原理により近似的な意味合いで力学的境界条件が満足されるため, 一般に, 力学的境界条件を満たさなければならないような問題では，解の収束状態が悪くなる．また，円筒体の長さが大きくなるほど, 解の収束状態が悪くなることが予想される．そこで, 本解析法の解の収束状態を調べるにあたり, 境界条件が幾何学的境界条件と力学的境界条件で定義される長い片持円筒体 ($L / R_o = 10$, C-F) を例に取る．なお，ζ 方向の境界面 ($\zeta = 1$) は自由であるので，区分点は等間隔に配置し，固定面の影響 (仮想ばねの剛性の影響) を受ける ξ 方向の区分点の配置は shifted Chebyshev-Gauss-Lobatto points[16] (以下，不等間隔配置) とした．これらの区分点の配置は，区分点が軸の 0.5 に対して対称に配置され，また，不等間隔配置は，境界面付近で区分点が密に配置される．

表−3 には，C-F である長い円筒体 ($L / R_o = 10$) の Ω の収束性に与える $m_\xi \times m_\zeta$ と区分点の配置パターンの影響が示してある．ここでは，本解析法の解の収束状態と得られる収束値について検討することを目的としているので，$m_\xi \times m_\zeta$ は，単調に 11×11 から 51×51 まで変化させている．また，対象とした固有振動モードは，longitudinal / radial mode ($n = 0$), bending mode ($n = 1$) および n の大き

表−3 長い円筒体の Ω の収束性に与える $m_\xi \times m_\zeta$ と配置パターンの影響：$L / R_o = 10$, C-F

Spacing pattern	n	$m_\xi \times m_\zeta$	Modes 1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th	8th
Uniform	0	11 × 11	0.25456	0.76032	1.2549	1.7266	2.1564	2.5200	2.8095	2.9468
		21 × 21	0.25449	0.76011	1.2546	1.7261	2.1558	2.5185	2.8016	2.9453
		31 × 31	0.25447	0.76006	1.2545	1.7260	2.1557	2.5184	2.8015	2.9453
		41 × 41	0.25446	0.76004	1.2544	1.7260	2.1557	2.5184	2.8014	2.9453
		51 × 51	0.25446	0.76003	1.2544	1.7259	2.1556	2.5183	2.8014	2.9453
	1	11 × 11	0.027958	0.15614	0.38274	0.65105	0.94232	1.2433	1.5461	1.8235
		21 × 21	0.027940	0.15605	0.38254	0.65078	0.94200	1.2427	1.5437	1.8161
		31 × 31	0.027935	0.15602	0.38248	0.65072	0.94192	1.2426	1.5436	1.8160
		41 × 41	0.027933	0.15601	0.38246	0.65069	0.94189	1.2426	1.5436	1.8160
		51 × 51	0.027932	0.15600	0.38245	0.65067	0.94188	1.2425	1.5436	1.8160
	10	11 × 11	10.298	10.633	10.641	10.655	10.674	10.699	10.731	10.769
		21 × 21	10.067	10.633	10.640	10.654	10.673	10.697	10.728	10.765
		31 × 31	10.029	10.633	10.640	10.654	10.672	10.697	10.728	10.764
		41 × 41	10.024	10.633	10.640	10.654	10.672	10.697	10.728	10.764
		51 × 51	10.023	10.633	10.640	10.654	10.672	10.697	10.728	10.764
Non-uniform[a]	0	11 × 11	0.25447	0.76007	1.2545	1.7263	2.1596	2.5502	2.9060	2.9683
		21 × 21	0.25445	0.76001	1.2544	1.7259	2.1556	2.5183	2.8016	2.9453
		31 × 31	0.25445	0.76000	1.2544	1.7259	2.1556	2.5183	2.8014	2.9453
		41 × 41	0.25445	0.76000	1.2544	1.7259	2.1555	2.5183	2.8014	2.9453
	1	11 × 11	0.027936	0.15602	0.38250	0.65088	0.94398	1.2596	1.5902	1.8922
		21 × 21	0.027930	0.15599	0.38243	0.65064	0.94185	1.2425	1.5437	1.8162
		31 × 31	0.027929	0.15599	0.38242	0.65063	0.94184	1.2425	1.5436	1.8160
		41 × 41	0.027929	0.15599	0.38242	0.65063	0.94183	1.2425	1.5436	1.8160
	10	11 × 11	10.038	10.633	10.640	10.654	10.673	10.698	10.731	10.789
		21 × 21	10.023	10.633	10.640	10.654	10.672	10.697	10.728	10.764
		31 × 31	10.022	10.633	10.640	10.654	10.672	10.697	10.728	10.764
		41 × 41	10.022	10.633	10.640	10.654	10.672	10.697	10.728	10.764

a: Shifted Chebyshev-Gauss-Lobatto points

な breathing mode ($n = 10$) とした．

表−3 より，区分点の配置パターンにかかわらず，$m_\xi \times m_\zeta$ の増大にともない，Ω は一定値へ向かう収束性を示しており，本解析法の解の収束状態は，良好である．ここで，解の収束状態，収束値と区分点の配置パターンの関係について纏めると，不等間隔配置では，n の値にかかわらず，$m_\xi \times m_\zeta = 31 \times 31$ 以上になると Ω の値に変化が見られなくなる．したがって，$m_\xi \times m_\zeta = 31 \times 31$ による結果は，ほぼ収束値であると判断できよう．この結果に対し，等間隔配置では，収束値を得るためには，非常に多くの区分点の数が必要であり，また，n の値にかかわらず，Ω_{1st} では収束値が得られておらず，特に，$n = 1$ の Ω_{1st} から Ω_{5th} の値は，有効数字 4，5 桁目で変化があり，$m_\xi \times m_\zeta = 51 \times 51$ とかなり密に区分点を設定しても収束値には至っていない．したがって，本解析法の解の収束状態は，n と区分点の配置パターンにかかわらず，良好ではあるが，不等間隔配置を用いれば，等間隔配置よりも少ない区分点の数で収束値を得ることができるため，効率的かつ効果的である．なお，紙面の都合上割愛したが，短い円筒体 ($L / R_o = 2$) についても同様の検討を行なっており，収束状態は，長い円筒体よりも良好で，解の早い収束状態が得られていることを確認している．

3.3 本解析法の実用上の最適な離散化条件

3.2 の結果より，本解析法は，区分点の数 $m_\xi \times m_\zeta$ を増大させれば，振動数パラメータΩ の値の良好な収束状態が得られ，また，不等間隔配置を用いれば，振動数パラメータΩ の収束値が効率良く得られることが明らかとなった．しかしながら，実務設計で必要になる近似解の精度は，収束値のような高い解析精度である必要はなく，例えば，収束値に対して工学的に許容される誤差を含んだ結果であれば十分である．また，ξ 方向と ζ 方向に同じ数の区分点を配置すると自由度数が大きくなり，実用上の解析効率性の観点からも望ましくないと思われる．ここでは，本解析法の実務構造解析への応用を念頭に置き，単純に区分点を等間隔に配置した際に得られる振動数パラメータΩ の値の実用上十分な

表−4 長い円筒体の Ω の収束性に与える m_ξ の影響：$m_\zeta = 9$, $L / R_o = 10$, C-F

n	m_ξ	Modes 1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th	8th
0	7	**0.25467**	**0.76066**	**1.2555**	**1.7280**	**2.1702**	2.6226	2.9396	3.1683
	9	0.25460	0.76044	1.2551	1.7269	2.1575	**2.5293**	2.8664	2.9533
	11	0.25456	0.76032	1.2549	1.7266	2.1564	2.5200	**2.8095**	**2.9468**
0^t	7	**0.15708**	**0.47124**	**0.78540**	**1.0998**	**1.4180**	1.7548	2.1647	2.9859
	9	0.15708	0.47124	0.78540	1.0996	1.4140	**1.7305**	**2.0577**	2.4062
	11	0.15708	0.47124	0.78540	1.0996	1.4137	1.7281	2.0439	**2.3655**
1	7	**0.027993**	**0.15631**	**0.38308**	**0.65194**	**0.94982**	1.2966	1.6540	1.9124
	9	0.027970	0.15620	0.38286	0.65123	0.94285	**1.2469**	1.5680	1.8624
	11	0.027958	0.15614	0.38274	0.65105	0.94232	1.2433	**1.5461**	**1.8235**
5	7	5.3858	**5.7549**	**5.7585**	**5.7669**	**5.7834**	**5.8156**	**5.8870**	6.1584
	9	5.3255	5.7549	5.7585	5.7668	5.7827	5.8093	5.8524	**5.9287**
	11	**5.2950**	5.7549	5.7584	5.7667	5.7825	5.8086	5.8473	5.9025
10	7	10.447	**10.633**	**10.641**	**10.656**	**10.676**	**10.704**	**10.743**	10.949
	9	10.376	10.633	10.641	10.655	10.675	10.701	10.734	**10.779**
	11	10.298	10.633	10.641	10.655	10.674	10.699	10.731	10.769
	13	10.226	10.633	10.641	10.654	10.674	10.699	10.730	10.767
	15	10.166	10.633	10.641	10.654	10.673	10.698	10.729	10.766
	17	**10.122**	10.633	10.641	10.654	10.673	10.698	10.728	10.765

t stands for torsional mode.

表−5 長い円筒体の Ω の収束性に与える m_ζ の影響：$m_\xi = 17$, $L / R_o = 10$, C-F

n	m_ζ	Modes 1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th	8th
0	7	**0.25450**	**0.76016**	**1.2546**	**1.7262**	**2.1559**	**2.5187**	**2.8017**	**2.9454**
	9	0.25450	0.76016	1.2546	1.7262	2.1559	2.5187	2.8017	2.9454
	11	0.25450	0.76016	1.2546	1.7262	2.1559	2.5187	2.8017	2.9454
0^t	7	**0.15708**	**0.47124**	**0.78540**	**1.0996**	**1.4137**	**1.7279**	**2.0421**	**2.3563**
	9	0.15708	0.47124	0.78540	1.0996	1.4137	1.7279	2.0421	2.3563
	11	0.15708	0.47124	0.78540	1.0996	1.4137	1.7279	2.0421	2.3563
1	7	**0.027944**	**0.15607**	**0.38258**	**0.65084**	**0.94206**	**1.2427**	**1.5438**	**1.8161**
	9	0.027944	0.15607	0.38258	0.65084	0.94206	1.2427	1.5438	1.8161
	11	0.027944	0.15607	0.38258	0.65084	0.94206	1.2427	1.5438	1.8161
5	7	**5.2724**	**5.7549**	**5.7584**	**5.7667**	**5.7825**	**5.8085**	**5.8465**	**5.8980**
	9	5.2723	5.7549	5.7584	5.7667	5.7825	5.8084	5.8465	5.8980
	11	5.2723	5.7549	5.7584	5.7667	5.7825	5.8084	5.8465	5.8980
10	7	**10.123**	**10.634**	**10.641**	**10.655**	**10.674**	**10.699**	**10.729**	**10.766**
	9	10.122	10.633	10.641	10.654	10.673	10.698	10.728	10.765
	11	10.121	10.633	10.641	10.654	10.673	10.698	10.728	10.765

t stands for torsional mode.

解析精度を得るために必要な区分点に関する離散化条件を自由度数との関係を考慮しつつ検討する．ここで，**3.2** で得られた不等間隔配置かつ区分点の数 $m_\xi \times m_\zeta = 41 \times 41$ の結果 (最大自由度数は 5676) を収束値とし，この収束値に対して誤差が 1 % 以内になる結果を実用上十分な解析精度 (以下，十分な結果) と定義する．本論文では，数値解析による 3 次元弾性論に基づく円筒体のより正確な自由振動特性の把握を目的としているため，許容誤差を 1 % 以内と判断した．まず，ζ 方向の区分点の数 m_ζ を固定し，解と ξ 軸方向の区分点の数 m_ξ の関係について調べ，ξ 方向の区分点の数 m_ξ を決定する．次に，決定した ξ 方向の区分点の数 m_ξ を固定し，先に設定した ζ 方向の区分点の数 m_ζ を前後に変化させて，解のと関係を調べ，ζ 方向の区分点の数 m_ζ を決定し，両者の結果から最適な離散化条件を検討する．

表−4 に，C-F である長い円筒体 ($L / R_o = 10$) の Ω の収束性に与える軸方向の区分点の数 m_ξ の影響を示した．ここで，$m_\zeta = 9$ に固定し，m_ξ は 7 か

表-6 片持円筒体の曲げ振動モードに関する Ω の精度比較と理論比較：n = 1, C-F

L / R_o	Solution Methods	Modes				
		1st	2nd	3rd	4th	5th
2	Present	0.50492	1.4434	2.5869	2.8538	3.3461
	Simple-Ritz[12)]	0.506	1.444	2.588	2.854	3.346
	1-D Exact[a]	0.70868	4.4412	12.435	24.369	40.283
6	Present	0.075079	0.36399	0.81798	1.2955	1.7718
	Simple-Ritz[11)]	0.07517	0.3643	0.8186	1.2961	1.7729
	Chebyshev-Ritz[14)]	0.0751	0.3640	0.8180	1.2955	1.7718
	1-D Exact	**0.078742**	0.49347	1.3817	2.7076	4.4759
10	Present	0.027929	0.15599	0.38242	0.65063	0.94184
	Simple-Ritz[11)]	0.02797	0.1562	0.3828	0.6512	0.9432
	Chebyshev-Ritz[14)]	0.0279	0.1560	0.3824	0.6507	0.9419
	1-D Exact	**0.028347**	0.17765	0.49742	0.97474	1.6113
40	Present	0.0017727	0.011017	0.030448	0.058588	0.094704
	Simple-Ritz[11)]	0.001778	0.01105	0.03054	0.05876	0.09527
	Chebyshev-Ritz[14)]	0.0018	0.0110	0.0304	0.0586	0.0947
	1-D Exact	**(0.0017717)**	**0.011103**	**0.031089**	**0.060921**	**0.10071**
80	Present	0.00044322	0.0027717	0.0077350	0.015084	0.024782
	Simple-Ritz[11)]	0.0004449	0.002782	0.007764	0.01514	0.02498
	1-D Exact	**(0.00044292)**	**0.0027757**	**0.0077722**	**0.015230**	**0.025177**

a: Bernoulli-Euler beam theory

ら 17 まで変化させている．なお，表中の bold の文字は，十分な結果になったことを意味する．

これより，n = 0 から n = 10 までの振動モードを対象とし，Ω_{1st} から Ω_{8th} の収束状態は良好であるが，n の値が大きな場合 (n = 10) の基本振動数の収束状態はやや遅い結果となっている．また，n にかかわらず Ω_{1st} から Ω_{8th} の十分な結果を得るために必要な m_ξ の数は 17 である．なお，短い円筒体 (L / R_o = 2) についても同様の検討を行なっており， m_ξ = 7 を用いれば，十分な結果が得られることを確認している．

次に，最適な半径方向の区分点の数 m_ζ について検討する．**表-5** には，C-F である長い円筒体 (L / R_o = 10) の Ω の収束性に与える半径方向の区分点の数 m_ζ の影響が示してある．ここで，**表-4** の結果から，m_ξ は 17 に固定し，m_ζ を 7 から 11 まで変化させている．

表-5 より，m_ζ を増大させれば，Ω の値は一定値へ向かう安定した収束状態が得られており，m_ζ は 7 点取れば十分な結果が得られることがわかる．また，短い円筒体 (L / R_o = 2) でも同様の結果が得られている．したがって，本解析法では，$2 \le L / R_o \le 10$ の範囲であれば，区分点の数 $m_\xi \times m_\zeta = 17 \times 7$ の組み合わせが，n の値にかかわらず Ω_{1st} から Ω_{8th} までの十分な結果を得ることができる最適な離散化条件である．また，この時の自由度数は，longitudinal / radial mode では 360，torsional mode では 180，$n \ge 1$ (ψ = 0, 1) 以上の振動モードでは 540 であり,収束値を求める際の自由度数の 10 % 程度とかなり少ない自由度数で良好な結果を得ることができるので，本解析法は，簡易的に，効率良く，効果的な解析が可能であると判断できよう．

以後の数値計算例では, 解析精度を高めるために, **3.2** の結果から判断して, 区分点の数 $m_\xi \times m_\zeta = 31 \times 31$ とし，ξ 方向には不等間隔配置，ζ 方向には等間隔配置を用いる．

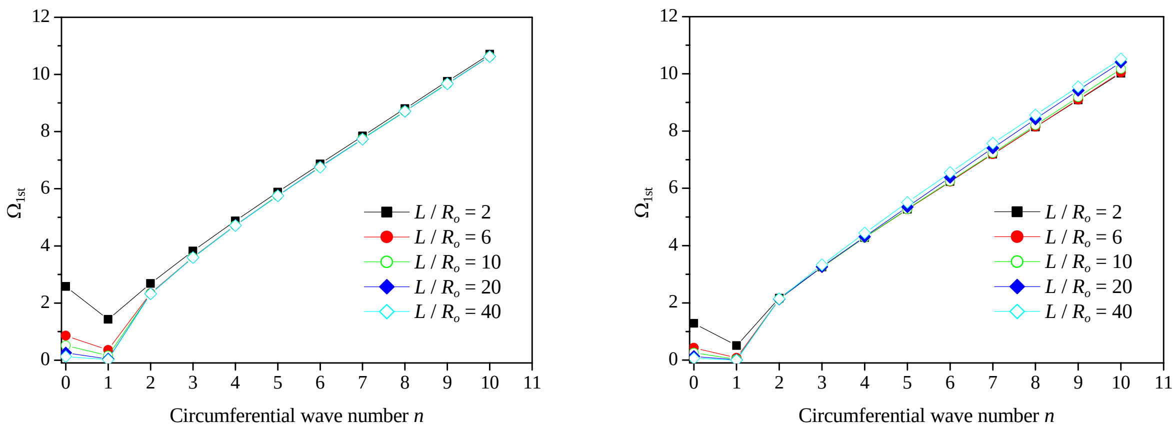
3.4 解の精度比較と理論比較

ここでは，本解析法により求められる解 (ほぼ収束値) の解析精度および古典はり理論との理論比較について検討する．**表-6** には，C-F である円筒体の曲げ振動モード (n = 1) に関する Ω の精度比較と理論比較が示してある．ここで, L / R_o は 2 (短い円筒体) から 80 (かなり長い円筒体) まで変化させ，解の比較のために，3 次元弾性論に基づく Leissa・So[11), 12)] の Ritz 法 (Simple-Ritz) および Zhou ら [14)] の Ritz 法 (Chebyshev-Ritz) による数値解も併記してある．さらに，古典はり理論の結果 (1-D Exact) は，はりの曲げ振動に関する微分方程式を厳密に解いた結果である．ここでは，3 次元解析 (3-D) と 1 次元解析 (1-D) による許容誤差を 10 % 以内と判断し, 古典はり理論の結果の bold 数字は, 許容誤差範囲であることを，括弧内の bold 数字は誤差がマイナスであることを意味する．なお，許容誤差は，式(21) に基づいて算出した．

表-7 片持円筒体の Ω の精度比較：C-F

n	Modes	L/R_o 2 Present	2 Ritz[12]	4 Present	4 Ritz	6 Present	6 Ritz	10 Present	10 Ritz
0	1st	1.2851	1.286	0.63942	0.640	0.42516	0.425	0.25445	0.255
	2nd	2.9600	2.960	1.8581	1.859	1.2593	1.260	0.76000	0.761
	3rd	3.1675	3.169	2.7820	2.783	2.0289	2.030	1.2544	1.255
	4th	4.1815	4.182	2.9506	2.951	2.6390	2.641	1.7259	1.727
	5th	4.2947	4.297	3.3447	3.346	2.9435	2.944	2.1556	2.163
0^t	1st	0.78540	0.785	0.39270	0.393	0.26180	0.262	0.15708	0.157
	2nd	2.3562	2.356	1.1781	1.178	0.78540	0.785	0.47124	0.471
	3rd	3.9270	3.927	1.9635	1.963	1.3090	1.309	0.78540	0.785
	4th	5.1953	5.195	2.7489	2.749	1.8326	1.833	1.0996	1.100
	5th	5.4978	5.498	3.5343	3.544	2.3562	2.363	1.4137	1.418
2	1st	2.1618	2.162	2.1321	2.132	2.1312	2.131	2.1312	2.132
	2nd	2.5181	2.518	2.3500	2.350	2.3406	2.341	2.3263	2.326
	3rd	3.4475	3.449	2.5023	2.503	2.3559	2.356	2.3309	2.331
	4th	3.7598	3.760	2.8465	2.847	2.4748	2.475	2.3464	2.346
	5th	4.3464	4.347	3.2905	3.292	2.7000	2.702	2.3769	2.378
5	1st	5.2698	5.271	5.2696	5.276	5.2696	5.290	5.2696	5.363
	2nd	5.8128	5.813	5.7631	5.763	5.7572	5.757	5.7549	5.755
	3rd	6.1487	6.150	5.8108	5.812	5.7717	5.772	5.7584	5.759
	4th	6.5814	6.584	5.9317	5.935	5.8094	5.813	5.7667	5.769
	5th	6.9740	6.978	6.1360	6.141	5.8805	5.885	5.7824	5.786

t stands for torsional mode.



(a) C-C　　(b) C-F

図-2 円筒体の Ω_{1st} に与える n と L/R_o の影響

$$\mathrm{Error}[\%]=\frac{\Omega_{1-D}-\Omega_{3-D}}{\Omega_{3-D}}\times 100 \tag{21}$$

表-6 より，本解析法により求めた Ω の値と Leissa・So[11), 12)] および Zhou ら [14)] の結果とを比較すると，L/R_o にかかわらず，やや小さめの値でよく一致しており，本解析法の解析精度は，良好であると判断できよう．次に，古典梁理論による結果と 3 次元解析による結果を比較すると，Ω_{1st} から Ω_{5th} までが許容誤差に収まるのは，$L/R_o = 40$ 以上であり，また，Ω_{1st} のみに着目すれば，$L/R_o = 6$ 以上である．Ω_{1st} を除くと $L/R_o < 10$ の範囲では，Ω の値が許容誤差 10 % を大幅に超える．したがって，$L/R_o \leq 10$ の範囲では，3 次元弾性論に基づく解析が必要であり，$L/R_o \geq 40$ のようなかなり長い円筒体では，許容誤差が 10 % であることに留意すれば，古典梁理論に基づく解析が可能である．これとほぼ同様の検討を Leissa・So[11)] も実施しているが，文献 11) では，Ω が収束値ではないため，誤差が全体的に小さい結果となっており，理論比較の正確さの面で若干問題があると思われる．他方，本論文では，Ω の収束値による誤差評価の結果であるため，この結果は，十分に信頼できるものである．

表-7 には，C-F である円筒体の Ω の精度比較

表-8 相対する 2 面が固定された円筒体の対称モード (S) に関する Ω と n および L / R_o の関係：C-C

n	Modes	L / R_o 1	2	3	4	6	8	10	20
0	1st	4.6663	3.7485	3.0620	2.4393	1.6758	1.2657	1.0149	0.50808
	2nd	8.7371	4.8117	4.0485	3.5990	2.9190	2.3791	1.9621	1.0092
	3rd	9.0708	5.6149	4.1789	3.8284	3.5289	3.0787	2.6974	1.4940
	4th	10.833	6.6766	5.0181	4.2430	3.7271	3.5323	3.1631	1.9475
0^t	1st	3.1416	1.5708	1.0472	0.78540	0.52360	0.39270	0.31416	0.15708
	2nd	6.0203	4.7124	3.1416	2.3562	1.5708	1.1781	0.94248	0.47124
	3rd	8.9844	5.3705	5.2360	3.9270	2.6180	1.9635	1.5708	0.78540
	4th	9.4248	6.9700	5.2413	5.1953	3.6652	2.7489	2.1991	1.0996
1	1st	3.0073	1.4309	0.89636	0.62482	0.35420	0.22571	0.15501	0.043357
	2nd	4.1935	3.1953	2.7648	1.9949	1.2266	0.84689	0.62249	0.20808
	3rd	6.7617	4.3452	2.9803	2.8552	2.2197	1.5840	1.1970	0.44698
	4th	7.5051	4.8737	3.7027	3.1345	2.5214	2.2359	1.8078	0.72414
2	1st	3.7275	2.6823	2.4573	2.3825	2.3410	2.3335	2.3306	2.3181
	2nd	5.3317	4.4500	3.3765	2.8762	2.5081	2.3926	2.3524	2.3277
	3rd	8.1760	4.7509	4.2075	3.7773	2.9967	2.6399	2.4801	2.3435
	4th	8.8727	5.5272	4.6580	4.0512	3.4681	3.0671	2.7442	2.3528
3	1st	4.5939	3.8189	3.6720	3.6276	3.6063	3.6033	3.5995	3.5923
	2nd	6.6340	5.1911	4.2634	3.9217	3.6925	3.6284	3.6117	3.5989
	3rd	9.1873	5.8563	5.0931	4.6217	3.9926	3.7649	3.6720	3.6060
	4th	9.2703	6.4734	5.6554	4.8544	4.4428	4.0363	3.8248	3.6130
4	1st	5.4899	4.8725	4.7638	4.7328	4.7182	4.7161	4.7159	4.7138
	2nd	7.9697	5.9720	5.2227	4.9599	4.7871	4.7390	4.7231	4.7155
	3rd	9.6302	6.7447	5.9837	5.5230	5.0124	4.8418	4.7736	4.7175
	4th	9.9785	7.8389	6.3685	5.7734	5.3975	5.0436	4.8856	4.7247
5	1st	6.3959	5.8831	5.7969	5.7723	5.7593	5.7562	5.7552	5.7542
	2nd	9.2015	6.8268	6.1932	5.9729	5.8280	5.7863	5.7707	5.7563
	3rd	10.208	7.5926	6.9133	6.4524	6.0178	5.8766	5.8192	5.7625
	4th	10.705	8.8138	7.1725	6.7467	6.3433	6.0434	5.9137	5.7755

t stands for torsional mode.

が示してある．ここで，L / R_o は 2, 4, 6, 10 とし，解の比較のために，3 次元弾性論に基づく Leissa・So[12] の Ritz 法による数値解も示してある．

これより，n (各振動モード) と L / R_o にかかわらず，本解析法により求めた Ω の収束値は，Leissa・So[12] の Ritz 法による数値解よりもやや小さめの値で良く一致しており，より精度の高い上界の値が得られている．今回，紙面の都合上割愛したが，これまでに報告例 [4), 5), 7), 11) − 14)] の多い F-F である円筒体についても解の精度比較を実施しており，同様の結果が得られている．したがって，本解析法によれば，境界条件，n の値や L / R_o にかかわらず，精度の高い解析結果が得られると判断できよう．

3.5 固定面と自由面を有する円筒体の固有振動数に与える長さ-外径比と円周方向の波数の影響

(1) Ω_{1st} に与える n と L / R_o の影響

耐震設計では，最小の固有振動数と固有振動モードの把握が，必要不可欠である．ここでは，種々の長さを有する円筒体の Ω_{1st} と n の関係を調べ，最小の固有振動数について検討する．

図-2 (a), (b) には，それぞれ，境界条件が C-C および C-F である円筒体の Ω_{1st} に与える n と L / R_o の影響が示してある．ただし，軸対称振動モード ($n = 0$) は，longitudinal / radial mode ($\psi = 0$) を対象とし，torsional mode ($\psi = 1$) は，考慮していない．

これより，境界条件と L / R_o にかかわらず，最小の固有振動数となるのは，曲げ振動モード (n = 1) である．また，n の値が大きくなると，Ω_{1st} の値は直線的に増加する．さらに，非常に長い円筒体 ($L / R_o \geq 20$) になると，軸対称振動モード (n = 0) と曲げ振動モード (n = 1) の Ω_{1st} の値が近接してくる．境界条件が Ω_{1st} に与える影響としては，C-C である円筒体では，$n \geq 5$ になると，L / R_o にかかわらず，Ω_{1st} の値に差異が見られなくなるが，C-F である円筒体では，$n \geq 4$ になると，$L / R_o \geq 20$ のかなり長い円筒体の Ω_{1st} の値が，$L / R_o \leq 10$ の円筒体の Ω_{1st} の値よりも大きくなる．今回，この原

表−9 相対する 2 面が固定された円筒体の逆対称モード (A) に関する Ω と n および L/R_o の関係：C-C

n	Modes	L/R_o 1	2	3	4	6	8	10	20
0	1st	5.2299	2.5782	1.7159	1.2851	0.85434	0.63942	0.51076	0.25445
	2nd	5.9010	3.9555	3.5339	3.1675	2.3982	1.8581	1.5035	0.76000
	3rd	7.2587	5.0178	4.0849	3.7108	3.2745	2.7826	2.3680	1.2544
	4th	8.3916	6.1829	4.8244	4.2536	3.6712	3.3234	2.9523	1.7259
0^t	1st	6.2832	3.1416	2.0944	1.5708	1.0472	0.78540	0.62832	0.31416
	2nd	8.1150	6.0203	4.1888	3.1416	2.0944	1.5708	1.2566	0.62832
	3rd	10.504	6.2832	5.5463	4.7124	3.1416	2.3562	1.8850	0.94248
	4th	12.566	8.1150	6.2832	5.3705	4.1888	3.1416	2.5133	1.2566
1	1st	5.3359	2.6653	1.7273	1.2470	0.75695	0.51064	0.36629	0.11312
	2nd	5.9015	3.2895	2.5684	2.2620	1.7134	1.2073	0.90216	0.32106
	3rd	6.9230	4.2289	3.4871	2.7932	2.0612	1.9279	1.5004	0.58219
	4th	6.9569	5.5256	3.8451	3.1954	2.7416	2.0084	1.9192	0.87104
2	1st	5.5309	3.3064	2.7416	2.5268	2.3788	2.3384	2.3269	2.3179
	2nd	6.3355	4.0719	3.5096	3.2443	2.7119	2.4897	2.3972	2.3293
	3rd	7.7237	5.3595	4.2063	3.4577	3.1717	2.8346	2.5963	2.3398
	4th	7.9793	6.1083	4.7483	4.3019	3.3628	3.1273	2.9184	2.3778
3	1st	5.9798	4.2287	3.8462	3.7095	3.6222	3.6020	3.5977	3.5925
	2nd	6.9120	4.9288	4.4899	4.2148	3.8128	3.6792	3.6289	3.5979
	3rd	8.6873	6.3378	4.9064	4.4192	4.2103	3.8841	3.7371	3.6073
	4th	9.0739	6.7575	5.7331	5.1170	4.3042	4.2080	3.9346	3.6172
4	1st	6.6301	5.2165	4.9105	4.8022	4.7352	4.7197	4.7156	4.7136
	2nd	7.5604	5.8400	5.4984	5.1984	4.8782	4.7786	4.7413	4.7159
	3rd	9.7482	7.0163	5.7425	5.4504	5.1879	4.9300	4.8214	4.7188
	4th	10.189	7.6917	6.5790	5.9393	5.3743	5.1814	4.9665	4.7339
5	1st	7.4094	6.2043	5.9333	5.8393	5.7810	5.7655	5.7600	5.7549
	2nd	8.2653	6.7958	6.5117	6.1772	5.9061	5.8225	5.7898	5.7587
	3rd	10.853	7.7362	6.6530	6.5038	6.1640	5.9500	5.8602	5.7680
	4th	11.296	8.5271	7.4409	6.8063	6.4519	6.1570	5.9802	5.7853

t stands for torsional mode.

因を解明するには至らなかったが，Leissa・So[12] も似たような傾向の結果を一部示している．

(2) C-C である円筒体の Ω と n, L/R_o の関係

相対する 2 面が固定された円筒体の自由振動問題を取り扱った研究報告は少なく[9), 10), 13), 14)]，その中でも，軸方向にはりの固有関数を仮定する finite layer 法による結果[9), 10)] は，解にバラツキが見受けられ，また，3 次元弾性論では要求されない幾何学的境界条件 ($\partial W/\partial x$ など) を含むため解の信頼性に欠ける点があるように思われ，全体的に基礎的な情報が欠如していると思われる．ここでは，C-C である円筒体の Ω と n および L/R_o の関係を詳細に検討し，基礎的な情報を整理する．

表−8 および**表−9** には，それぞれ，対称モード (S) および逆対称モード (A) に分類して整理した C-C である円筒体の Ω と n および L/R_o の関係が示してある．ここで，L/R_o は，**3.4** の結果から判断し，3 次元弾性論に基づく解析が必要であると考えられる 1 から 20 までを検討の対象とした．

これより，C-C である円筒体の各振動モードの Ω_{1st} から Ω_{4th} の値は，対称モードと逆対称モードにかかわらず，L/R_o の増大にともない，減少する．また，$L/R_o = 20$ の円筒体の $n \geq 2$ 以上の振動モードでは，Ω_{1st} から Ω_{4th} の値の差が非常に小さく，近接している．円筒体の各振動モードの Ω_{1st} に着目すると，$L/R_o = 1$ の軸対称振動モード ($n = 0$) では，逆対称モードの Ω_{1st} の値よりも対称モードの Ω_{1st} の値の方が小さいが，$L/R_o \geq 2$ 以上になると，対称モードの Ω_{1st} の値よりも逆対称モードの Ω_{1st} の値の方が小さくなる特徴がある．その他のねじれ振動モード ($n = 0^t$)，曲げ振動モード ($n = 1$) や $n \geq 2$ 以上の振動モードでは，一部を除いて，逆対称モードの Ω_{1st} の値よりも対称モードの Ω_{1st} の値の方が小さい．

4. あとがき

本論文では，B-spline Ritz 法を提示し，これを用

いて，3 次元弾性論に基づく中実円筒体の自由振動問題を定式化した. 任意の境界条件を有する中実円筒体の 3 次元自由振動解析への本解析法の適用の可能性および最適な離散化条件について検討し, また, 厳密な解を得ることが困難な固定面と自由面を有する円筒体の固有振動数に与える長さ-外径比や円周方向の波数の影響について明らかにし, 基礎的な情報について整理した. 本論文で得られた結果を纏めると，以下のとおりである.

(1) 本解析法では，n の値 $(0 \le n \le 10)$ と L / R_o にかかわらず， $\Gamma = 10^6$ を用いればよい.

(2) 本解析法の解の収束状態は，n の値 $(0 \le n \le 10)$ と区分点の配置パターンにかかわらず，良好であるが，不等間隔配置を用いれば，等間隔配置よりも少ない区分点の数 $m_\xi \times m_\zeta = 31 \times 31$ で解の収束値を得ることができる.

(3) $0 \le n \le 10$ かつ $2 \le L / R_o \le 10$ の範囲の Ω_{1st} から Ω_{8th} まで，十分な結果を得るために必要な本解析法の最適な離散化条件は，区分点の数 $m_\xi \times m_\zeta = 17 \times 7$ の組み合わせである.

(4) 本解析法により求めた Ω の値は, 境界条件, n の値や L / R_o にかかわらず, 精度の高い結果が得られる.

(5) 固定面と自由面を有する円筒体では，境界条件と L / R_o にかかわらず, 最小の固有振動数を取るのは, 曲げ振動モード $(n = 1)$ である.

(6) 相対する 2 面が固定された円筒体の各振動モードの Ω_{1st} から Ω_{4th} の値は, 対称モードと逆対称モードにかかわらず，L / R_o の増大にともない，減少する.

最後に，本論文で示した表の振動数パラメータΩの値を有限要素解や他の数値解析解のベンチマークテストに使って頂ければ幸いである. 今後，液体に接する中空および中実円筒体の自由振動解析や動的応答解析への本解析法の適用について検討し，その動的特性を明らかにして行く予定である.

謝辞：本研究は，第一著者が平成 18 年度日本学術振興会特別研究員奨励費の援助を受けて行なったものである. ここに，記して関係者各位に感謝の意を表します.

参考文献

1) Armenakas, A.E., Gazis, D.C. and Hermann, G.: Free vibration of circular cylindrical shells, Pergamon press, Oxford.
2) McMahon, G.W.: Finite-difference analysis of the vibrations of solids cylinders, J. Acoust. Soc. Am., Vol.48, pp.307-312, 1970.
3) McMahon, G.W.: Experimental study of the vibrations of solid, isotropic, elastic cylinders, J. Acoust. Soc. Am., Vol.36, pp.85-92, 1964.
4) Hutchinson, J.R.: Axisymmetric vibrations of a free finite length rod, J. Acoust. Soc. Am., Vol.51, pp.233-240, 1972.
5) Hutchinson, J.R.: Vibrations of solid cylinders, ASME J. Appl. Mech., Vol.47, pp.901-907, 1980.
6) Gladwell, G.M.L. and Tahbildar, U.C.: Finite element analysis of the axisymmetric vibrations of cylinders, J. Sound Vibr., Vol.22, pp.143-157, 1972.
7) Gladwell, G.M.L. and Vijay, D.K.: Natural frequencies of free finite-length circular cylinders, J. Sound Vibr., Vol.42, pp.387-397, 1975.
8) Nelson, R.B., Dong, S.B. and Kalra, R.D.: Vibrations and waves in laminated orthotropic circular cylinders, J. Sound Vibr., Vol.18, pp.429-444, 1971.
9) Cheung, Y.K. and Wu, C.I.: Free vibrations of thick, layered cylinders having finite length with various boundary conditions, J. Sound Vibr., Vol.24, pp.189-200, 1972.
10) Loy, C.T. and Lam, K.Y.: Vibration of thick cylindrical shells on the basis of three-dimensional theory of elasticity, J. Sound Vibr., Vol.226, pp.719-737, 1999.
11) Leissa, A.W. and So, J.: Comparisons of vibration frequencies for rods and beams from one-dimensional and three-dimensional analyses, J. Acoust. Soc. Am., Vol.98, pp.2122-2135, 1995.
12) Leissa, A.W. and So, J.: Accurate vibration frequencies of circular cylinders from three-dimensional analysis, J. Acoust. Soc. Am., Vol.98, pp.2136-2141, 1995.
13) Liew, K.M. and Hung, K.C.: Three-dimensional vibratory characteristics of solid cylinders and some remarks on simplified beam theories, Int. J. Solids Structures, Vol.32, pp.3499-3513, 1995.
14) Zhou, D., Cheung, Y.K., Lo, S.H. and Au, F.T.K.: 3D vibration analysis of solid and hollow circular cylinders via Chebyshev-Ritz method, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., Vol.192, pp.1575-1589, 2003.
15) 名木野晴暢，三上隆，水澤富作：B-spline 円筒リング法を用いた中空円筒体の3次元自由振動解析, 構造工学論文集，Vol.52A，pp.89-100，2006.
16) Shu, C. and Chen, W.: On optimal selection of interior points for applying discretized boundary conditions in DQ vibration analysis of beams and plates, J. Sound Vibr., Vol.222, pp. 239-257, 1999.

(2007 年 9 月 18 日受付)