

一次せん断変形理論に基づいた二重曲率シェルの正確な級数解

Accurate Fourier series solutions based on first-order shear deformation theory of doubly curved shells

渡辺 力*, 林 正**

Chikara Watanabe and Masa Hayashi

*博士(工学), 函館工業高等専門学校准教授, 環境都市工学科 (〒042-8501 函館市戸倉町 14-1)

**工博, 長岡技術科学大学名誉教授

In the thin shell theory, strains are treated approximately such as Love's first-approximation and Flügge's second-approximation theories. In this study, Navier-type exact solutions base on first-order shear deformation theory of deep-thick doubly curved shells are determined. The modified strain-displacement relations that all strains vanish for any rigid-body motion are used and the stress resultants are treated exactly. By using numerical examples of simply supported deep-thick doubly curved shells, the application of a Reddy's shallow shell theory and the effect of modified strain-displacement relations are investigated.

Key Words : doubly curved shell, first-order shear deformation theory, Fourier series solution

キーワード : 二重曲率シェル, 一次せん断変形理論, 級数解

1. まえがき

薄肉シェルに関する研究は古くから実施されており, Love の一次近似理論¹⁾や Flügge の二次近似理論²⁾など種々の理論が存在する. これらは, シェルのひずみ-変位関係式に現れる $1/(1+\zeta/R)$ の項 (ζ は法線方向の座標, R は曲率半径) を Tayler 展開して, 第 1 項までを用いる一次近似理論, 第 3 項までを用いる二次近似理論などひずみを近似的に取り扱うことに由来する. また, Flügge の理論ではシェル中央面に対する法線まわりのモーメントのつり合い条件を恒等的に満足するが, Love の理論では球形シェルなどの特別な場合を除いて満足しない. そこで, Sanders は Love の理論を修正し, 剛体運動が完全に除去されるひずみ-変位関係式とつり合い方程式を求めている³⁾.

せん断変形を考慮したシェルの研究でも Naghdi⁴⁾, Reissner⁵⁾の研究や Mirsky と Herrmann の二次近似理論⁶⁾などがあるが, 中厚のシェルに対する厚肉シェル理論は積層シェルの研究で多く用いられている. 例えば, Chaudhuri と Abu-Arja⁷⁾は積層円筒シェルに, Leissa と Chang⁸⁾は二重曲率を有する積層偏平シェルに一次せん断変形理論を用いている. これらの研究では直交曲線座標系におけるひずみ-変位関係式⁹⁾から得られるひずみ成分が用いられているが, 薄肉シェルの Love 理論と同様に, 中央面に対する法線まわりのモーメントのつり合い条件を球形シェルなどの特別な場合を除いて満足しないことになる. それに対して, Reddy¹⁰⁾は Sanders の方法によりひずみ成分を修正して, 二重曲率を有する積層偏平シェルの Navier 型の級数解を求め

ている. また, Chaudhuri と Kabir¹¹⁾は Reddy と同じひずみ-変位関係式を用いて, 種々の境界条件を有する積層偏平シェルの自由振動解析を行っている.

これらの解析的研究はシェルの構造特性を明らかにする上での意義と共に, 有限要素法などの離散化手法の精度を検証する上での比較解 (厳密解) として果たす役割は大きい. しかし, 前述のように多くの研究ではひずみ-変位関係式を近似的に取り扱っており, Reddy の研究¹⁰⁾でも偏平シェルの仮定が用いられているので離散化手法の精度検証のための比較解 (厳密解) として用いるには精度が悪い.

また, 二重曲率シェルは, 曲率半径の採り方によって球形シェル, 円筒シェル, HP シェルなどと曲面形状を変えることができ, 曲面形状を補関関数で近似する有限要素の精度の検証例題として適している. 深い二重曲率シェル (積層シェル) の自由振動に関する研究が, Toorani と Lakis¹²⁾, Qatu¹³⁾によって実施されているが Sanders の方法によるひずみの修正は行われていない. さらに, 合応力は Reissner⁵⁾と同様に級数展開した 2 次項までの近似式が用いられている¹²⁾.

本研究では, 一次せん断変形理論に基づいて深い二重曲率シェルの曲げ解析を定式化し, 正確な Navier 型の解析解を求める. Reddy の研究¹⁰⁾と同様に Sanders の方法により修正したひずみ成分を用い, 合応力の中に現れる $\frac{(1+\zeta/R_2)}{(1+\zeta/R_1)}$ などの法線方向の座標 ζ に関する定積分項も正確に取り扱う. 数値計算により, Reddy の偏平シェル理論の適用性, Sanders の方法によりひずみを修正する効果について, 特に変位と応力に着目して考察している. また, 本解法による変位と応力は, 一

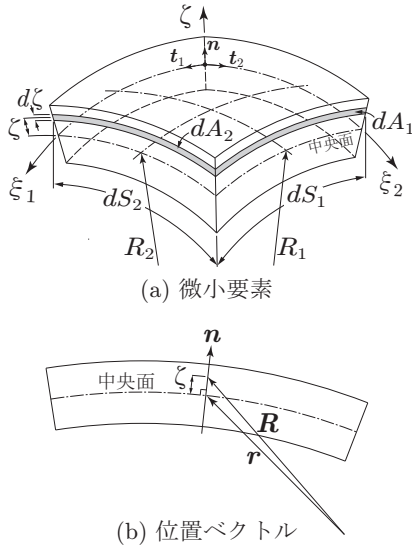


図-1 シェルの座標

般シェル要素^{14),15)}を用いて細分割した有限要素解と良く一致しており、離散化手法の精度検証のための比較解(一次せん断変形理論に基づいた厳密解)として用いることができることを示す。

2. 二重曲率を有する厚肉シェルの定式化

2.1 ひずみ-変位関係式

(1) シェルの幾何形状

図-1(a)に示す曲面シェルの微小要素を考える。シェル中央面($\zeta=0$)を基準面とし、 ξ_1, ξ_2 は曲率線座標、 ζ は中央面に対する法線の座標である。また、 ξ_1, ξ_2 曲線に沿った中央面の主曲率半径を R_1, R_2 とし、 ξ_1, ξ_2 曲線の単位接線ベクトルを $\mathbf{t}_1, \mathbf{t}_2$ 、中央面の単位法線ベクトルを $\mathbf{n}$ とする。

図-1(b)のように、中央面への位置ベクトルを $\mathbf{r}$ とすると、中央面から ζ だけ離れた点の位置ベクトル $\mathbf{R}$ とその増分 $d\mathbf{R}$ は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{R}(\xi_1, \xi_2, \zeta) &= \mathbf{r}(\xi_1, \xi_2) + \zeta \mathbf{n}(\xi_1, \xi_2) \\ d\mathbf{R} &= d\mathbf{r} + \zeta d\mathbf{n} + \mathbf{n} d\zeta \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} d\mathbf{r} &= \alpha_1 \mathbf{t}_1 d\xi_1 + \alpha_2 \mathbf{t}_2 d\xi_2 \\ d\mathbf{n} &= \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial \xi_2} d\xi_2 = \frac{\alpha_1}{R_1} \mathbf{t}_1 d\xi_1 + \frac{\alpha_2}{R_2} \mathbf{t}_2 d\xi_2 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\alpha_1^2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_1}, \quad \alpha_2^2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi_2} \quad (3)$$

よって、微小要素内の2点 (ξ_1, ξ_2, ζ) 、 $(\xi_1 + d\xi_1, \xi_2 + d\xi_2, \zeta + d\zeta)$ 間の長さ dS は、

$$(dS)^2 = d\mathbf{R} \cdot d\mathbf{R} = L_1^2 d\xi_1^2 + L_2^2 d\xi_2^2 + L_3^2 d\zeta^2 \quad (4)$$

となる。式(4)の L_1 などはLaméのパラメータであ

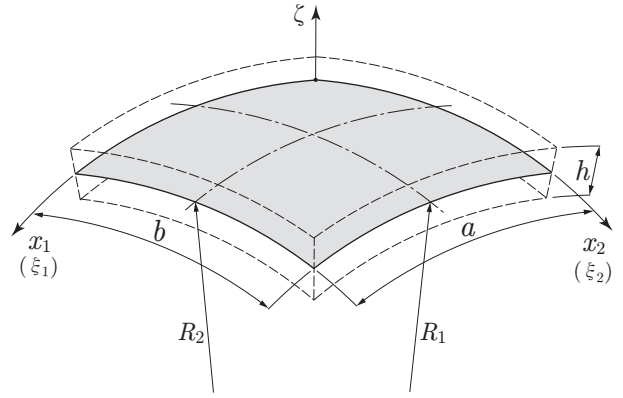


図-2 二重曲率を有する厚肉シェル

り、次式で与えられる。

$$L_1 = \alpha_1 \left(1 + \frac{\zeta}{R_1}\right), \quad L_2 = \alpha_2 \left(1 + \frac{\zeta}{R_2}\right), \quad L_3 = 1 \quad (5)$$

式(4)より、図-1(a)に示す中央面から ζ の位置にある面素 dA_i の幅 dS_i は、

$$dS_1 = L_1 d\xi_1, \quad dS_2 = L_2 d\xi_2 \quad (6)$$

となる。式(6)を用いて体積素 dV は $dV = dS_1 dS_2 d\zeta$ で与えられる。

シェルの幾何形状を図-2に示す。シェルの中央面に直交曲線座標 (x_1, x_2, ζ) を設け、 x_1, x_2 軸に沿ったシェル幅を a, b 、シェル中央面の曲率半径を R_1, R_2 とする。シェル中央面の曲面形状は、 $R_1=R_2$ とすると球形形状(球形シェル)、 $R_1=\infty$ または $R_2=\infty$ とすると円筒形状(円筒シェル)、 $R_1=-R_2$ とすると鞍形状(HPシェル)となり、 $R_1=R_2=\infty$ の場合には平板となる。

また、直交曲線座標 $x_1(\xi_1), x_2(\xi_2)$ と曲率線座標 ξ_1, ξ_2 には次の関係がある。

$$dx_1 = \alpha_1 d\xi_1, \quad dx_2 = \alpha_2 d\xi_2 \quad (7)$$

(2) 解析仮定と変位成分

中厚のシェルに対して、Mindlin 板曲げ理論と同様の以下の仮定を設ける。

- 1) シェルのたわみは板厚に比べて十分小さい。
- 2) シェルの中央面に垂直な応力は無視する($\sigma_{33}=0$)。
- 3) 変形前の中央面に対する法線は変形後も直線であるが、変形後の中央面に対して垂直であるとは限らない。

これより、シェルの任意点の変位 $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3$ は、中央面の座標軸 x_1, x_2, ζ 方向の変位 u_1, u_2, u_3 と、 x_1, x_2 軸まわりの回転変位 ϕ_2, ϕ_1 を用いて次式で与えられる。

$$\bar{u}_1 = u_1 + \zeta \phi_1, \quad \bar{u}_2 = u_2 + \zeta \phi_2, \quad \bar{u}_3 = u_3 \quad (8)$$

(3) ひずみ-変位関係式の修正

一次せん断変形理論による厚肉シェルの研究^{8),12),13)}では、直交曲線座標系におけるひずみ-変位関係式⁹⁾から得られるひずみ成分が用いられている。これらのひずみ成分を仮想仕事の原理に用いて得られるつり合い

方程式では、薄肉シェルの Love 理論と同様に、球形シェルなど $R_1=R_2$ となる場合を除いて、次式の法線 ζ まわりのモーメントのつり合い条件が満足されない。

$$M_{21}/R_2 - M_{12}/R_1 + N_{21} - N_{12} = 0 \quad (9)$$

ここに、 M_{12}, N_{12} などは、ねじりモーメント、面内せん断力である。

Sanders は式 (9) を満足させるために、シェル中央面の法線 ζ まわりの回転変位 ϕ_n を考慮して、仮想ひずみエネルギーに次の項を加えている³⁾。

$$\iint (M_{21}/R_2 - M_{12}/R_1 + N_{21} - N_{12}) \delta\phi_n dS_1 dS_2 \quad (10)$$

回転変位 ϕ_n には、

$$\begin{aligned} \phi_n &= \frac{1}{2\alpha_1\alpha_2} \left\{ \frac{\partial(\alpha_2 u_2)}{\partial\xi_1} - \frac{\partial(\alpha_1 u_1)}{\partial\xi_2} \right\} \\ &= \frac{1}{2\alpha_1\alpha_2} \left\{ \alpha_2 \frac{\partial u_2}{\partial\xi_1} + u_2 \frac{\partial\alpha_2}{\partial\xi_1} - \alpha_1 \frac{\partial u_1}{\partial\xi_2} - u_1 \frac{\partial\alpha_1}{\partial\xi_2} \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

を用いて、次のひずみ-変位関係式が得られる³⁾。

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{(1+\zeta/R_1)} \{ \varepsilon_1^0 + \zeta\kappa_1 \} \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{(1+\zeta/R_2)} \{ \varepsilon_2^0 + \zeta\kappa_2 \} \\ \gamma_{12} &= \frac{1}{(1+\zeta/R_1)} \{ \varepsilon_{12}^0 + \zeta\kappa_{12} \} \\ &\quad + \frac{1}{(1+\zeta/R_2)} \{ \varepsilon_{21}^0 + \zeta\kappa_{21} \} \\ \gamma_{23} &= \frac{1}{(1+\zeta/R_2)} \gamma_{23}^0, \quad \gamma_{13} = \frac{1}{(1+\zeta/R_1)} \gamma_{13}^0 \end{aligned} \quad (12)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^0 &= \frac{1}{\alpha_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial\xi_1} + \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial\alpha_1}{\partial\xi_2} u_2 + \frac{\alpha_1}{R_1} u_3 \right) \\ \varepsilon_2^0 &= \frac{1}{\alpha_2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial\xi_2} + \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial\alpha_2}{\partial\xi_1} u_1 + \frac{\alpha_2}{R_2} u_3 \right) \\ \varepsilon_{12}^0 &= \frac{1}{2\alpha_1\alpha_2} \left\{ \alpha_1 \frac{\partial u_1}{\partial\xi_2} + \alpha_2 \frac{\partial u_2}{\partial\xi_1} - \left(u_1 \frac{\partial\alpha_1}{\partial\xi_2} + u_2 \frac{\partial\alpha_2}{\partial\xi_1} \right) \right\} \\ &= \varepsilon_{21}^0 \\ \kappa_1 &= \frac{1}{\alpha_1} \left(\frac{\partial\phi_1}{\partial\xi_1} + \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial\alpha_1}{\partial\xi_2} \phi_2 \right) \\ \kappa_2 &= \frac{1}{\alpha_2} \left(\frac{\partial\phi_2}{\partial\xi_2} + \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial\alpha_2}{\partial\xi_1} \phi_1 \right) \\ \kappa_{12} &= \frac{1}{\alpha_1} \left(\frac{\partial\phi_2}{\partial\xi_1} - \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial\alpha_1}{\partial\xi_2} \phi_1 \right) \\ &\quad - \frac{1}{2\alpha_1\alpha_2 R_1} \left\{ \alpha_2 \frac{\partial u_2}{\partial\xi_1} + u_2 \frac{\partial\alpha_2}{\partial\xi_1} - \alpha_1 \frac{\partial u_1}{\partial\xi_2} - u_1 \frac{\partial\alpha_1}{\partial\xi_2} \right\} \\ \kappa_{21} &= \frac{1}{\alpha_2} \left(\frac{\partial\phi_1}{\partial\xi_2} - \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial\alpha_2}{\partial\xi_1} \phi_2 \right) \end{aligned}$$

$$+ \frac{1}{2\alpha_1\alpha_2 R_2} \left\{ \alpha_2 \frac{\partial u_2}{\partial\xi_1} + u_2 \frac{\partial\alpha_2}{\partial\xi_1} - \alpha_1 \frac{\partial u_1}{\partial\xi_2} - u_1 \frac{\partial\alpha_1}{\partial\xi_2} \right\}$$

$$\begin{aligned} \gamma_{23}^0 &= \frac{1}{\alpha_2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial\xi_2} + \alpha_2 \phi_2 - \frac{\alpha_2}{R_2} u_2 \right) \\ \gamma_{13}^0 &= \frac{1}{\alpha_1} \left(\frac{\partial u_3}{\partial\xi_1} + \alpha_1 \phi_1 - \frac{\alpha_1}{R_1} u_1 \right) \end{aligned} \quad (13)$$

なお、Sanders は薄肉シェルを取り扱っているのせん断ひずみ $\gamma_{23}^0=\gamma_{13}^0=0$ とし、ねじりひずみは $(\kappa_{12}+\kappa_{21})/2 \equiv \bar{\kappa}_{12}$ として取り扱っている³⁾。

ここで、式 (13) のひずみ成分を直交曲線座標 (x_1, x_2, ζ) で表す。本研究では、曲率半径が一定となる二重曲率シェルを取り扱うので $\frac{\partial\alpha_1}{\partial\xi_2}=0, \frac{\partial\alpha_2}{\partial\xi_1}=0$ とし、式 (7) の関係を用いると、

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^0 &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{u_3}{R_1}, \quad \kappa_1 = \frac{\partial\phi_1}{\partial x_1} \\ \varepsilon_2^0 &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{u_3}{R_2}, \quad \kappa_2 = \frac{\partial\phi_2}{\partial x_2} \\ \varepsilon_{12}^0 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) = \varepsilon_{21}^0 \\ \kappa_{12} &= \frac{\partial\phi_2}{\partial x_1} - \frac{1}{2R_1} \left\{ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right\} \\ \kappa_{21} &= \frac{\partial\phi_1}{\partial x_2} + \frac{1}{2R_2} \left\{ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right\} \\ \gamma_{23}^0 &= \frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \phi_2 - \frac{u_2}{R_2}, \quad \gamma_{13}^0 = \frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \phi_1 - \frac{u_1}{R_1} \end{aligned} \quad (14)$$

が得られる。

Sanders の方法³⁾によりひずみ成分 $\varepsilon_{12}^0, \varepsilon_{21}^0, \kappa_{12}, \kappa_{21}$ が修正され、式 (14) の下線の項が修正による付加項となる。これにより式 (9) のつり合い条件は恒等的に満足される。この効果については数値計算例で考察する。なお、Reddy は偏平シェルの仮定により、式 (12) において $1/(1+\zeta/R_i) \approx 1$ 、式 (14) のひずみ成分を $\varepsilon_{12}^0+\varepsilon_{21}^0 \equiv \varepsilon_6^0, \kappa_{12}+\kappa_{21} \equiv \kappa_6$ として取り扱っている¹⁰⁾。

2.2 構成方程式とつり合い方程式

(1) 応力成分

応力とひずみの関係は、一般化したフックの法則より次式で与えられる。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \tau_{12} \\ \tau_{23} \\ \tau_{13} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_p & \nu E_p & 0 & 0 & 0 \\ \nu E_p & E_p & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \gamma_{12} \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \end{Bmatrix} \quad (15)$$

ここに、 ν はポアソン比、弾性係数 E を用いて E_p と

せん断弾性係数 G は次式で与えられる.

$$E_p = \frac{E}{(1-\nu^2)}, \quad G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (16)$$

(2) 合応力

シェルの合応力は、式 (15) の応力成分を用いて次式で与えられる.

$$\begin{Bmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \\ N_{21} \\ M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \\ M_{21} \end{Bmatrix} = \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \sigma_{11}(1+\zeta/R_2) \\ \sigma_{22}(1+\zeta/R_1) \\ \tau_{12}(1+\zeta/R_2) \\ \tau_{12}(1+\zeta/R_1) \\ \zeta\sigma_{11}(1+\zeta/R_2) \\ \zeta\sigma_{22}(1+\zeta/R_1) \\ \zeta\tau_{12}(1+\zeta/R_2) \\ \zeta\tau_{12}(1+\zeta/R_1) \end{Bmatrix} d\zeta \quad (17)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = k \int_{-h/2}^{h/2} \begin{Bmatrix} \tau_{13}(1+\zeta/R_2) \\ \tau_{23}(1+\zeta/R_1) \end{Bmatrix} d\zeta \quad (18)$$

ここに、 k はせん断補正係数、 h は板厚である. 式 (17) において、Reddy の偏平シェルの研究¹⁰⁾や薄肉シェルでは $N_{12}=N_{21}$, $M_{12}=M_{21}$ として取り扱われるが、球形シェル ($R_1=R_2$) の特別な場合を除いてこの関係は成り立たない. 本研究では、 $N_{12} \neq N_{21}$, $M_{12} \neq M_{21}$ として取り扱う.

また、式 (17), (18) に式 (15) の応力成分と式 (12) のひずみ成分を代入すると $\int (1+\zeta/R_2)/(1+\zeta/R_1) d\zeta$ などの積分が現れる^{†1}. これらは、Taylor 展開して近似的に取り扱われている^{5), 12)}. 本研究では、次の手順で正確に取り扱う.

まず、 $1/(1+\zeta/R_i)$ などの ζ に関する定積分を次のように計算し、

$$\begin{aligned} \int_{-h/2}^{h/2} \frac{1}{(1+\zeta/R_i)} d\zeta &= R_i \log \left(\frac{2R_i + h}{2R_i - h} \right) \equiv I_i \\ \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\zeta}{(1+\zeta/R_i)} d\zeta &= R_i (h - I_i) \\ \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\zeta^2}{(1+\zeta/R_i)} d\zeta &= -R_i^2 (h - I_i) \\ \int_{-h/2}^{h/2} \frac{\zeta^3}{(1+\zeta/R_i)} d\zeta &= R_i \left\{ \frac{h^3}{12} + R_i^2 (h - I_i) \right\} \end{aligned} \quad (19)$$

この公式を用いて、合応力の中に現れる ζ に関する定積分の項を次のように置く.

$$\begin{aligned} A_0 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{(1+\zeta/R_2)}{(1+\zeta/R_1)} d\zeta = \frac{R_1}{R_2} \left\{ h - \frac{(R_1 - R_2)}{R_1} I_1 \right\} \\ A_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{(1+\zeta/R_2)}{(1+\zeta/R_1)} \zeta d\zeta = -\frac{R_1}{R_2} (R_1 - R_2) (h - I_1) \\ A_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{(1+\zeta/R_2)}{(1+\zeta/R_1)} \zeta^2 d\zeta = R_1 \left(\frac{h^3}{12 R_2} - A_1 \right) \end{aligned}$$

^{†1} Reddy の偏平シェルの研究¹⁰⁾や薄肉シェルでは $\zeta/R_i \approx 0$ としているので、この項は現れない

$$\begin{aligned} B_0 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{(1+\zeta/R_1)}{(1+\zeta/R_2)} d\zeta = \frac{R_2}{R_1} \left\{ h + \frac{(R_1 - R_2)}{R_2} I_2 \right\} \\ B_1 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{(1+\zeta/R_1)}{(1+\zeta/R_2)} \zeta d\zeta = \frac{R_2}{R_1} (R_1 - R_2) (h - I_2) \\ B_2 &= \int_{-h/2}^{h/2} \frac{(1+\zeta/R_1)}{(1+\zeta/R_2)} \zeta^2 d\zeta = R_2 \left(\frac{h^3}{12 R_1} - B_1 \right) \end{aligned} \quad (20)$$

ここに、 I_1, I_2 は式 (19) の第 1 式から与えられる. また、円筒シェルでは $R_1=\infty$ または $R_2=\infty$ とするので次式を用いる.

1) $R_1=\infty$ の場合

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= h, & A_1 &= \frac{h^3}{12 R_2}, & A_2 &= \frac{h^3}{12} \\ B_0 &= I_2, & B_1 &= R_2 (h - I_2), & B_2 &= -R_2 B_1 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

2) $R_2=\infty$ の場合

$$\left. \begin{aligned} A_0 &= I_1, & A_1 &= R_1 (h - I_1), & A_2 &= -R_1 A_1 \\ B_0 &= h, & B_1 &= \frac{h^3}{12 R_1}, & B_2 &= \frac{h^3}{12} \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

軸力 N_{11} では、式 (17), (15), (12) より

$$\begin{aligned} N_{11} &= \int_{-h/2}^{h/2} E_p \left\{ \frac{(1+\zeta/R_2)}{(1+\zeta/R_1)} (\varepsilon_1^0 + \zeta \kappa_1) \right. \\ &\quad \left. + \nu (\varepsilon_2^0 + \zeta \kappa_2) \right\} d\zeta \\ &= E_p A_0 \varepsilon_1^0 + E_p A_1 \kappa_1 + \nu E_p h \varepsilon_2^0 \end{aligned} \quad (23)$$

となる. 他の合応力も同様に計算してまとめると次のようになる.

$$\begin{Bmatrix} N_{11} \\ N_{22} \\ N_{12} \\ N_{21} \\ M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \\ M_{21} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 & B_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & A_{22} & 0 & 0 & 0 & B_{22} & 0 & 0 \\ & & A_{33} & A_{34} & 0 & 0 & B_{33} & 0 \\ & & & A_{44} & 0 & 0 & 0 & B_{44} \\ & & & & D_{11} & D_{12} & 0 & 0 \\ & & & & & D_{22} & 0 & 0 \\ & & \text{sym.} & & & & D_{33} & D_{34} \\ & & & & & & & D_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_1^0 \\ \varepsilon_2^0 \\ \varepsilon_{12}^0 \\ \varepsilon_{21}^0 \\ \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ \kappa_{12}^0 \\ \kappa_{21}^0 \end{Bmatrix} \quad (24)$$

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & 0 \\ 0 & C_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{13}^0 \\ \gamma_{23}^0 \end{Bmatrix} \quad (25)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} A_{11} &= E_p A_0, & A_{12} &= \nu D_p, & A_{22} &= E_p B_0 \\ A_{33} &= G A_0, & A_{34} &= G_p, & A_{44} &= G B_0 \\ B_{11} &= E_p A_1, & B_{22} &= E_p B_1 \\ B_{33} &= G A_1, & B_{44} &= G B_1 \\ D_{11} &= E_p A_2, & D_{12} &= \nu D_b, & D_{22} &= E_p B_2 \\ D_{33} &= G A_2, & D_{34} &= G_b, & D_{44} &= G B_2 \\ C_{11} &= k G A_0, & C_{22} &= k G B_0 \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

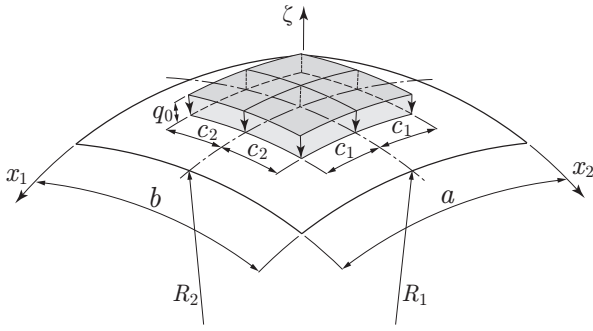


図-3 荷 重

なお、式 (26) では以下の記号を用いており、 D_p は伸び剛性、 D_b は曲げ剛性、 G_p はせん断剛性である。

$$D_p = E_p h, \quad D_b = \frac{E_p h^3}{12}, \quad G_p = G h, \quad G_b = \frac{G h^3}{12} \quad (27)$$

(3) つり合い方程式

仮想仕事の原理を用いて、つり合い方程式を求める。

仮想ひずみエネルギー δU は、式 (15) の応力成分と式 (12) のひずみ成分、式 (17), (18) の合応力を用いて次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_{\xi_1}^a \int_{\xi_2}^b \int_{-h/2}^{h/2} \{ \sigma_{11} \delta \varepsilon_{11} + \sigma_{22} \delta \varepsilon_{22} + \tau_{12} \delta \gamma_{12} \\ &\quad + \tau_{23} \delta \gamma_{23} + \tau_{13} \delta \gamma_{13} \} dS_1 dS_2 d\zeta \\ &= \int_0^a \int_0^b \{ N_{11} \delta \varepsilon_1^0 + M_{11} \delta \kappa_1 + N_{22} \delta \varepsilon_2^0 + M_{22} \delta \kappa_2 \\ &\quad + N_{12} \delta \varepsilon_{12}^0 + M_{12} \delta \kappa_{12} + N_{21} \delta \varepsilon_{21}^0 + M_{21} \delta \kappa_{21} \\ &\quad + Q_2 \delta \gamma_{23}^0 + Q_1 \delta \gamma_{13}^0 \} dx_1 dx_2 \end{aligned} \quad (28)$$

仮想外力仕事は、シェル中央面 ($\zeta=0$) に、法線方向の面荷重 q が作用する場合を考えると、

$$\delta W = \iint q \delta u_3 dx_1 dx_2 \quad (29)$$

となる。ここで、式 (28) に式 (14) のひずみ-変位関係式を代入し、式 (28) と式 (29) を仮想仕事の原理に用いて、偏微分項に部分積分を実施した内部積分項より次の 5 個のつり合い方程式が得られる。

$$\begin{aligned} N'_{11} + \frac{1}{2} (\dot{N}_{12} + \dot{N}_{21}) + \frac{1}{2} (\dot{M}_{12}/R_1 - \dot{M}_{21}/R_2) \\ + Q_1/R_1 &= 0 \\ \dot{N}_{22} + \frac{1}{2} (N'_{12} + N'_{21}) - \frac{1}{2} (M'_{12}/R_1 - M'_{21}/R_2) \\ + Q_2/R_2 &= 0 \\ -(N_{11}/R_1 + N_{22}/R_2) + Q'_1 + \dot{Q}_2 + q &= 0 \\ M'_{11} + \dot{M}_{21} - Q_1 &= 0 \\ \dot{M}_{22} + M'_{12} - Q_2 &= 0 \end{aligned} \quad (30)$$

ここに、 $(\cdot)' = \partial/\partial x_1$, $(\dot{\cdot}) = \partial/\partial x_2$ である。式 (30) の下線の項が Sanders の方法によりひずみを修正したことによる付加項となる。

また、式 (24), (25) と式 (20), (14) を式 (9) に代入すると、法線 ζ まわりのモーメントのつり合い条件であ

る式 (9) を恒等的に満足していることが分かる。なお、式 (30) で $N_{12}=N_{21}$, $M_{12}=M_{21}$ と置き、式 (7) の関係を用いれば、Reddy のつり合い方程式¹⁰⁾と一致する。

2.3 Navier 型の解析解

(1) 変位関数

本研究では、周辺を単純支持されたシェルを取り扱う。シェル中央面の変位 $u_1, u_2, u_3, \phi_1, \phi_2$ を次式の変位関数で仮定する。

$$\begin{aligned} u_1(x_1, x_2) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} \cos(\alpha_m x_1) \sin(\beta_n x_2) \\ u_2(x_1, x_2) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} V_{mn} \sin(\alpha_m x_1) \cos(\beta_n x_2) \\ u_3(x_1, x_2) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} W_{mn} \sin(\alpha_m x_1) \sin(\beta_n x_2) \\ \phi_1(x_1, x_2) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} X_{mn} \cos(\alpha_m x_1) \sin(\beta_n x_2) \\ \phi_2(x_1, x_2) &= \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} Y_{mn} \sin(\alpha_m x_1) \cos(\beta_n x_2) \end{aligned} \quad (31)$$

ここに、 U_{mn} などはフーリエ係数であり、 α_m, β_n は次式で与えられる。

$$\alpha_m = \frac{m\pi}{a}, \quad \beta_n = \frac{n\pi}{b} \quad (32)$$

(2) 荷 重

荷重は、図-3に示すようなシェル中央面の法線方向に作用する対称荷重を取り扱う。荷重 q を式 (31) と同様の二重フーリエ級数で表す。

$$q(x_1, x_2) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} q_{mn} \sin(\alpha_m x_1) \sin(\beta_n x_2) \quad (33)$$

ここで、フーリエ係数 q_{mn} は、図-3に示す荷重強度 q_0 の等分布荷重が載荷幅 ($2c_1 \times 2c_2$) に載荷された場合には、次のようになる。

$$q_{mn} = \frac{16 q_0}{mn\pi^2} \sin(\alpha_m c_1) \sin(\beta_n c_2) \times \sin(m\pi/2) \sin(n\pi/2) \quad (34)$$

なお、荷重強度 q_0 の等分布荷重が満載された場合には $q_{mn} = \frac{16 q_0}{mn\pi^2}$ を、集中荷重 P が座標 $(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ に作用する場合には $q_{mn} = \frac{4P}{ab} \sin(\alpha_m \bar{x}_1) \sin(\beta_n \bar{x}_2)$ を用いる。

(3) 特性方程式

式 (30) のつり合い方程式に式 (24), (25) の合応力、式 (14) のひずみ成分を代入し、変位に式 (31), 荷重に式 (33) を用いると任意の (m, n) 項に対して次の特性方程式が得られる。

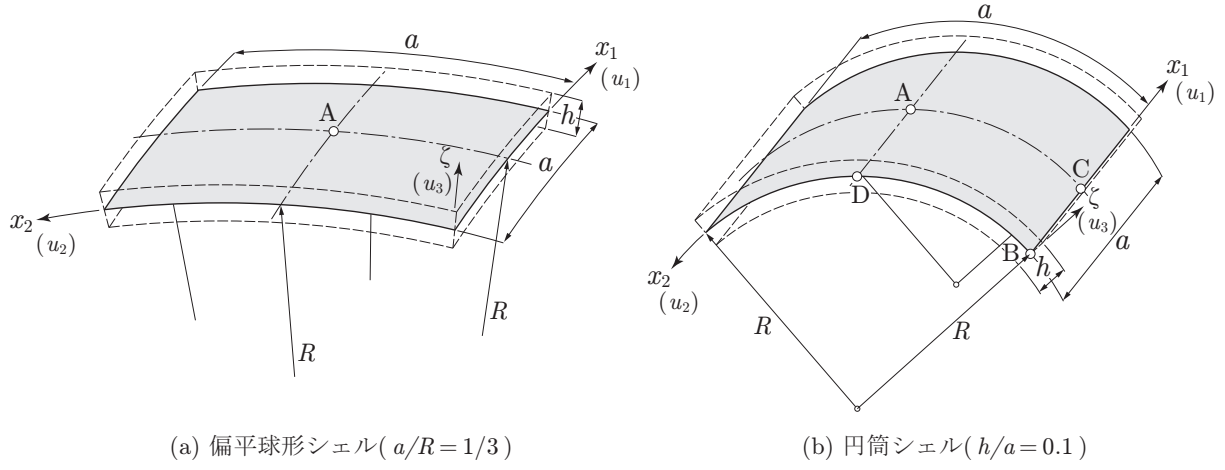


図-4 二重曲率シェル

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} \\ & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} \\ & & S_{33} & S_{34} & S_{35} \\ & \text{sym.} & & S_{44} & S_{45} \\ & & & & S_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{mn} \\ V_{mn} \\ W_{mn} \\ X_{mn} \\ Y_{mn} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ q_{mn} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (35)$$

ここに,

$$\begin{aligned} S_{11} &= \alpha_m^2 A_{11} + C_{11}/R_1^2 + \beta_n^2 (A_{33} + 2A_{34} + A_{44})/4 \\ &\quad + \beta_n^2 \{ 2(B_{33}/R_1 - B_{44}/R_2) \\ &\quad + (D_{33}/R_1^2 - 2D_{34}/(R_1 R_2) + D_{44}/R_2^2) \}/4 \\ S_{12} &= \alpha_m \beta_n \{ A_{12} + (A_{33} + 2A_{34} + A_{44})/4 \\ &\quad - (D_{33}/R_1^2 - 2D_{34}/(R_1 R_2) + D_{44}/R_2^2)/4 \} \\ S_{13} &= -\alpha_m \{ (A_{11} + C_{11})/R_1 + A_{12}/R_2 \} \\ S_{14} &= \alpha_m^2 B_{11} - C_{11}/R_1 \\ &\quad + \beta_n^2 \{ B_{44} + (D_{34}/R_1 - D_{44}/R_2) \}/2 \\ S_{15} &= \alpha_m \beta_n \{ B_{33} + (D_{33}/R_1 - D_{34}/R_2) \}/2 \\ S_{22} &= \beta_n^2 A_{22} + C_{22}/R_2^2 + \alpha_m^2 (A_{33} + 2A_{34} + A_{44})/4 \\ &\quad - \alpha_m^2 \{ 2(B_{33}/R_1 - B_{44}/R_2) \\ &\quad - (D_{33}/R_1^2 - 2D_{34}/(R_1 R_2) + D_{44}/R_2^2) \}/4 \\ S_{23} &= -\beta_n \{ A_{12}/R_1 + A_{22}/R_2 + C_{22}/R_2 \} \\ S_{24} &= \alpha_m \beta_n \{ B_{44} - (D_{34}/R_1 - D_{44}/R_2) \}/2 \\ S_{25} &= \beta_n^2 B_{22} - C_{22}/R_2 \\ &\quad + \alpha_m^2 \{ B_{33} - (D_{33}/R_1 - D_{34}/R_2) \}/2 \\ S_{33} &= A_{11}/R_1^2 + 2A_{12}/(R_1 R_2) + A_{22}/R_2^2 \\ &\quad + \alpha_m^2 C_{11} + \beta_n^2 C_{22} \\ S_{34} &= \alpha_m \{ C_{11} - B_{11}/R_1 \} \\ S_{35} &= \beta_n \{ C_{22} - B_{22}/R_2 \} \\ S_{44} &= \alpha_m^2 D_{11} + \beta_n^2 D_{44} + C_{11} \\ S_{45} &= \alpha_m \beta_n \{ D_{12} + D_{34} \} \\ S_{55} &= \beta_n^2 D_{22} + \alpha_m^2 D_{33} + C_{22} \end{aligned} \quad (36)$$

式 (36) の下線の項が Sanders の方法によりひずみを修正したことによる付加項となる。

式 (35) の連立方程式を (m, n) 項毎に解いて、フーリエ係数 U_{mn} などを求める。これらを式 (31) に用いて変位、式 (12), (14) よりひずみ、式 (15) より応力、式 (24), (25) より合応力を計算する。

なお、以上の定式化において $R_1=R_2=\infty$ (平板) としたときには、Mindlin の板曲げ理論に一致する。

3. 数値計算例

図-4に示す周辺が単純支持され、等分布荷重 q が満載された二重曲率シェルの数値計算を実施して、Reddy の偏平シェル理論の適用性と Sanders の方法によりひずみを修正する効果を調べる。計算モデルは x_1, x_2 軸に沿ったシェル幅を a とし、ポアソン比は $\nu=0.3$ 、せん断補正係数は $k=5/6$ を用いる。本計算例では、式 (31) の展開項数 m, n には応力でも 7~8 桁以上の収束値が得られる十分な値を用いている。また、計算値には、式 (27) で与えられる伸び剛性 D_p と曲げ剛性 D_b を用いて以下の無次元化を行っている。

$$\left. \begin{aligned} u_1^* &= \frac{u_1 D_p}{q a^2}, & u_2^* &= \frac{u_2 D_p}{q a^2}, & u_3^* &= \frac{u_3 D_b}{q a^4} \\ \sigma_{11}^* &= \frac{\sigma_{11} h^2}{q a^2}, & \sigma_{22}^* &= \frac{\sigma_{22} h^2}{q a^2}, & \tau_{12}^* &= \frac{\tau_{12} h^2}{q a^2} \\ \tau_{23}^* &= \frac{\tau_{23} h}{q a}, & \tau_{13}^* &= \frac{\tau_{13} h}{q a}, \\ N_{11}^* &= \frac{N_{11}}{q a}, & M_{11}^* &= \frac{M_{11}}{q a^2} \end{aligned} \right\} \quad (37)$$

3.1 板厚比の影響

Reddy の論文¹⁰⁾で扱われている図-4(a)に示す $a/R=1/3$ の偏平球形シェル ($R_1=R_2=R$) を計算して、板厚比の影響を調べる。

表-1 偏平球形シェル ($a/R=1/3$) の変位, 応力, 合応力

種 別	解 法	$h/a=0.01$	$h/a=0.05$	$h/a=0.1$	$h/a=0.2$	$h/a=0.3$
$u_3^* \times 1000$	本級数解	-0.08982	-1.77764	-3.22353	-4.52505	-5.73339
	偏平シェル	-0.08982	-1.77764	-3.22353	-4.52505	-5.73339
$\sigma_{11}^* \times 10$ (上縁)	本級数解	-0.14662	-1.73357	-2.62618	-2.89998	-2.89339
	偏平シェル	-0.14687	-1.74802	-2.66995	-2.99664	-3.03806
$\sigma_{11}^* \times 10$ (下縁)	本級数解	-0.18038	0.46389	1.54563	2.30811	2.56169
	偏平シェル	-0.18008	0.46003	1.51987	2.23117	2.43360
$N_{11}^* \times 10$	本級数解	-16.34751	-12.87986	-5.75043	-1.91368	-1.00743
	偏平シェル	-16.34751	-12.87986	-5.75043	-1.91368	-1.00743
$M_{11}^* \times 100$	本級数解	0.02768	-1.84004	-3.49152	-4.35651	-4.55972
	偏平シェル	0.02768	-1.84004	-3.49152	-4.35651	-4.55972

表-2 円筒シェル ($h/a=0.1$) の変位と応力

a/R	解 法	$u_1^* \times 10$	$u_2^* \times 10$	$u_3^* \times 1000$	$\sigma_{11}^* \times 10$	$\sigma_{22}^* \times 10$	$\tau_{12}^* \times 10$	$\tau_{23}^* \times 10$	$\tau_{13}^* \times 10$
$\pi/6$	本級数解	1.28377	-6.24423	-3.61810	-2.89679	-2.78389	-2.24856	-3.44818	-3.55328
	偏平シェル	1.36826	-6.33049	-3.61963	-2.93154	-2.82315	-2.21879	-3.54941	-3.54221
	修正無し	1.25066	-6.19094	-3.60284	-2.87740	-2.77684	-2.25156	-3.44395	-3.54868
	FEM ¹⁵⁾	1.27491	-6.19798	-3.59443	-2.89825	-2.78680	-2.25136	—	—
$\pi/2$	本級数解	1.69435	-8.49533	-1.57652	-1.58164	-1.29226	-1.59841	-1.82927	-1.93078
	偏平シェル	1.80696	-8.63172	-1.58261	-1.63128	-1.35024	-1.53327	-2.01698	-1.88536
	修正無し	1.63856	-8.33793	-1.55141	-1.54687	-1.27357	-1.62694	-1.83772	-1.93767
	FEM ¹⁵⁾	1.69175	-8.46979	-1.57527	-1.58601	-1.29790	-1.60428	—	—
$5\pi/6$	本級数解	1.24647	-6.70071	-0.68305	-0.80348	-0.46929	-1.05556	-1.19403	-1.10710
	偏平シェル	1.32817	-6.84198	-0.69024	-0.83807	-0.50451	-0.98183	-1.40786	-1.05010
	修正無し	1.21513	-6.58124	-0.67134	-0.78494	-0.46013	-1.11260	-1.21395	-1.12902
	FEM ¹⁵⁾	1.24849	-6.68775	-0.68521	-0.80505	-0.47039	-1.06871	—	—
備 考		D 点	C 点	A 点	A 点 (上縁)	A 点 (上縁)	B 点 (下縁)	C 点	D 点

表-1は板厚比 $h/a=0.01 \sim 0.3$ の偏平球形シェルについて、中央点 A のたわみ u_3 、上下縁の直応力 σ_{11} 、軸力 N_{11} 、曲げモーメント M_{11} を無次元化して示したものである。比較のため Reddy の偏平シェル理論による計算値も示してある。なお、板厚比 $h/a=0.3$ は一次せん断変形理論の適用範囲外ではあるが参考のために示してある。

表より、本級数解と Reddy の偏平シェル理論による計算値を比較すると、たわみ u_3 と合応力 N_{11} 、 M_{11} は良く一致している。しかし、上縁の応力 σ_{11} では Reddy の偏平シェル理論による計算値は本級数解に対して $h/a=0.01$ で 0.2%、0.1 で 1.7%、0.2 で 3.3%、0.3 で 5.0% の誤差が生じており、下縁でも同程度の誤差となっている。Reddy の偏平シェル理論では式 (12) で $1/(1+\zeta/R_i) \approx 1$ としているので、偏平シェルの計算でもひずみや応力には板厚比が大きくなると大きな誤差が生じることになる。

3.2 曲率半径の影響

図-4(b) に示す板厚比 $h/a=0.1$ 、 $R_1=\infty$ 、 $R_2=R$ の円筒シェルを計算して、曲率半径の影響を調べる。

表-2は、 $a/R=\pi/6$ 、 $\pi/2$ 、 $5\pi/6$ の円筒シェルに対し

て、変位の 3 成分 u_1 、 u_2 、 u_3 と応力の 5 成分 σ_{11} 、 σ_{22} 、 τ_{12} 、 τ_{23} 、 τ_{13} の最大値をまとめたものである (これらの最大値の生じる位置は備考欄に示している)。比較のために、Reddy の偏平シェル理論による計算値 (偏平シェル)、式 (14)、(36) の下線の項を省略して Sanders の方法によりひずみを修正しない場合の計算値 (修正無し)、9 節点一般シェル要素¹⁴⁾を用いて 40×40 に細分割した場合の有限要素解 (FEM) も示している。なお、有限要素解には汎用構造解析システム ADINA¹⁵⁾を用いている。

表より、Reddy の偏平シェル理論による計算値 (偏平シェル) では、たわみ u_3 は本級数解に良く一致しているが、変位 u_1 は $a/R=\pi/6$ の偏平な形状でも本級数解に対して 6.6% の誤差が生じている。当然のことではあるが a/R が大きくなるにつれて応力の誤差も大きくなっている。

Sanders の方法によりひずみを修正しない場合の計算値 (修正無し) では、 $a/R=\pi/6$ のときには変位 u_1 で本級数解に対して約 2.6% の誤差が生じているが、その他の変位と応力は 1% 以下となっている。 a/R が大きくなると変位と応力の誤差が大きくなり、 $a/R=5\pi/6$ では τ_{12} で 5.4%、その他の変位と応力でも約 2% の誤

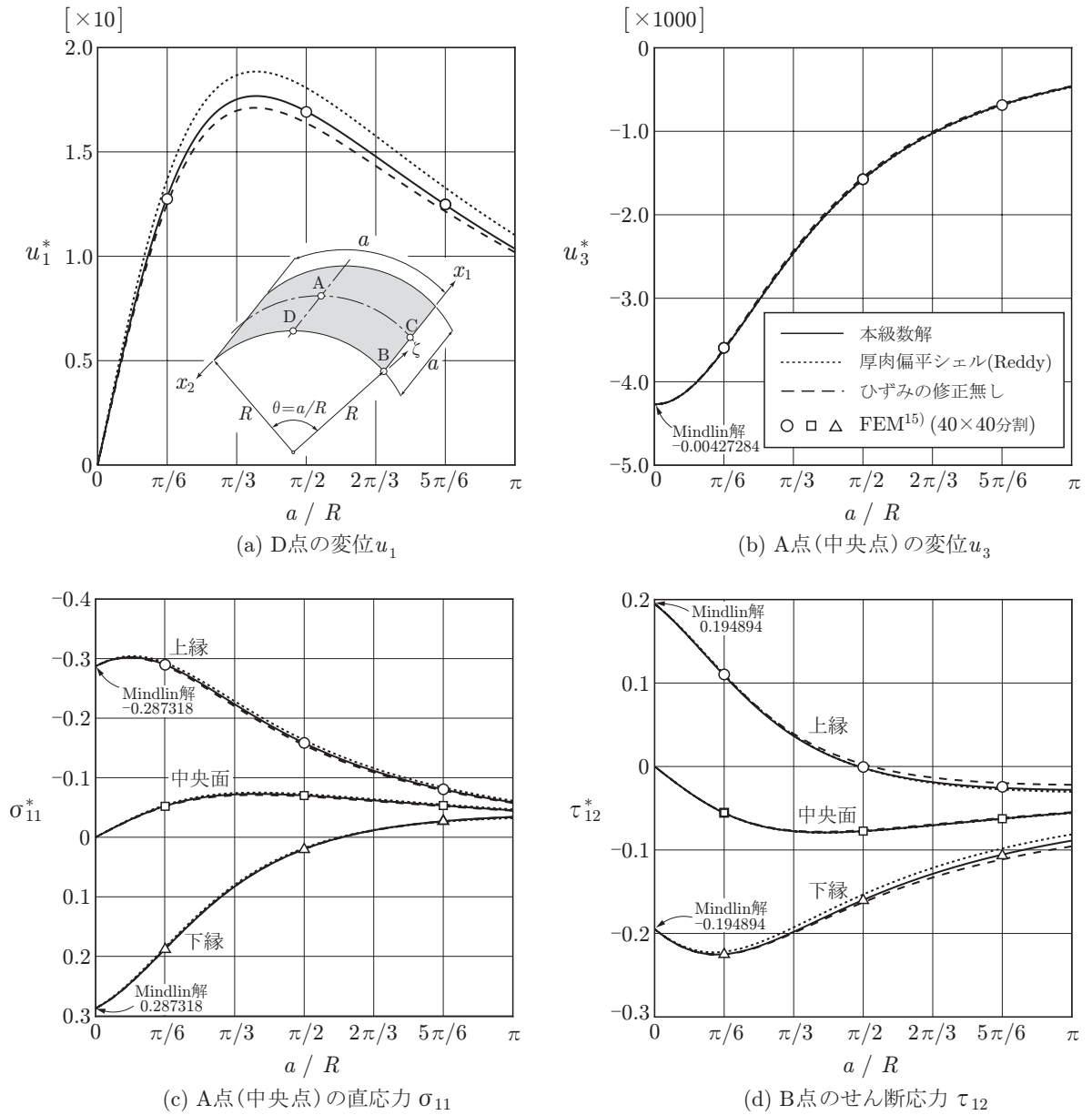


図-5 円筒シェルの変位と応力 ($h/a=0.1$)

差が生じている。

一方、9 節点一般シェル要素を用いて細分割した有限要素解 (FEM) は本級数解と良く一致しており、 $a/R=\pi/6$ の浅いシェルから $a/R=5\pi/6$ の深いシェルまで、変位と応力の誤差は 1% 以下となっている。比較に用いた一般シェル要素は、三次元弾性理論に基づいたソリッド要素において厚さ方向に変位を直線補間し、法線方向の応力がゼロとなるシェルの仮定を導入した退化シェル要素である¹⁴⁾。ひずみを修正しない既往の解析解 (修正無し) とでは変位、応力ともに数 % の誤差があり、法線まわりのモーメントのつり合い条件を満足するようにひずみ成分を修正しなければ、離散化手法の精度検証のための厳密解として用いるには精度が悪い。なお、表-2の面外せん断応力 τ_{23} と τ_{13} において、有限要素解¹⁵⁾は平均せん断応力ではないた

めに空欄としている。

図-5は a/R を $0 \sim \pi$ まで変化させときの変位 u_1 , u_3 , 応力 σ_{11} , τ_{12} を示したもので、本級数解を実線、Reddy の扁平シェル理論による計算値を点線、ひずみを修正しない場合の計算値を破線で示している。図中の○印などの記号は表-2に示した一般シェル要素による有限要素解¹⁵⁾であり、この細分割した有限要素解は、浅いシェルから深いシェルまで本級数解に良く一致している。

3.3 ひずみ修正の効果

本研究では、法線まわりのモーメントのつり合い条件である式 (9) を満足するように Sanders の方法により修正したひずみ成分を用いている。球形シェル ($R_1=R_2$) では法線まわりのつり合いは恒等的に満足されるの

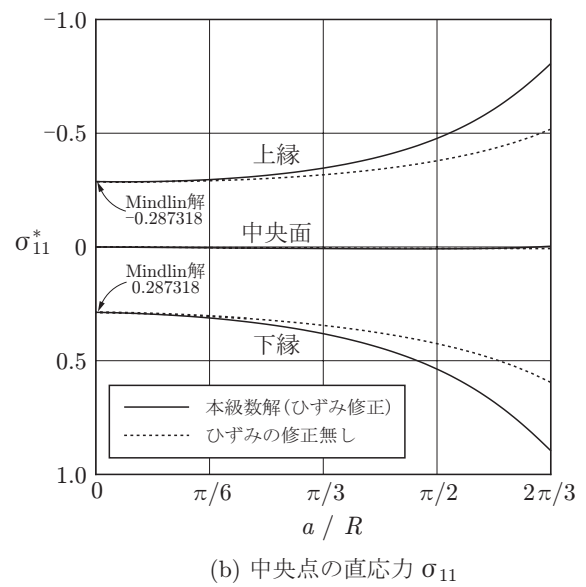
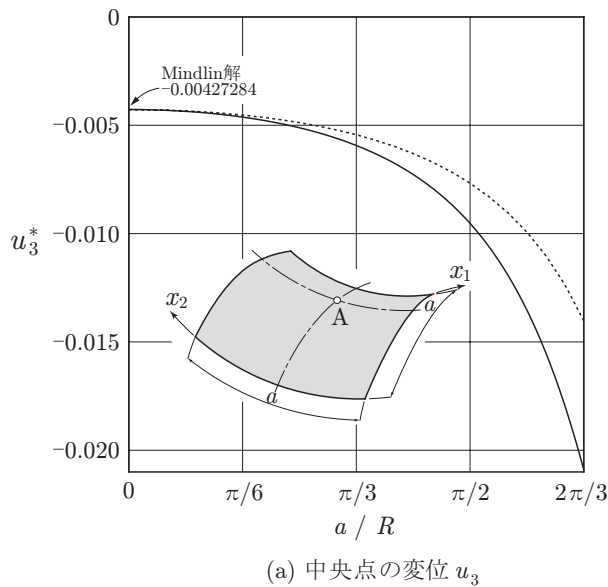


図-6 HP シェルの変位と応力 ($h/a=0.1$)

でひずみを修正する効果は無いが、円筒シェルでは 3.2 に示したように a/R が大きくなると法線 ζ まわりの回転が大きくなって、誤差が大きくなる。

図-6は、板厚比 $h/a=0.1$, $R_1=R$, $R_2=-R$ の HP シェルについて図-5と同様に計算した中央点 A のたわみ u_3 と直応力 σ_{11} を示したもので、本級数解を実線で、ひずみを修正しない場合の計算値を点線で示している。ひずみを修正しない場合には、 $a/R=\pi/6$ 程度までは本級数解と良く一致しているが、 a/R が大きくなって法線 ζ まわりの回転が大きくなると誤差が極めて大きくなっている。

よって、法線 ζ まわりのモーメントのつり合い条件を満足するようにひずみ成分を修正しなければ、 ζ まわりの回転が大きくなる場合に大きな誤差が生じることになる。なお、薄肉シェルの研究でも、ヘリカルシェルの計算において Love の 1 次近似理論に無視できない誤差が生じることを Cohen が指摘している¹⁶⁾。

4. 結 論

一次せん断変形理論に基づいて深い二重曲率シェルの曲げ解析を定式化し、正確な Navier 型の解析解を求めた。法線 ζ まわりのモーメントのつり合い条件を満足させるように Sanders の方法によりひずみ成分を修正し、合応力も正確に取り扱っている。

これらを単純支持された偏平球形シェル、円筒シェル、HP シェルの数値計算に用いた結果より次のことが言える。

- (1) 一次せん断変形理論による厚肉シェルの定式化において、直交曲線座標系におけるひずみ-変位関係式から得られるひずみ成分をそのまま用いたので

は、薄肉理論における Love の理論と同様に、法線 ζ まわりのモーメントのつり合い条件を満足しない。そのため、 ζ まわりの回転が大きくなる場合には大きな誤差が生じることになる。Sanders の方法によりひずみ成分を修正し合応力も正確に取り扱った本級数解は、中厚の浅いシェルから深いシェルに対して、法線 ζ まわりの回転が大きくなる場合にも適用できる。

- (2) 本級数解は、一般シェル要素 (退化シェル要素) を用いた有限要素解とも良く一致しており、離散化手法の精度検証のための比較解 (一次せん断変形理論による厳密解) として用いることができる。

本論文では二重曲率シェルの曲げ解析を取り扱ったが、既往の厚肉シェルの研究では直交曲線座標系におけるひずみ-変位関係式から得られるひずみ成分をそのまま用いているものが多い。今後、自由振動解析や座屈解析、Lévy 型解析解などに適用し、深いシェルに対して一次せん断変形理論による正確な解析解を整備して行く予定である。

参考文献

- 1) Love, A.E.H. : *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, 4th ed., Dover, 1944.
- 2) 小林繁夫, 近藤恭平 : 弾性力学, 培風館, pp.177-200, 1987.
- 3) Sanders, J.L. : An improved first-approximation theory for thin shells, *NASA Technical Report R-24*, 1959.
- 4) Naghdi, P.M. : The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic shells of revolution, *Quarterly Applied Mathematics*, Vol.XV, No.1, pp.41-52, 1959.
- 5) Reissner, E. : Stress strain relations in the theory of thin elastic shells, *Journal of Mathematical Physics*, 31, pp.109-119, 1959.
- 6) Herrmann, G. and Mirsky, I. : Three-dimensional

- and shell-theory analysis of axially symmetric motion of cylinders, *Journal of Applied Mechanics*, ASME, Vol.23, No.4, pp.563–568, 1956.
- 7) Chaudhuri, R.A. and Abu-Arja, K.R : Closed-form solutions for arbitrary laminated anisotropic cylindrical shells (tubes) including shear deformation, *AIAA Journal*, Vol.27, No.11, pp.1597–1605, 1989.
 - 8) Leissa, A.W. and Chang, J.D. : Elastic deformation of thick, laminated composite shells, *Composite Structures*, 35, pp.153–170, 1996.
 - 9) 土木学会 鋼構造委員会 : 鋼構造シリーズ 11 ケーブル・スペース構造の基礎と応用, 土木学会, pp.91–136, 1999.
 - 10) Reddy, J.N. : Exact solutions of moderately thick laminated shells, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol.110, No.5, pp.794–809, 1984.
 - 11) Chaudhuri, R.A. and Kabir, H.R.H. : Effect of boundary constraint on the frequency response of moderately thick doubly curved cross-ply panels using mixed fourier solution functions, *Journal of Sound and Vibration*, 283, pp.263–293, 2005.
 - 12) Toorani, M.H. and Lakis, A.A. : General equations of anisotropic plates and shells including transverse shear deformation, rotary inertia and initial curvature effects, *Journal of Sound and Vibration*, 237, pp.561–615, 2000.
 - 13) Qatu, M.S. : Accurate equations laminated composite deep thick shells, *International Journal of Solids and Structures*, 36, pp.2917–2941, 1999.
 - 14) Bathe, K.J. : *Finite Element Procedures*, Prentice Hall, pp.437–449, 1996.
 - 15) ADINA Theory and Modeling Guide : ADINA R & D Inc., 2003.
 - 16) Cohen, J.W. : The inadequacy of the classical stress-strain relations for the right helicoidal shell, *Proc. Symp. on Theory of Thin Elastic Shells*, North-Holland, Amsterdam, pp.415–433, 1960.

(2007 年 9 月 18 日 受付)