円筒形容器内容液の水平方向非線形振動の解析

NONLINEAR HORIZONTAL OSCILLATION ANALYSIS OF LIQUID IN CYLINDRICAL CIRCULAR TANK

高西照彦*・若原敏裕**
Teruhiko TAKANISHI and Toshihiro WAKAHARA

*正会員　工博　九州工業大学名誉教授　（〒805-0035 北九州市八幡東区山路 2-4-8）
**正会員　工博　清水建設（株）技術研究所　（〒135-8530 東京都江東区越中島 3-4-17）

Perturbation method was used to investigate the nonlinear sloshing motion in a cylindrical circular tank in response to forced horizontal oscillation. First three terms in perturbation expansion were adopted in the present paper. When the ratio of wave height to water depth is more smaller than 0.3, the numerical results are in agreement with the experimental data indicating that the fluid response, both in terms of wave height and hydrodynamic force. According to the theoretical expression deduced from perturbation method in this paper, the time required for numerical calculation is extremely short.

Key Words : nonlinear vibration , circular cylindrical tank , numerical analysis , perturbation method

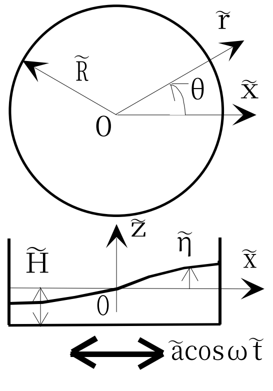
1．はじめに

図－１に示すような円筒形容器中の内容液が水平方向の加振を受けて非線形振動を行うとき，その内容液に対する等価振動系を解析的に定式化することができれば，それは，これら円筒形容器の内容液を TLD（同調液体ダンパー）として利用しようとする場合に，その設計に際して必要な基礎的な資料の一つとなる．円筒形 TLD の等価振動系を定式化するとき，その前段階として，円筒形容器内容液の非線形振動の解析を行い，その振動特性を明かにすることが必要である．

円筒形容器内容液の非線形振動解析に関しては，これまでに有限要素法を用いた解析[1)]，境界要素法を用いた解析[2)]，摂動法を用いた解析[3)]，変分原理を用いた解析[4),5)]等がある．

若原等[1)]は，水深の浅い場合に適用できるBoussinesqの方程式を利用し，これを有限要素法によって解くことによって，円筒容器内容液の非線形振動解析を行っている．また，大山[2)]の提案した境界要素法に従えば３次元立体領域における問題を２次元表面領域上の問題に置換して処理できるので，取扱う未知量の数を著しく低減することができるという特長がある．しかし，上記の２つの方法に従えば，未知量の数が低減されるとはいえ，それでもなお，取扱わなければならない未知量の数は多いので，その数値計算に際しては多大の記憶容量を必要とし，その上，振動現象が定常状態に達するまで計算を実行するとすれば，長時間に及ぶ計算時間が必要であるという難点がある．

Welt等[3)]の摂動法を用いた解析においては，それは水深の深浅について特に制約条件などは課されていない一般的な解析法であるが，ただ，加振振動数が共振振動数に等しい場合とそうでない場合とではこれを別々に分けて取扱わなければならないので，解法としていささか煩雑である．



図－１　円筒容器及び座標系

大森等[4), 5)]の変分原理を用いた近似計算法は，水深の深浅及び取扱う振動数の範囲に関しては特に制約条件などは課されていない一般的な解析法であるが，近似の程度を高くするに従って解かなければならない非線形連立方程式の非線形項の次数が高くなるという難点がある．

Ockendon等[6)]は，水深が浅く，加振振幅が容器の振動方向の長さに比べて小さいという条件の下に，内容液の１次の固有振動数近傍における振動特性を考える場合に，摂動法を用いて，長方形容器内容液の非線形振動数特性を求める方法を示した．

本論では，Ockendon等と同じ考え方に従って，摂動法を用いて調和波水平加振による円筒容器内容液の非線形振動数特性を求めることが出来る理論式を導き，数値計算を行って，得られた結果を既存の実験結果[1), 2)]と比較し，理論式の適用性について種々の検討を加えた．

２．解析理論

（１）　基礎方程式

解析に際しては次のような仮定を採用した．

円筒容器内容液の水深は浅いとし，そのスロッシング１次の共振振動数（基本固有振動数）近傍の振動数を考察の対象とする．この場合，その振動数は一般に低いので，円筒容器は剛であると仮定してもよい．これらの仮定は本理論を TLD に適用する場合には妥当な仮定であるといえる．

また, 内容液については, それは完全流体で, 非圧縮, 渦無し流れと仮定する．このとき，流体は速度ポテンシャルを持つ．

いま，この速度ポテンシャルを $\tilde{\varphi}$ とすれば，内容液の運動は次に示すラプラスの方程式と圧力方程式によって支配される．

$$\frac{\partial^2\tilde{\varphi}}{\partial\tilde{r}^2}+\frac{1}{\tilde{r}}\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\tilde{r}}+\frac{1}{\tilde{r}^2}\frac{\partial^2\tilde{\varphi}}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\tilde{\varphi}}{\partial\tilde{z}^2}=0 \tag{1}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\tilde{t}}+\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\tilde{r}}\right)^2+\left(\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\tilde{r}\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\tilde{z}}\right)^2\right\}+g\,\tilde{z}\\&-\tilde{r}\tilde{a}\omega^2\cos\theta\cos\omega\tilde{t}+\frac{\tilde{p}}{\rho}=0\end{aligned} \tag{2}$$

ここに, $\tilde{t}$ は時間, g は重力の加速度, $\tilde{a}$ は加振振幅, ω は加振円振動数, ρ は内容液の密度, $\tilde{p}$ は全水圧である．

境界条件は次の通りである．

(a)　容器底面において

$$\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\tilde{z}}=0\,,\quad(\tilde{z}=-\tilde{H}) \tag{3}$$

(b)　容器側壁面上において

$$\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\tilde{r}}=0\,,\quad(\tilde{r}=\tilde{R}) \tag{4}$$

(c)　自由表面上における運動学的条件は波高を $\tilde{\eta}$ とすれば

$$\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\tilde{z}}=\frac{\partial\tilde{\eta}}{\partial\tilde{t}}+\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\tilde{r}}\frac{\partial\tilde{\eta}}{\partial\tilde{r}}+\frac{1}{\tilde{r}^2}\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\theta}\frac{\partial\tilde{\eta}}{\partial\theta}\,,\quad(\tilde{z}=\tilde{\eta}) \tag{5}$$

(d)　力学的条件は, 式(2)において $\tilde{p}=0$ 及び $\tilde{z}=\tilde{\eta}$ とおけばよいので，次のように表される．

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\tilde{t}}+\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\tilde{r}}\right)^2+\left(\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\tilde{r}\partial\theta}\right)^2+\left(\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial\tilde{z}}\right)^2\right\}+g\tilde{\eta}\\&-\tilde{r}\tilde{a}\omega^2\cos\theta\cos\omega\tilde{t}=0\,,\quad(\tilde{z}=\tilde{\eta})\end{aligned} \tag{6}$$

（２）基礎方程式の無次元化と摂動展開

まず，式(1)のラプラスの方程式と式(3)～(6)の境界条件について，次に示すような無次元化を行う．

$$\tilde{t}=t/\omega \tag{7}$$

$$\tilde{R}=\mu_{11}R\,,\qquad\tilde{r}=rR \tag{8),(9}$$

$$\tilde{H}=HR \tag{10}$$

式(8)で，μ_{11} は　$J_1'(\mu_{11})=0$　を満たす定数で，その値は $\mu_{11}=1.8411\cdots$　である．ここで，上付き添字　′　は微分を表す．また，$\tilde{a}/R$ の値は小さいとして

$$\varepsilon=\tilde{a}/R \tag{11}$$

とおき，これを用いて，$\tilde{\varphi},\tilde{\eta},\tilde{z}$ を次式に示すように無次元化する．

$$\tilde{\varphi}=R^2\omega\varepsilon^{1/2}\varphi \tag{12}$$

$$\tilde{\eta}=R\varepsilon^{3/4}\eta \tag{13}$$

$$\tilde{z}=R\varepsilon^{1/4}z \tag{14}$$

これらの無次元量（式(7)～(14)）を用いれば，基礎方程式（式(1)及び式(3)～(6)）は次のように表すことができる．いま，Δを２次元のラプラシアン

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \tag{15}$$

とし，下付き添字で偏微分を表すとすれば,

$$\varepsilon^{1/2}\Delta+\varphi_{zz}=0 \tag{16}$$

$$\varphi_z=0\,,\quad(z=-\varepsilon^{-1/4}H) \tag{17}$$

$$\varphi_r=0\,,\quad(r=\mu_{11}) \tag{18}$$

$$\varphi_z=\varepsilon^{1/2}\eta_t+\varepsilon(\varphi_r\eta_r+\varphi_\theta\eta_\theta/r^2)\qquad(z=\varepsilon^{1/2}\eta) \tag{19}$$

$$\begin{aligned}&\eta+\varepsilon^{-1/4}(\omega/\omega_{11})^2\tanh H\{\varphi_t+0.5\varepsilon^{1/2}(\varphi_r^2+\varphi_\theta^2/r^2)\\&+\varphi_z^2/2-\varepsilon^{1/2}r\cos\theta\cos t\}=0\,,\quad(z=\varepsilon^{\frac{1}{2}}\eta)\end{aligned} \tag{20}$$

ここに，式(20)中の ω_{11} は円筒形容器内容液の基本固有円振動数で，次式によって与えられる．

$$\omega_{11}^2 = (g/R)\tanh H \tag{21}$$

いま，式(20)において

$$\delta_R = (\omega/\omega_{11})^2 - 1 \tag{22}$$

とおけば，ω としては ω_{11} の近傍の円振動数を考えるのであるから，δ_R は微少量であるとしてよい．

ここで，あとの便利のために次のような定義式を導入する．

$$\kappa = \varepsilon^{-1/4} H \tag{23}$$

$$\lambda = \varepsilon^{-1/2}\delta_R \tag{24}$$

H は仮定により小さな量であるから，式(23)から得られる $H = \varepsilon^{1/4}\kappa$ は小さな量である．したがって，式(20)中の $\tanh H$ は次式のように展開できる．

$$\tanh H = \tanh \varepsilon^{1/4}\kappa = \varepsilon^{1/4}\kappa - (\varepsilon^{1/4}\kappa)^3/3 + 2(\varepsilon^{1/4}\kappa)^5/15 - \cdots \tag{25}$$

また，式(22)と(24)から

$$(\omega/\omega_{11})^2 = 1 + \delta_R = 1 + \varepsilon^{1/2}\lambda \tag{26}$$

と表される．したがって，式(25),(26)を用いれば，式(20)は次式のように表される．

$$\begin{aligned}\eta + \kappa(1+\lambda\varepsilon^{1/2})&(1-\varepsilon^{1/2}\kappa^2/3+2\varepsilon\kappa^4/15-\cdots)\\ &\cdot\{\varphi_t + \varepsilon^{1/2}(\varphi_r^2+\varphi_\theta^2/r^2)/2+\varphi_z^2/2\\ &-\varepsilon^{1/2} r\cos\theta\cos t\} = 0,\quad (z=\varepsilon^{1/2}\eta)\end{aligned} \tag{27}$$

さて，φ, η に対する摂動解を得るために，これをパラメーター ε を用いて次式に示すように展開する．

$$\varphi = \varphi_0 + \varepsilon^{1/2}\varphi_1 + \varepsilon\varphi_2 + \cdots \tag{28}$$

$$\eta = \eta_0 + \varepsilon^{1/2}\eta_1 + \varepsilon\eta_2 + \cdots \tag{29}$$

一方，式(19),(27)は $z = \varepsilon^{1/2}\eta$ において成立する境界条件であるが，これを以下に示すようにして $z=0$ において成立する条件式に変換することにする．

いま，式(27)中の φ_t を例に取れば，それは式(28)を参照して

$$\varphi_t = \varphi_{0t} + \varepsilon^{1/2}\varphi_{1t} + \varepsilon\varphi_{2t} + \cdots \tag{30}$$

と表される．

式(30)において，$\varphi_{0t}, \varphi_{1t}$ 等をそれぞれ $z=0$ のまわりでテーラー展開すれば

$$\begin{aligned}\varphi_t &= \varphi_{0t}^{(0)} + z\varphi_{0tz}^{(0)} + z^2\varphi_{0tzz}^{(0)}/2 + \cdots\\ &+ \varepsilon^{1/2}(\varphi_{1t}^{(0)} + z\varphi_{1tz}^{(0)} + \cdots) + \varepsilon(\varphi_{2t}^{(0)} + \cdots) + \cdots\end{aligned} \tag{31}$$

ここに，下付き添字 z は z に関する偏微分を表し，上付き記号 (0) は $z=0$ のときの値を表している．ただし，簡略化のため,以後,誤解がない限り記号(0)は省略することにする．

上式で $z = \varepsilon^{1/2}\eta$ とおき，さらに，この η に式(29)を代入した後，ε について整理すれば次式を得る．

$$\begin{aligned}\varphi_t = \varphi_{0t} &+ \varepsilon^{1/2}(\eta_0\varphi_{0tz} + \varphi_{1t}) + \varepsilon(\eta_1\varphi_{0tz} + \eta_0^2\varphi_{0tzz}/2\\ &+ \eta_0\varphi_{1tz} + \varphi_{2t}) + \cdots,\quad (z=0)\end{aligned} \tag{32}$$

$\varphi_r, \varphi_\theta, \varphi_z$ についても上式と同様な表示式が得られる．

つぎに，摂動法の考え方に従って，式(16)～(19),(27)で表される基礎方程式に，式(28),(29)並びに式(32)及び $\varphi_r, \varphi_\theta, \varphi_z$ についても式(32)と同様な展開表示をした式を代入し，パラメーター ε について整理した後，それぞれ ε の同じオーダーに対して得られる式を示せば次の通りである．ただし，本論では $\varepsilon^{3/2}$ のオーダーまでのものを考慮することにした．

(a)　ε^0 の項について

$$\varphi_{0zz} = 0 \tag{a-1}$$

$$\varphi_{0z} = 0,\quad (z=-\kappa) \tag{a-2}$$

$$\varphi_{0r} = 0,\quad (r=\mu_{11}) \tag{a-3}$$

$$\varphi_{0z} = 0,\quad (z=0) \tag{a-4}$$

$$\eta_0/\kappa + \varphi_{0t} + \varphi_{0z}^2/2 = 0,\qquad (z=0) \tag{a-5}$$

(b)　$\varepsilon^{1/2}$ の項について

$$\Delta\varphi_0 + \varphi_{1zz} = 0 \tag{b-1}$$

$$\varphi_{1z} = 0,\quad (z=-\kappa) \tag{b-2}$$

$$\varphi_{1r} = 0,\quad (r=\mu_{11}) \tag{b-3}$$

$$\varphi_{1z} = \eta_{0t},\quad (z=0) \tag{b-4}$$

$$\begin{aligned}\eta_1/\kappa + (\lambda-\kappa^2/3)\varphi_{0t} + \varphi_{1t} + \{\varphi_{0r}^2 + \varphi_{0\theta}^2/r^2\}/2\\ - r\cos\theta\cos t = 0,\quad (z=0)\end{aligned} \tag{b-5}$$

(c)　ε^1 の項について

$$\Delta\varphi_1 + \varphi_{2zz} = 0 \tag{c-1}$$

$$\varphi_{2z} = 0,\quad (z=-\kappa) \tag{c-2}$$

$$\varphi_{2r} = 0,\quad (r=\mu_{11}) \tag{c-3}$$

$$\eta_0\varphi_{1zz} + \varphi_{2z} = \eta_{1t} + \eta_{0r}\varphi_{0r} + \eta_{0\theta}\varphi_{0\theta}/r^2,\quad (z=0) \tag{c-4}$$

$$\begin{aligned}&\eta_2/\kappa - \kappa^2(\lambda-2\kappa^2/5)\varphi_{0t}/3 + (\lambda-\kappa^2/3)\varphi_{1t}\\ &+\eta_0\varphi_{1tz} + \varphi_{2t} + \varphi_{1z}^2/2 + (\lambda-\kappa^2/3)\varphi_{0r}^2/2\\ &+\varphi_{0r}\varphi_{1r} + (\lambda-\kappa^2/3)\varphi_{0\theta}^2/2r^2 + \varphi_{0\theta}\varphi_{1\theta}/r^2\\ &-(\lambda-\kappa^2/3)r\cos\theta\cos t = 0,\quad (z=0)\end{aligned} \tag{c-5}$$

(d)　$\varepsilon^{3/2}$ の項について

$$\Delta\varphi_2 + \varphi_{3zz} = 0 \tag{d-1}$$

$$\varphi_{3z} = 0,\quad (z=-\kappa) \tag{d-2}$$

$$\varphi_{3r} = 0,\quad (r=\mu_{11}) \tag{d-3}$$

$$\begin{aligned}\eta_1\varphi_{1zz} + \eta_0^2\varphi_{1zzz}/2 + \eta_0\varphi_{2zz} + \varphi_{3z} = \eta_{2t} + \eta_{0r}\varphi_{1r}\\ + \eta_{1r}\varphi_{0r} + \eta_{0\theta}\varphi_{1\theta}/r^2 + \eta_{1\theta}\varphi_{0\theta}/r^2,\quad (z=0)\end{aligned} \tag{d-4}$$

(b-4),(b-5),(c-4),(c-5)及び(d-4)においては，後述のように，φ_0 が z を含まないことを考慮して，φ_0 の z に関する微分の項はすべて省略した．

（３）　摂動方程式の解

前節で得られた ε のそれぞれのオーダーに対する摂動方程式の解を求める．

まず，(a)において，(a-1)を z で 2 回積分し，得られた結果に(a-2)と(a-4)の条件を適用することによって φ_0

が求められる．φ_0 は z を含まず，r, θ, t のみの関数となる．これを

$$\varphi_0 = A(r, \theta, t) \tag{33}$$

とおく．上式を用いれば(a-5)より

$$\eta_0 = -\kappa A_t \tag{34}$$

が得られる．また，(a-3)の境界条件は次式のように表される．

$$A_r(\mu_{11}, \theta, t) = 0 \tag{35}$$

$A(r, \theta, t)$ を定める方程式は，次の $\varepsilon^{1/2}$ の項を解析することによって得られる．

次に，(b)についても同様にして，(b-1)を z で 2 回積分し，(b-2)の条件を適用すれば，φ_1 は $\tilde{A}(r, \theta, t)$ を積分定数として，次式のように得られる．

$$\varphi_1 = -(z+\kappa)^2 \Delta A/2 + \tilde{A} \tag{36}$$

また，式(34),(36)を(b-4)に代入することによって，次の関係式が導かれる．

$$\Delta A - A_{tt} = 0 \tag{37}$$

さらに，(b-5)より η_1 が得られて

$$\begin{aligned}\eta_1 = -\kappa\{&(\lambda - \kappa^2/3)A_t - \kappa^2 A_{ttt}/2 + \tilde{A}_t + A_r^2/2 \\ &+ A_\theta^2/2r^2\} - r\cos\theta\cos t\end{aligned} \tag{38}$$

(b-3)の境界条件は式(35)を考慮すれば，式(36)を用いて，次式のように表される．

$$\tilde{A}_r = 0, \quad (r = \mu_{11}) \tag{39}$$

$\tilde{A}(r, \theta, t)$ を定める方程式は $A(r, \theta, t)$ と同様に，次の ε^1 の項を解析することによって得られる．

(c),(d)についても(a),(b)と同様にすれば φ_2, η_2 を求めることが出来る．結果のみを示せば以下の通りである．

$\bar{A}(r, \theta, t)$ を積分定数として

$$\varphi_2 = (z+\kappa)^4 A_{tttt}/24 - (z+\kappa)^2 \Delta\tilde{A}/2 + \bar{A} \tag{40}$$

$$\begin{aligned}\Delta\tilde{A} - \tilde{A}_{tt} = &(\lambda - \kappa^2/3)A_{tt} - \kappa^2 A_{tttt}/3 + 2A_r A_{tr} \\ &+ 2A_\theta A_{t\theta}/r^2 + A_t A_{tt} + r\cos\theta\sin t\end{aligned} \tag{41}$$

$$\begin{aligned}\eta_2 = -\kappa\{&-\kappa^2(\lambda - 2\kappa^2/5)\varphi_{0t}/3 + (\lambda - \kappa^2/3)\varphi_{1t} \\ &+ \eta\ \varphi_{1tz} + \varphi_{2t} + \varphi_{1z}^2/2 + (\lambda - \kappa^2/3)\varphi_{0r}^2 \\ &+ \varphi_{0r}\varphi_{1r} + (\lambda - \kappa^2/3)\varphi_{0\theta}^2/2r^2 + \varphi_{0\theta}\varphi_{1\theta}/r^2 \\ &-(\lambda - \kappa^2/3)r\cos\theta\cos t\}, \quad (z=0)\end{aligned} \tag{42}$$

$$\begin{aligned}\Delta\bar{A} - A_{tt} = &-\kappa^2\lambda A/6 - (\lambda - 7\kappa^2/3)AA_t \\ &+ 2(\lambda + 2\kappa^2/3)(A_r A_{rt} + A_\theta A_{\theta t}/r^2) \\ &+ \{(\lambda - \kappa^2/3)r\sin t - A_r\cos t\}\cos\theta \\ &+ A_\theta\sin\theta\cos t/r + Ar\cos\theta\cos t \\ &+ \kappa^2(\Delta^2\tilde{A}/6 - \Delta\tilde{A}_{tt}/2) + A_t\Delta A \\ &+ (\lambda - \kappa^2/3)\tilde{A}_{tt} + 2A_{rt}\tilde{A}_r + 2A_r\tilde{A}_{rt} \\ &+ 2A_{\theta t}\tilde{A}_\theta/r^2 + 2A_\theta\tilde{A}_{\theta t}/r^2 - A\tilde{A}_t \\ &+ A_r(A_r A_{rr} + 2A_\theta A_{\theta r}/r^2 - A_\theta^2/r^3) \\ &+ A_\theta^2 A_{\theta\theta}/r^4 - A(A_r^2 + A_\theta^2/r^2)/2\end{aligned} \tag{43}$$

$$\bar{A}_r = 0, \quad (r = \mu_{11}) \tag{44}$$

上記の所論に従って，それぞれ式(35),(39),(44)の条件の下に式(38),(42)を用いて(43)から $A(r, \theta, t), \tilde{A}(r, \theta, t)$ 及び $\bar{A}(r, \theta, t)$ を定めれば，ε^1 の摂動項までを採用した場の速度ポテンシャル $\tilde{\varphi}$ と波高 $\tilde{\eta}$ は式(12),(13)及び(28),(29)から次式によって求められる．

$$\tilde{\varphi} = R^2\omega\varepsilon^{1/2}(\varphi_0 + \varepsilon^{1/2}\varphi_1 + \varepsilon\varphi_2) \tag{45}$$

$$\tilde{\eta} = R\varepsilon^{3/4}(\eta_0 + \varepsilon^{1/2}\eta_1 + \varepsilon\eta_2) \tag{46}$$

ここに，$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2$ は式(33),(36),(40), η_0, η_1, η_2 は式(34),(38),(42)によって与えられる．

（4）関数 $A(r, \theta, t), \tilde{A}(r, \theta, t), \bar{A}(r, \theta, t)$ について

式(37),(41),(43)の解がそれぞれ次のような式で表されると仮定する．

$$A = \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=1}^{M} J_n(\Omega_{nm}r)T_{nm}(t)\cos n\theta \tag{47}$$

$$\tilde{A} = \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=1}^{M} J_n(\Omega_{nm}r)\tilde{T}_{nm}(t)\cos n\theta \tag{48}$$

$$\bar{A} = \sum_{n=0}^{N}\sum_{m=1}^{M} J_n(\Omega_{nm}r)\bar{T}_{nm}(t)\cos n\theta \tag{49}$$

ここに，$T_{nm}(t), \tilde{T}_{nm}(t), \bar{T}_{nm}(t)$ はいずれも時間に関する未知関数であり，これらの関数が求められれば，$A, \tilde{A}, \bar{A}$ が定められたことになる．$J_n(\Omega_{nm}r)$ は第 1 種 n 次のベッセル関数である．また，Ω_{nm} については

$$J_n'(\mu_{nm}) = 0 \tag{50}$$

を満たす根を μ_{nm} とすれば

$$\Omega_{nm} = \mu_{nm}/\mu_{11} \tag{51}$$

で定義される量であり，これを用いれば内容液の(n,m)次の固有円振動数が

$$\omega_{nm}^2 = (g/R)\Omega_{nm}\tanh\Omega_{nm}H \tag{52}$$

で与えられる．下付き添字 n,m はそれぞれ内容液に対する振動形の円周まわり及び半径方向の節点の数を表している．N,M は採用する振動形の数である．

なお，式(47)~(49)は式(50)から明らかなように，いずれも式(35),(39),(44)の境界条件を満たしている．

a) T_{nm} について

式(47)を式(37)に代入する．この式が r 及び θ の如何にかかわらず成立するためには，次式が成り立つことが必要である．

$$\ddot{T}_{nm} + \Omega_{nm}^2 T_{nm} = 0, \quad (n = 1 \sim N, m = 1 \sim M) \tag{53}$$

ここで，上付きの点・は時間 t に関する微分を表す．

上式の解は

$$T_{nm} = a_{nm}\sin\Omega_{nm}t + b_{nm}\cos\Omega_{nm}t \tag{54}$$

と表されるが，a_{nm}, b_{nm} については式(37)からは定めることができず，次項の $\varepsilon^{1/2}$ における式(41)を用いることによって定められる．

b) $\tilde{T}_{nm}$ について

式(47),(48),(54)を式(41)に代入する．式(41)の右辺を見れば，それは r に関するベッセル関数と θ に関する調和

関数及びその積から構成されていることがわかる．今，その右辺を $J_n(\Omega_{nm}r)$ 及び $\cos n\theta$ について級数展開した形で表わす．同式が r 及び θ の如何にかかわらず成立するためには，結局，次式が成立しなければならないことがわかる．

$$\ddot{\tilde{T}}_{nm}+\Omega_{nm}^2\tilde{T}=(T_{nm}\text{及び}\dot{T}_{nm}\text{とその積から構成された式}),\quad (n=1\sim N,\ m=1\sim M) \tag{55}$$

上式は固有円振動数として Ω_{nm} を持つので，右辺の強制項の中に $\sin\Omega_{nm}t$ 或は $\cos\Omega_{nm}t$ を持つ項が含まれていると，その項は永年項となる．したがって，ここで，上式中に永年項があってはならないという条件を課すことにすれば，これより式(54)における右辺の係数 a_{nm}, b_{nm} が定められて，以下のようになる．

$$a_{11}=\beta_{110}^{(0)}/\lambda,\quad b_{11}=0 \tag{56a}$$

$$a_{nm}=b_{nm}=0,\quad (n\neq 1\wedge m\neq 1) \tag{56b}$$

ここで，$\beta_{nms}^{(i)}$ は $f_{ns}^{(i)}(r)$ を r の関数として，これを $J_n(\Omega_{nm}r)$ によって次式のようにベッセル級数

$$f_{ns}^{(i)}(r)=\sum_{m=1}^{M}\beta_{nms}^{(i)}J_n(\Omega_{nm}r) \tag{57}$$

に展開したときの係数で，次式によって求められる．

$$\beta_{nms}^{(i)}=\frac{2(\Omega_{nm}\mu_{11})^2}{\{(\Omega_{nm}\mu_{11})^2-n^2\}\{\mu_{11}J_n(\Omega_{nm}r)\}^2}\cdot\int_0^{\mu_{11}}rf_{ns}^{(i)}(r)J_n(\Omega_{nm}r)\,dr \tag{58}$$

式(56a)の $\beta_{110}^{(0)}$ は $f_{10}^{(0)}(r)=r$ の場合である．

ここまでは，すべての振動方程式において減衰については考えなかったが，実用上は減衰項を考慮する必要がある．したがって，本論では式(56a)の a_{11} に次式に示すような減衰項を導入することにした．

$$a_{11}=\frac{\varepsilon^{1/2}}{\omega^2/\omega_{11}^2-1+\mathrm{sgn}(\omega/\omega_{11}^2-1)\,2h_0\ \omega_{11}/\omega}\beta_{110}^{(0)} \tag{59}$$

ここに，$\mathrm{sgn}(x)$ は符号関数で，$x\geq 0$ のとき 1，$x<0$ のとき−1 である．また，h_0 は減衰定数である．さらに，$2h_0\ \omega_{11}/\omega$ の項については，式(2)において，速度ポテンシャルに比例する減衰 $\xi\tilde{\varphi}$ を導入した場合，時間関数 $T_{nm}(t)$ に関する微分方程式における減衰係数が ξ/ω となることを考慮して，$\xi=2h_0\omega_{11}$ としたものである．

以上のことから，解 A は式(56),(54),(47)より，$\Omega_{11}=1$ であることを考慮して，次式のように表される．

$$A=J_1(r)\,a_{11}\cos\theta\sin t \tag{60}$$

次に，$\tilde{T}_{nm}$ については式(60)を用いれば式(55)から，それを求める微分方程式が以下に示すように得られる．このときにも，減衰項を導入した．

$$\ddot{\tilde{T}}_{0m}+2h_1\ \omega_{11}/\omega\dot{\tilde{T}}+\Omega_{0m}^2\tilde{T}_{0m}=-0.5\beta_{0m0}^{(0)}a_{11}^2\sin 2t\quad (n=0,\quad m=1,2,\cdots,M) \tag{61}$$

$$\ddot{\tilde{T}}_{11}+\tilde{T}_{11}=0,\quad (n=1,\quad m=1) \tag{62}$$

$$\ddot{\tilde{T}}_{1m}+2h_1\ \omega_{11}/\omega\dot{\tilde{T}}_{1m}+\Omega_{1m}^2\tilde{T}_{1m}=-\beta_{1m0}^{(0)}\sin t\quad (n=1,\quad m=2,3,\cdots,M) \tag{63}$$

$$\ddot{\tilde{T}}_{2m}+2h_1\ \omega_{11}/\omega\dot{\tilde{T}}_{2m}+\Omega_{2m}^2\tilde{T}_{2m}=-0.5\beta_{2m0}^{(0)}a_{11}^2\sin 2t\quad (n=2,\quad m=1,2,\cdots,M) \tag{64}$$

$$\tilde{T}_{nm}=0,\quad (n\geq 3,\quad m=1,2,\cdots M) \tag{65}$$

上式中，それぞれ $\beta_{0m0}^{(0)}, \beta_{1m0}^{(0)}, \beta_{2m0}^{(0)}$ は式(57)において $f_{ns}^{(i)}(r)$ を次式のように置いた場合の式(58)の値である．

$$\begin{aligned} f_{00}^{(0)}(r)&=\{J_1'(r)\}^2-(0.5-r^{-2})J_1^2(r)\\ f_{1m0}^{(0)}(r)&=r\\ f_{2m0}^{(0)}(r)&=\{J_1'(r)\}^2-(0.5+r^{-2})J_1^2(r)\end{aligned} \tag{66}$$

また，記号 ′ は当該関数の引数に関する微分を表す．さらに，h_1 は $\varepsilon^{1/2}$ の項における減衰定数である．

式(61),(63),(64)に対する強制振動解は

$$\tilde{T}_{nm}=\tilde{a}_{nm}\sin pt+\tilde{b}_{nm}\cos pt,\quad (p=1\,or\,2) \tag{67}$$

と書くことができる．上式で $\tilde{a}_{nm}, \tilde{b}_{nm}$ の値は容易に求めることができる．式(62)の強制振動解

$$\tilde{T}_{11}=\tilde{a}_{11}\sin t+\tilde{b}_{11}\cos t \tag{68}$$

の係数 $\tilde{a}_{11}, \tilde{b}_{11}$ については，解 A の場合の a_{11}, b_{11} と同様に，次の $\varepsilon^{3/2}$ の摂動項における式(43)を用いてこれを定めることができる．

以上のことから，$\tilde{A}$ は式(67)を用いて(48)より

$$\tilde{A}=\sum_{n=0}^{2}\sum_{m=1}^{M}J_n(\Omega_{nm}r)\tilde{T}_{nm}(t)\cos n\theta \tag{69}$$

と表すことができる．

c) $\bar{T}_{nm}$ について

式(49),(60),(69)を式(43)に代入する．その後の手順は前項 b)の場合と全く同様にすればよい．ここでは結果のみを記すことにする．

まず，式(68)の $\tilde{a}_{11}\,\tilde{b}_{11}$ については

$$\tilde{a}_{11}=\Big\{-\kappa^2\lambda a_{11}/6+(\lambda-\kappa^2/3)\beta_{110}^{(0)}-3a_{11}^3\beta_{110}^{(3)}/64-0.25a_{11}\sum_{s=1}^{M}(2\tilde{a}_{0s}\beta_{11s}^{(1)}+\tilde{a}_{2s}\beta_{11s}^{(2)})\Big\}\varepsilon^{1/2}\{\omega^2/\omega_{11}^2-1+\mathrm{sgn}(\omega^2/\omega_{11}^2-1)\,2h_1\ \omega_{11}/\omega\}^{-1} \tag{70}$$

$$\tilde{b}_{11}=-0.25a_{11}\sum_{s=1}^{M}(2\tilde{b}_{0s}\beta_{11s}^{(1)}+\tilde{b}_{2s}\beta_{11s}^{(2)})\varepsilon^{1/2}\cdot\{\omega^2/\omega_{11}^2-1+\mathrm{sgn}(\omega^2/\omega_{11}^2-1)\,2h_1\ \omega_{11}/\omega\}^{-1} \tag{71}$$

上式においても式(59)の a_{11} の場合と同様に減衰項を導入した．また，$\beta_{11s}^{(1)}, \beta_{11s}^{(2)}, \beta_{110}^{(3)}$ は式(57)において $f_{ns}^{(i)}(r)$ を次式のように置いた場合の式(58)の値である．

$$
\begin{aligned}
f_{1s}^{(1)}(r) &= (\Omega_{0s}^2 - 2)J_1(r)J_0(\Omega_{0s}r) - \Omega_{0s}\{J_0(r) \\
&\quad - J_2(r)\}J_1(\Omega_{0s}r) \\
f_{1s}^{(2)}(r) &= (\Omega_{2s}^2 - 2)J_1(r)J_2(\Omega_{2s}r) + \Omega_{2s} \\
&\quad \cdot\{J_0(r)J_1(\Omega_{2s}r) + J_2(r)J_3(\Omega_{2s}r)\} \\
f_{10}^{(3)}(r) &= J_0(r)\{5J_0(r)J_1(r) - 6J_1(r)J_2(r) \\
&\quad + 2J_2(r)J_3(r)\} + J_2^2(r)\{4J_1(r) - J_3(r)\}
\end{aligned}
\tag{72}
$$

次に，$\overline{T}_{nm}$ については，減衰項を導入して，

$$
\ddot{\overline{T}}_{nm} + 2h_2\,\omega_{11}/\omega\,\dot{\overline{T}}_{nm} + \Omega_{nm}^2\overline{T}_{nm} = \sum_{p=1}^{3}(P_{nm}^{(p)}\sin pt + Q_{nm}^{(p)}\cos pt),\quad (n=1,2,\cdots,N,\, m=1,2,\cdots,M)
\tag{73}
$$

ここに，

$$
\begin{aligned}
&P_{0m}^{(1)} = Q_{0m}^{(1)} = P_{0m}^{(3)} = Q_{0m}^{(3)} = 0,\quad (m=1,2,\cdots,M) \\
&P_{11}^{(1)} = Q_{11}^{(1)} = P_{11}^{(2)} = Q_{11}^{(2)} = 0 \\
&P_{1m}^{(2)} = Q_{1m}^{(2)} = 0,\quad (m=2,3,\cdots,M) \\
&P_{2m}^{(1)} = Q_{2m}^{(1)} = P_{2m}^{(3)} = Q_{2m}^{(3)} = 0,\quad (m=1,2,\cdots,M) \\
&P_{3m}^{(2)} = Q_{3m}^{(2)} = 0,\quad (m=1,2,\cdots,M) \\
&P_{nm}^{(p)} = Q_{nm}^{(p)} = 0, \\
&\quad (n=4,5,\cdots,N,\quad m=1,2,\cdots,M,\quad p=1,2,3)
\end{aligned}
\tag{74}
$$

上記以外の n,m,p に対する $P_{nm}^{(p)}, Q_{nm}^{(p)}$ の値は式(70),(71)の $\tilde{a}_{11}, \tilde{b}_{11}$ で示したように，$a_{11}, \tilde{a}_{nm}, \tilde{b}_{nm}, \beta_{nms}^{(i)}$ 等から成る式で表されるが，その具体的な表示式については省略することにする．

式(73)の強制振動解は

$$
\overline{T}_{nm} = \sum_{p=1}^{3}\left(\overline{a}_{nm}^{(p)}\sin pt + \overline{b}_{nm}^{(p)}\cos pt\right),\quad (n=1,2,\cdots,N,\quad m=1,2,\cdots,M)
\tag{75}
$$

のように書ける．上式で，$\overline{a}_{nm}^{(p)}, \overline{b}_{nm}^{(p)}$ は $P_{nm}^{(p)}, Q_{nm}^{(p)}$ が与えられれば容易に求めることができる．

以上のことから，解 $\overline{A}$ は式(75)を用いて(49)より

$$
\overline{A} = \sum_{n=1}^{3}\sum_{m=1}^{M} J_n(\Omega_{nm}r)\overline{T}_{nm}(t)\cos n\theta
\tag{76}
$$

と表すことができる．

（５）波高及び壁面動水圧

a) 波高について

波高は式(46)で与えられる．いま，これを水深で基準化して表せば，

$$
\tilde{\eta}/\tilde{H} = (\varepsilon^{1/2}/\kappa)(\eta_0 + \varepsilon^{1/2}\eta_1 + \varepsilon\eta_2)
\tag{77}
$$

ここに，η_0 は式(34)，η_1 は式(38)，η_2 は式(42)で与えられる．振動方向の壁面上における波高は上式において $\theta = 0, r = \mu_{11}$ とすれば得られる．

b) 壁面動水圧

動水圧を $\tilde{\sigma}$ とすれば，全水圧 $\tilde{p}$ は

$$
\tilde{p} = -\rho g\tilde{z} + \tilde{\sigma}
\tag{78}
$$

と表されるので，これを式(2)に代入し，$\tilde{\sigma}$ を求めた後，その右辺の無次元化を行えば，

$$
\begin{aligned}
\tilde{\sigma} = -\rho R^2\omega^2\varepsilon^{1/2}\{&\varphi_t + 0.5\varepsilon^{1/2}(\varphi_r^2 + \varphi_\theta^2/r^2) \\
&+ 0.5\varphi_z^2 - \varepsilon^{1/2} r\cos\theta\cos t\}
\end{aligned}
\tag{79}
$$

φ は式(28)で φ_2 まで採用する．同式中 φ_0 は式(33)，φ_1 は式(36)，φ_2 は式(40)で与えられる．

壁面動水圧を求めるには式(79)で $r = \mu_{11}$ と置けばよい．振動方向の壁面動水圧は，さらに，$\theta = 0$ とすればよい．

次に，振動方向の全壁面動水圧 $\tilde{P}$ は，式(79)を用いて次式から算出することができる．

$$
\begin{aligned}
\tilde{P} &= \int_0^{2\pi}\int_{-\tilde{H}}^{\tilde{\eta}} \tilde{\sigma}\rangle_{\tilde{r}=\tilde{R}}\,\tilde{R}\cos\theta\, d\tilde{z}\, d\theta \\
&= \mu_{11}R^2\varepsilon^{1/4}\int_0^{2\pi}\int_{-\kappa}^{\sqrt{\varepsilon}\eta} \tilde{\sigma}\rangle_{r=\mu_{11}}\cos\theta\, dz\, d\theta
\end{aligned}
\tag{80}
$$

3．数値計算結果及び実験結果との比較

2 章で述べた理論に従って数値計算を行い，水深の浅い円筒容器内容液の 1 次のスロッシング共振点における波高及び壁面動水圧を算出し，これを（１）若原等の実験結果[1)] 及び（２）大山の実験結果[2)] と比較した．

数値計算において，速度ポテンシャル $\tilde{\varphi}$ 及び波高 $\tilde{\eta}$ は式(45),(46)に示すように，ε のオーダーの摂動項である φ_2, η_2 までを採用し，関数 $A, \tilde{A}, \overline{A}$ についてはそれぞれ式(60),(69),(76)を用いた．このとき，ｍとしては１０項まで採れば十分であることを確かめたので，M の値は 10 とした．

理論解で用いられる無次元時間 t に対する最大次数の調和関数は，式(73)或は(75)から $\sin 3t, \cos 3t$ である．このことから，本論で採用した摂動項 ε までの解を用いたのでは，非線形性が大きくなり，現象に高次の振動数成分が含まれるようになると，理論解はそれを忠実に再現することは難くなるが，非線形性がそれほど大きくない場合については，それは内容液の動的挙動をよく近似することができると考えられる．

波高及び壁面動水圧の応答計算に必要な計算時間については，１つの加振振動数 ω に対してわずかに 0.05 秒弱であり，これは有限要素法或は境界要素法を用いた計算法に比べて，全く無視できる計算時間である．

（１）　若原等の実験結果との比較

若原等の行った模型振動実験において用いた円筒容器は内径 48 cm, 高さ 30 cm, 厚さ 1 cm のアクリル製で，内容液としては水を用い，水深は 4 cm に設定している．従って，このときのスロッシングの固有振動数は式(21)より $f_{11} = \omega_{11}/2\pi$ = 0.753 Hz となる．

実験では，円筒容器を振動台に載せ，一方向に調和波

加振を行い，そのときの振動方向における壁面での液面変位と全流体力（=全壁面動水圧）を計測している．加振加速度振幅は $\tilde{a}\omega^2 = 1.6,\ 4.8,\ 8.0$ cm/s^{2}の３通りである．なお，実験は，静止状態から入力加速度一定で加振を始め,現象が定常状態になってから計測を行っている．

数値計算結果と実験結果とを比較して**図－２～５**に示す．●印が実験値であり，実線が理論値である．**図－２**は入力加速度が 1.6 cm/s^{2}のときの全壁面動水圧の応答曲線を，**図－３**はその位相差の応答特性を，**図－４**は $\omega/\omega_{11} = 1.002$ における全壁面動水圧の時刻暦応答を，**図－５**は $\omega/\omega_{11} = 1.0$ における壁面波高の時刻暦応答をそれぞれ示したものである．

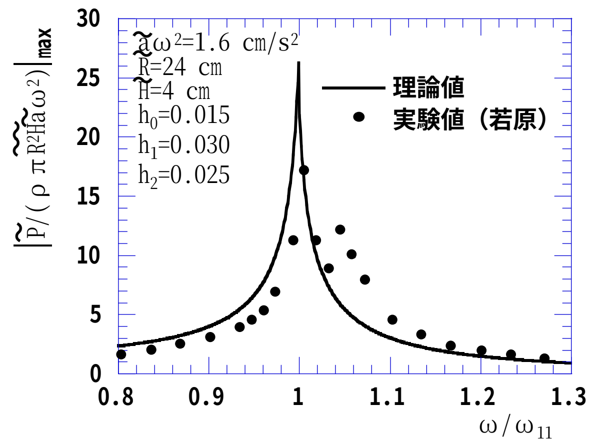
実験値はすべて参考文献１）に公表されている図面からその値を読み取ったものである．

数値計算においては水の密度 ρ は 1000 kg/m^{3}とした．減衰定数としては $h_0 = 0.015, h_1 = 0.03, h_2 = 0.025$ を採用した．

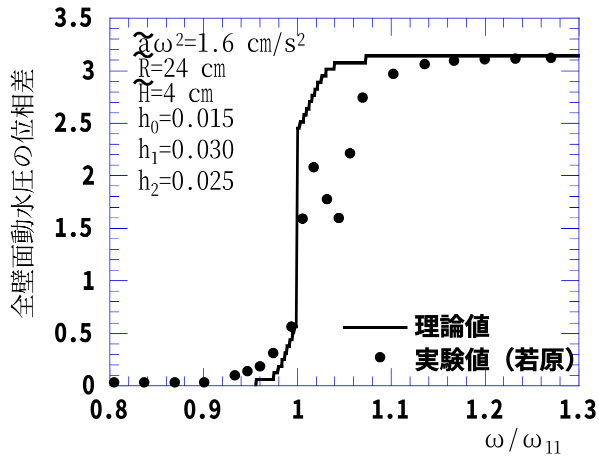
ここで，減衰定数について簡単に述べる．若原等[1)]が行ったブジネスク方程式を用いた解析と大山[2)]が行った境界要素法を用いた解析においては，いずれもその基礎方程式中に，ξ を減衰定数として速度ポテンシャルに比例する減衰項 $\xi\tilde{\varphi}$ を考慮している．前述のように，本論において，式(2)に示す圧力方程式中に減衰項 $\xi\tilde{\varphi}$ を考慮した場合には，時間 $T_{nm}(t)$ に関する２階の微分方程式中に $(\xi/\omega)\dot{T}_{nm}$ の形の項が加わることになる．したがって，$\xi = 2h\omega_{11}$ と置けば，式(59)に示すように，ｈは無次元量となり，これを減衰定数に相当するものと見做してもよいことになる．ξ については，若原等及び大山はいずれも基本的にはMilesによる式を使ってその値を求めていると言ってよい．本論においてもこれに従うことにすると，その値は $\xi = 0.087s^{-1}$ となる．したがって，ｈの値として 0.01 が得られる．数値計算で採用した $h_0 = 0.015$ については，上記のことから，0.01 を目安にして実験によく一致する値として選んだ数値である．h_1 について $\tilde{A}$ の項における固有円振動数 $\omega_{01} (\cong 2\omega_{11})$ の振動, すなわち, 式(61)でm=1 の場合が卓越することから，h_1 を h_0 の２倍とした．h_2 については，$\overline{A}$ の項における固有円振動数 $\omega_{12} (\cong 3\omega_{11})$ の振動を中心にして種々試算を行った結果，$\overline{A}$ の項は主として非線形性の大きさに深く関係する項であると考えてもよさそうである．すなわち，非線形性が小さいときには h_2 を大きく，非線形性が大きくなるに従って h_2 を小さくとるようにすればよい．$\tilde{a}\omega^2$ =1.6 cm/s^{2}の場合は非線形性が比較的小さいので h_2 として 0.025 を採用した．

このように減衰定数ｈがすべて等しく一定値をとらない理由としては，次のようなことが考えられる．

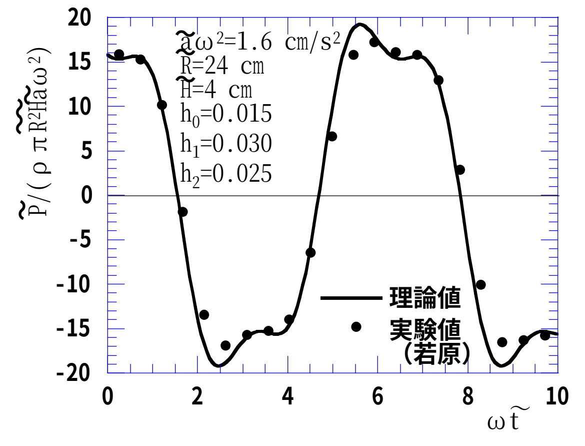
（１）　厳密に減衰項 $\xi\tilde{\varphi}$ を取り扱った場合，$T_{nm}(t)$ に関する振動方程式の右辺には減衰係数として ξ/ω を有する項がいくつか存在し，この項が T_{nm} に対してプラスに効いたりマイナスに効いたりするため，この効果をすべてのｈを一定値にとることによっては表現できないこ



図－２　全壁面動水圧の応答曲線



図－３　全壁面動水圧に対する位相差の応答特性



図－４　全壁面動水圧の時刻暦応答（ω/ω_{11}=1.002）

と．

（2）　採用した摂動項が少ないため，省略した他の摂動項の影響をすべてのhを一定値とすることによっては表現できないこと．

なお，本論で減衰項として $\xi\tilde{\varphi}$ を用いなかったのは，この項を導入した場合，理論式の項数が多くなり，従ってその取扱いが煩雑すぎること及び数値計算の結果，採用する摂動項が少ない場合，実験結果との差が本論の場合に比べて大きかったことによる．

図－2の全壁面動水圧の応答曲線について見ると，理論値と実験値とは，後者が ω/ω_{11} =1.04 付近に第 2 のピークを持っていることを除けば，両者は比較体よく一致しているといえよう．この第 2 のピークについて大山[2)]は，主共振振動数 (ω_{11}) 付近では，波の非線形性により引き起こされた高調波共振現象が高次振動数成分 $(\omega_{01} \cong 2\omega_{11})$ を励起したために生じたのではないかと云う考えを述べている．実際，本論の摂動法を用いた解析においても，式(61)から明らかなように，主共振振動数付近 $(\omega \cong \omega_{11})$ では加振振動数の 2 倍の振動数を持つ強制項 $\sin 2t$ が生じており，固有円振動数 ω_{01} の振 $\tilde{T}_{01}(t)$ が励起されることが示されている．

図－3の位相差についても，**図－2**の第 2 のピーク付近を除いては理論値と実験値とは比較的よく一致しているといえよう．なお，位相差としては，各 ω/ω_{11} において全壁面動水圧のピーク値と入力加速度のピーク値との間の時間差を用いて算出した．

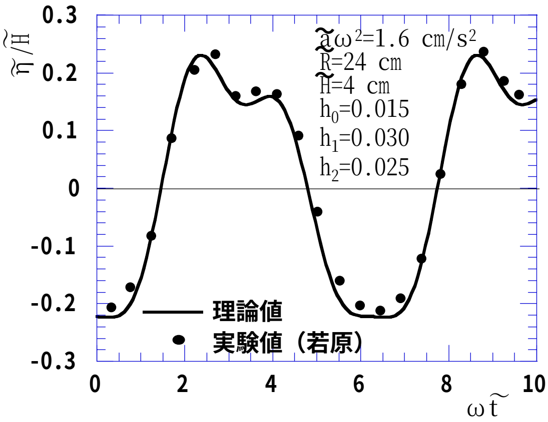
図－4及び**図－5**に示す全壁面動水圧と壁面波高の時刻暦応答については，理論値と実験値とはよく一致しているといえる．ただ，応答曲線のピーク付近において両者の間にわずかな差が生じているが，これはやはり採用した摂動項の項数が少ないのがその原因であろうと考えられる．

次に，入力加速度が 4.8 cm/s²の場合の結果については，ここでは示していないが，この場合は，現象の非線形性が大きくなるため，前述の 1.6 cm/s²のときほど理論値と実験値はよく一致しているとは云い難いが，それでも応答曲線の主要な傾向については，理論値は実験値をよくフォローしていると云っても差し支えなかろう．

（2）　大山の実験結果との比較

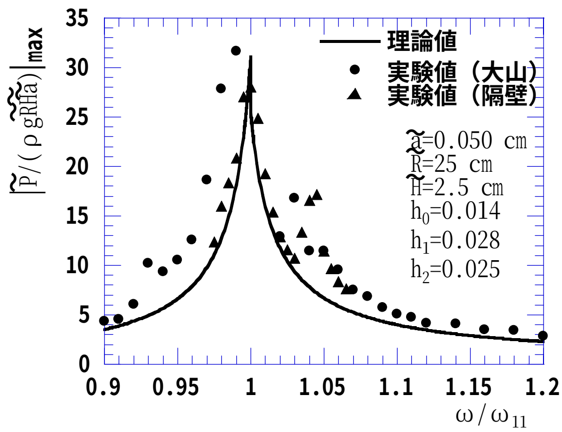
大山の行った模型振動実験において用いた円筒容器は内径 50 cm，高さ 25 cm，厚さ 0.5 cmのアクリル製で，内容液としては水を用い，水深は 2.5 cmに設定している．したがって，このときのスロッシングの固有振動数は f_{11}= 0.577 Hzとなる．

実験では，円筒容器を振動台上に載せ，一方向に調和波加振を行い，そのときの振動方向における壁面での液



図－5　壁面波高の時刻暦応答（ω/ω=1.0）

面変位と全流体力を計測している．加振変位振幅は 0.5,0.75,1.0 mm の 3 通りである．実験は入力変位振幅一定で，静止状態から加振を行い，現象が定常状態になってから計測が行われている．また，大山は内容液にスワーリング（回転運動）が発生しないように，円筒容器の振動方向中央面にアクリル板（隔壁）を設置した場合についても実験を行っている．



図－6　全壁面動水圧の応答曲線 (a =0.5 mm)

数値計算と実験結果とを比較して**図－6～9**に示す．●印が隔壁のない場合，▲印が隔壁のある場合の実験値であり，実線が理論値である．**図－6**と**図－7**はそれぞれ入力振幅 $\tilde{a}$ が 0.5 と 0.75 mm の場合の全壁面動水圧の応答曲線を，**図－8**は $\tilde{a}$ = 0.75 mm のときの ω/ω_{11} = 0.999 における全壁面動水圧の時刻暦応答を，**図－9**は $\tilde{a}$ = 0.75 mmのときの ω/ω_{11} =1.0 における壁面波高の時刻暦応答を示したものである．実験値はすべて参考文献２）に公表されている図面からその値を読み取った．数値計算においては水の密度 ρ は 1000 kg/m³とした．減衰定数としてはいずれの場合についても h_0 =0.014, h_1 =0.028 であるが，h_2 については $\tilde{a}$ =0.5 mmの場合は非線形性が小さいことを考慮して h_2 =0.025 を，$\tilde{a}$ =0.75

mm の場合はその非線形性が大きくなるので，h_2=0.015 を採用した．

図－6及び**7**の全壁面動水圧応答曲線について見ると，理論値と実験値とはそれぞれ ω/ω_{11} =1.04 及び 1.05 付近に第 2 のピークを持っていることを除けば両者は比較的良く一致しているといえよう．特に，隔壁のある場合すなわちスワーリングを生じさせないようにした場合の方が両者はよりよく一致していることが分かる．

それぞれ**図－8**及び**9**に示す全壁面動水圧及び壁面波高の時刻暦応答について見れば，理論曲線は実験値におけるその基本的な時刻暦の変化の形を比較的よく表現していると云えるが，詳細に見ると，実験値の極大・極小付近における高次振動に基づく時間変化については，理論値はそれを忠実に表現しているとは云い難い．その理由としては，本論では解析における摂動項は 3 項までしか採用しなかったため，理論値における時間変化を表す調和振動の引数の最大次数が 3，すなわち，$\sin 3t$ 或は $\cos 3t$ であることから，高次振動を含む現象を変化の曲率が大きな部分についてまで忠実に表現することが困難であったものと考えられる．

スロッシング現象の非線形性の大きさの目安として，水深に対する波高の比 $\tilde{\eta}/\tilde{H}$ を用いるとすれば，若原等の実験においては $\tilde{a}\omega^2$ =1.6cm/s^2 の場合，$\tilde{\eta}/\tilde{H}=0.24$，4.8 cm/s²のとき 0.59，大山の実験においては $\tilde{a}=0.75$ mmの場合 $\tilde{\eta}/\tilde{H}=0.31$ であることから判断して，本論における摂動解は波高が $\tilde{\eta}/\tilde{H}\leq 0.3$ であるような非線形スロッシング現象に適用して有用であるといってもよいであろう．

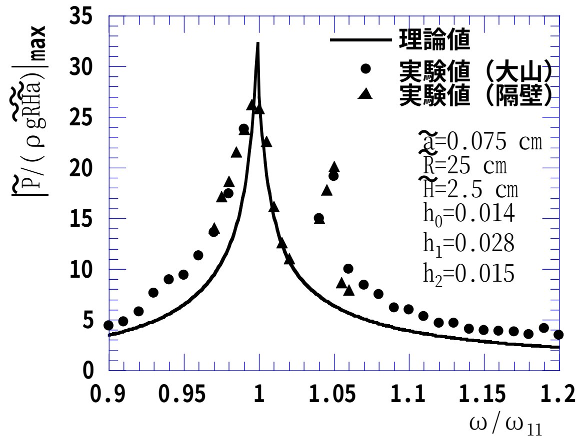
4．おわりに

本論では摂動法を用いて調和水平加振を受ける水深の浅い円筒容器内容液の 1 次のスロッシング現象を明らかにするための解析理論を導き，数値計算を行って，得られた結果を既に公表された実験結果と比較し，理論式の適用性について検討を加えた．得られた結果は，次の通りである．

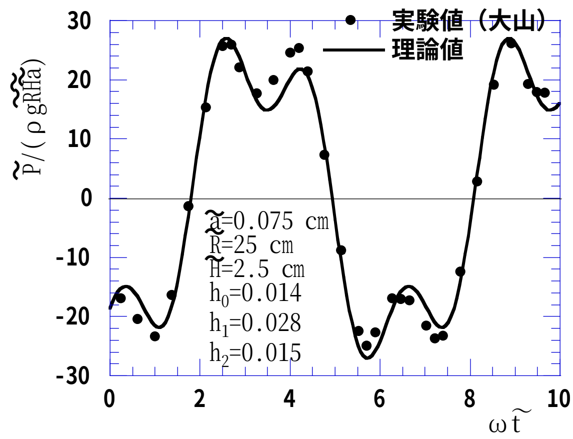
（1） 水深の浅い円筒容器内容液の 1 次のスロッシング現象の非線形性の大きさを水深に対する壁面波高の比で表した場合，本論で示した 3 項までの摂動項を考慮した理論においては，第 2 のピークを無視したとき，その比の値が 0.3 以下であれば，その内容液の動水圧及び波高応答を求めるのに用いて有用である．

採用する摂動項の項数を増せば，より大きな非線形現象を取り扱うことができるようになることが期待できると考えられる．

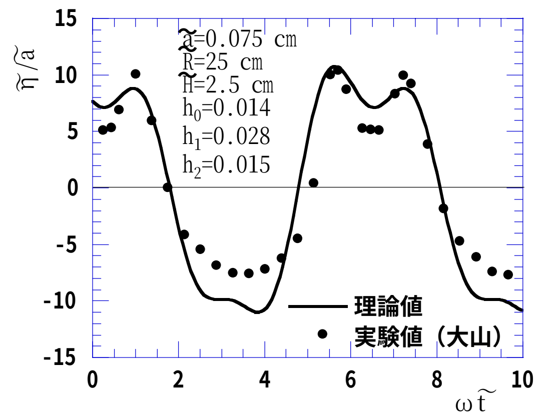
（2） 全壁面動水圧の振動数特性については，理論値と実験値とはよく一致しているといえる．ただ，実験値においては 1 次のスロッシングの共振点より僅かに高い振動数付近に第 2 のピークが生じているが，



図－7 全壁面動水圧の応答曲線（a = 0.75 mm）



図－8 全壁面動水圧の時刻暦応答（ω/ω 1 1 =0.999)



図－9 壁面波高の時刻暦応答（ω/ω １ １ =1.0)

理論値ではこのようなピークは見られない．その原因は理論値において採用した摂動項の項数が少なく，したがって，高次振動数成分が表現できないためであろうと考えられる．

（３）　全壁面動水圧及び壁面波高の時刻暦応答については，いずれの場合も非線形性が小さいとき（**図－４，５**参照）には，理論値と実験値とはよく一致しているといえる．非線形性が大きくなる（**図－８，９**参照）と，いずれの場合についても理論値は，時刻暦応答の極大・極小点付近において生じている曲率の大きな変化を忠実に表現しているとはいえないが，時刻暦応答の基本的な変化の傾向については，理論値は実験値をよくフォローしているといってもよい．

参考文献

1) 若原敏裕，藤野陽三，野村卓史：Boussinesq 方程式を用いた円筒形同調液体ダンパーの非線形スロッシング解析，土木学会論文集，No.549／Ⅰ-37, pp.125-140, 1996.10.

2) 大山巧：円筒容器内の非線形スロッシング現象の解析，土木学会論文集，No.417／Ⅱ-13, pp.255-264, 1990.5.

3) Welt, F. and Modi, V. J. : Vibration damping through liquid sloshing, part 1, a nonlinear analysis, Journal of vibration and acoustics, Vol. 114, pp.10-23, 1922.1.

4) 大森博司，松井徹哉，日比野浩：液体貯槽における有限振幅液面動揺に関する研究，（その１）基礎方程式の誘導とその円筒形貯槽への適用，日本建築学会構造系論文報告集，第 375 号, pp.65-72, 1987.5.

5) 大森博司，松井徹哉，日比野浩，加藤啓一：液体貯槽における有限振幅液面動揺に関する研究，（その２）円筒形模型貯槽の定常加振実験，日本建築学会構造系論文報告集，第 380 号, pp.67-75, 1987.10.

6) Ockendon. H., Ockendon. J. R. and Johnson. A. D. : Resonant sloshing in shallow water, J. Fluid Mech. Vol. 167, pp.465-479, 1986.

（2006 **年** 9 **月** 11 **日受付）**