

BF-spline Ritz 法を用いた固定辺と自由辺を有する長方形厚板の曲げ解析

Bending analysis of rectangular thick plates with clamped and free edges by BF-spline Ritz method

水澤 富作*

Tomisaku Mizusawa

* 工博 大同工業大学教授 都市環境デザイン学科 (〒457-0818 名古屋市南区白水町 40)

This paper presents a numerical method, the BF-spline Ritz method, for bending analysis of rectangular Mindlin plates with clamped and free edges. The proposed method utilizes admissible functions comprising the B-spline functions multiplied by a boundary function to define the Ritz trial function for the transverse displacement and rotations of the Mindlin plates. The geometric boundary conditions of the plate at edges are automatically satisfied using boundary functions. To demonstrate the validity and accuracy of the BF-spline Ritz method, several examples are solved, and results are compared with those obtained by analytical and other numerical methods. Good convergence and accuracy are obtained by the present method. The effects of Poisson's ratio, thickness-width ratio and aspect on the distributions of deflections, bending moments and shear forces of rectangular Mindlin plates due to distributed load are shown. The results obtained are to serve as benchmark data for future development of new numerical methods.

Key Words: BF-spline Ritz method, boundary function, bending analysis, Mindlin plate

キーワード: BF-spline Ritz 法, 境界関数, 曲げ解析, Mindlin 板

1. まえがき

土圧や水圧を受ける擁壁やケイソンの側壁などは、支持条件により三辺固定他の一辺が自由である平板や二隣辺固定で他の二辺が自由な平板構造になる。このような境界条件を有する平板の曲げ問題では、厳密な解を求めることが困難になるので、差分法や有限要素法などの数値解析法が適用される。しかしながら、固定辺と自由辺の交点近傍に大きな応力勾配を伴う応力集中が生じてくるので、解析上に問題が見られる¹⁾。

Timoshenko の著書²⁾に引用されている三辺固定他の一辺が自由である平板の表に示されているたわみの結果は、他の数値解析法で求めた値と比較して差異が見られるが³⁾、土木学会構造力学公式集⁴⁾や平板に関する data handbook⁵⁾には、Timoshenko の著書の表がいまだに引用されている。一方、先に述べた境界条件を持つ平板の曲げ問題は、東と小森¹⁾により、古くから薄板理論に基づく Fourier 級数展開法を適用して解析的に解かれているが、ポアソン比が 0 に仮定した場合しか取り扱っていない。最近、金田ら⁶⁾も、東と小森の Fourier 級数展開法を適用して土圧を受ける二隣固定二辺自由な薄板の曲げ解析を行っているが、ポアソン比を 0 に仮定した場合を検討している。

擁壁やケイソンの側壁は比較的板厚の大きな平板構造になるので、たわみや断面力に与える横せん断変形の影響を検討する必要があるが、片持板を除く固定辺と自由辺を有する厚板の曲げ解析に関する報告事例が見当たらないように思われる。

平面保持の仮定を修正した Mindlin 板理論⁷⁾は、それぞれ独立したたわみと 2 つの回転角で表される 3 元連立偏微分方程式で与えられる。したがって、任意の境界条件を

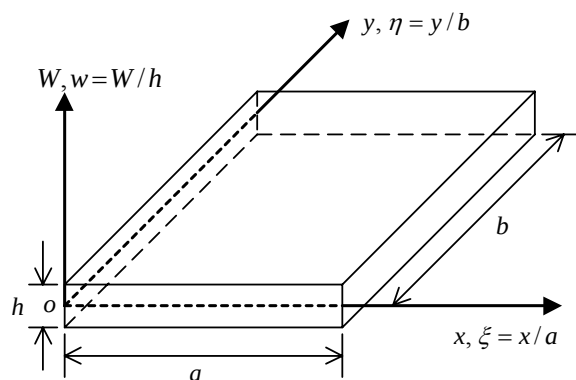


図-1 長方形 Mindlin 板と座標系

有する Mindlin 板の閉じた解を求めることが困難になるので、Ritz 法や有限要素法などの数値解析法を用いて解析されている。

種々の試験関数を適用した Ritz 法⁸⁾は、定式化の簡便さや比較的早い解の収束性を有しているため、平板の曲げ解析法として、古くから多用されて来ている。エネルギー変分原理に基づく Ritz 法で仮定される試験関数には、1) 少なくとも幾何学的境界条件を満たす許容関数、2) 剛体モードを表す係数項を含む関数と 3) 汎関数に現れる導関数の最高次数以上の連続性を有する滑らかな関数であることが必要である。ここで、1)の幾何学的境界条件に対する許容条件は、級数の各項毎に満たす方法と、級数和で表される全体関数に対して満足させる方法に分けられる。平板解析に用いる試験関数には、はりの固有関数⁹⁾、ベキ級数多項式¹⁰⁾、直交多項式⁸⁾や Chebyshev 多項式¹¹⁾などの全体関数(global functions)が挙げられる。幾何学的境界条件を自動的に満たすために、境界関数(boundary function)¹²⁾を導入したベキ級数多項式、直交多項式や Chebyshev 多項式が Ritz 法の許容関数として用いられている。

このような許容関数を Ritz 法の試験関数に適用すれば、解の収束が早くなるが、級数項を増大すると多項式の次数が急増大してくるので、係数行列を求めるための数値積分に時間を要する。また、任意の全体関数に対して、幾何学的境界条件に対応する仮想バネを導入する方法¹³⁾や Lagrange 乗数を適用した修正 Ritz 法¹⁴⁾も用いられているが、仮想バネ値の決定方法や Lagrange 乗数を適用した修正 Ritz 法で定式化される係数行列の非正值化が数値計算上の課題になっている。

一方、局所基底で表される B-spline 関数などの区分的多項式が、Ritz 法の試験関数に用いられている。 $k-1$ 次の B-spline 関数は、 $k-2$ 階の導関数までの高次の連続性を有する任意の区分的多項式であるので、与えられた幾何学的境界条件を満たすために種々の境界条件の導入法が提案されている。

最近、名木野ら¹⁵⁾は、 $k-1$ 次の任意の B-spline 関数が幾何学的境界条件を自動的に満足するように、境界関数と B-spline 関数を組み合わせた許容関数を定義し、これを Ritz 法の変位関数に仮定した BF-spline Ritz 法(Boundary Function-spline based Ritz method)を定式化し、長方形 Mindlin 板の振動解析へ適用している。

本論文では、Mindlin 板理論に基づく BF-spline Ritz 法を用いて、分布荷重を受ける三辺固定他の一辺が自由である平板と二隣辺固定で他の二辺が自由な平板の曲げ解析を行い、解の収束性や解析精度について検討を行い、本手法の有用性および解の妥当性について明らかにしている。また、たわみや断面力に与える幅厚比、辺長比やポアソン比などの影響についても明らかにしている。

2. BF-spline Ritz 法

ここでは、境界関数を導入した B-spline 関数を許容関数に仮定した Ritz 法を定式化する。図-1に示すように、定式化には、次式の無次元座標系(ξ, η)と無次元たわみ $w(\xi, \eta)$ を用いる。

$$\xi = x/a, \quad \eta = y/b, \quad w = W/h \quad (1)$$

ここで、 a, b, h は、それぞれ長方形板の長さ、幅と厚さであり、 $W(\xi, \eta)$ は面外たわみである。

2.1 B-spline 関数

局所的な基底関数で表される B-spline 関数は、切断ベキ関数の k 階差分商で定義され、直交性を有する区分的多項式である。また $k-2$ 階までの導関数の連続性が保証された滑らかな関数であるこの関数の代数的特性については、Boor の論文¹⁶⁾で詳述されているので、ここでは基本式について簡単に述べる。

今、すべての i について、 $x_i \leq x_{i+1}$ なる関係を満たす実変数 x_i に対して、次の関数を定義する。

$$g_k(s; x) = (s-x)_+^{k-1} = \begin{cases} (s-x)^{k-1} & s \geq x \\ 0 & s < x \end{cases} \quad (2)$$

この関数の k 次差分商として、B-spline 関数 $M_{i,k}(x)$ は、次式のように定義される。

$$\begin{aligned} M_{i,k}(x) &= g_k(x_i, \dots, x_{i+k}; x) \\ &= \{g_k(x_{i+1}, \dots, x_{i+k}; x) \\ &\quad - \{g_k(x_i, \dots, x_{i+k-1}; x)\} / (x_{i+k} - x_i) \end{aligned} \quad (3)$$

また、正規化された B-spline 関数 $N_{i,k}(x)$ は次式で表される。

$$N_{i,k}(x) = (x_{i+k} - x_i) M_{i,k}(x) \quad (4)$$

したがって、この関数を組み合わせると、次式のような任意の関数を作り出すことができる。

$$f(x) = \sum_i C_i N_{i,k}(x) \quad (5)$$

ここで、 C_i は未定係数である。

式(5)に示す関数の x に関する j 回微分は、式(7)のような漸化式で計算される。

$$\frac{d^j f(x)}{dx^j} = \sum_i C_i N_{i,k}^{(j)}(x) \quad (6)$$

$$\begin{aligned} N_{i,k}^{(j)}(x) &= (k-1) \{N_{i,k-1}^{(j-1)}(x) / (x_{i+k-1} - x_i) \\ &\quad - N_{i+1,k-1}^{(j-1)}(x) / (x_{i+k} - x_{i+1})\} \end{aligned} \quad (7)$$

ここで、 $N_{i,k}^{(0)}(x) = N_{i,k}(x)$ である。

2.2 境界関数および 許容関数

$k-1$ 次の区分的多項式で定義される B-spline 関数は、与えられた境界条件を満足しない任意の関数である。ここでは、領域 $[0, 1]$ で幾何学的境界条件を自動的に満足させるための境界関数と B-spline 関数を組み合わせた許容関数を定義する。

表-1 に示す $F_x(\xi), F_y(\xi), F_w(\xi)$ は、それぞれ η 軸に平行な境界辺 ($\xi = 0, 1$) で与えられる幾何学的境界条件を満たす境界関数であり、また $G_x(\eta), G_y(\eta), G_w(\eta)$ は、それぞれ ξ 軸に平行な境界辺 ($\eta = 0, 1$) で与えられる境界関数である。ただし、表中の S, C, F は、それぞれ単純支持、固定および自由の境界条件を示す。

Mindlin 板理論で仮定される独立した3つの変位関数(たわみ w と2つの回転角 ϕ_x, ϕ_y) は、表-1 に示す境界関数と B-spline 関数を掛け合わせて、それぞれ次式で仮定する。

$$\begin{aligned}\phi_x(\xi, \eta) &= F_x(\xi)G_x(\eta)\sum_{m=1}^{i_x}\sum_{n=1}^{i_y}A_{mn}N_{m,k}(\xi)N_{n,k}(\eta), \\ \phi_y(\xi, \eta) &= F_y(\xi)G_y(\eta)\sum_{m=1}^{i_x}\sum_{n=1}^{i_y}B_{mn}N_{m,k}(\xi)N_{n,k}(\eta), \\ w(\xi, \eta) &= F_w(\xi)G_w(\eta)\sum_{m=1}^{i_x}\sum_{n=1}^{i_y}C_{mn}N_{m,k}(\xi)N_{n,k}(\eta)\end{aligned}\quad (8)$$

ただし、 $N_{m,k}(\xi), N_{n,k}(\eta)$ は、 $k-1$ 次の正規化された B-spline であり、 A_{mn}, B_{mn}, C_{mn} はそれぞれ未定係数である。 $i_x = k-2 + m_x, i_y = k-2 + m_y, k-1$ は B-spline 関数の次数、 m_x と m_y はそれぞれ ξ 方向と η 方向に設けた区分点の数である。この許容関数は、B-spline 関数の特性である $k-2$ 階までの導関数の連続性が保証されることを確認している。

2.3 BF-spline Ritz 法による定式化

等質かつ等方性である長方形 Mindlin 板の断面力は、それぞれ次式で与えられる⁷⁾。

$$\begin{aligned}M_x &= -D\left(\frac{\partial\phi_x}{\partial x} + \nu\frac{\partial\phi_y}{\partial y}\right) \\ M_y &= -D\left(\frac{\partial\phi_y}{\partial y} + \nu\frac{\partial\phi_x}{\partial x}\right) \\ M_{xy} &= -\frac{1-\nu}{2}D\left(\frac{\partial\phi_x}{\partial y} + \frac{\partial\phi_y}{\partial x}\right) \\ Q_x &= \kappa Gh(-\phi_x + \frac{\partial w}{\partial x}) \\ Q_y &= \kappa Gh(-\phi_y + \frac{\partial w}{\partial y})\end{aligned}\quad (9)$$

ただし、 M_x, M_y はそれぞれ y 軸および x 軸回りの曲げモーメントであり、また M_{xy} はねじりモーメントである。 Q_x

表-1 種々の幾何学的境界条件に対応した境界関数

B.C.	$\xi = 0, 1$			$\eta = 0, 1$		
	$F_x(\xi)$	$F_y(\xi)$	$F_w(\xi)$	$G_x(\eta)$	$G_y(\eta)$	$G_w(\eta)$
S-S	1	$4(\xi - \xi^2)$	$4(\xi - \xi^2)$	$4(\eta - \eta^2)$	1	$4(\eta - \eta^2)$
S-F	1	ξ	ξ	η	1	η
F-S	1	$1 - \xi$	$1 - \xi$	$1 - \eta$	1	$1 - \eta$
S-C	$4(\xi - \xi^2)$	ξ	$4(\xi - \xi^2)$	η	$4(\eta - \eta^2)$	$4(\eta - \eta^2)$
C-S	ξ	$4(\xi - \xi^2)$	$4(\xi - \xi^2)$	$4(\eta - \eta^2)$	η	$4(\eta - \eta^2)$
C-C	$4(\xi - \xi^2)$	$4(\xi - \xi^2)$	$4(\xi - \xi^2)$	$4(\eta - \eta^2)$	$4(\eta - \eta^2)$	$4(\eta - \eta^2)$
C-F	ξ	ξ	ξ	η	η	η
F-C	$1 - \xi$	$1 - \xi$	$1 - \xi$	$1 - \eta$	$1 - \eta$	$1 - \eta$
F-F	1	1	1	1	1	1

と Q_y は、それぞれせん断力である。 $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$ は板の曲げ剛性であり、 G, h, ν は、それぞれせん断弾性係数、板厚およびポアソン比である。また、 κ はせん断修正係数である。

分布荷重を受ける等方性である長方形 Mindlin 板のひずみエネルギー U は、無次元座標系で表せば次式で与えられる。

$$\begin{aligned}U &= \frac{D}{2}\left(\frac{a}{b}\right)\int_0^1\int_0^1\left\{\left(\frac{b}{a}\right)^2\left(\frac{\partial\phi_x}{\partial\xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial\phi_y}{\partial\eta}\right)^2\right. \\ &\quad + \nu\left(\frac{b}{a}\right)\left[\left(\frac{\partial\phi_x}{\partial\xi}\right)\left(\frac{\partial\phi_y}{\partial\eta}\right) + \left(\frac{\partial\phi_y}{\partial\eta}\right)\left(\frac{\partial\phi_x}{\partial\xi}\right)\right] \\ &\quad + \frac{1-\nu}{2}\left[\left(\frac{\partial\phi_x}{\partial\eta}\right)^2 + \left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{\partial\phi_y}{\partial\xi}\right)^2\right. \\ &\quad + 6\kappa(1-\nu)\left(\frac{b}{h}\right)^2\left[\left(\frac{b}{a}\right)\left(\frac{\partial W}{\partial\xi}\right) + \phi_x\right]^2 \\ &\quad \left. + \left[\left(\frac{\partial W}{\partial\eta}\right) + \phi_y\right]^2\right\}d\eta d\xi \\ &= \frac{D}{2}\left(\frac{a}{b}\right)\{\Delta\}_{mn}^T[K]_{mnr s}\{\Delta\}_{rs}\end{aligned}\quad (10)$$

ここで、 $[K]_{mnr s}$ は剛性マトリックスである。

また、 y 方向に直線的に変化する面外分布荷重 $Q(\eta)$ による外力ポテンシャル V は、次式で与えられる。

$$\begin{aligned}V &= abh\int_0^1\int_0^1Q(\eta)W d\eta d\xi \\ &= abhq\{F\}_{rs}^T\{\Delta\}_{rs}\end{aligned}\quad (11)$$

ここで、 $Q(\eta)$ は次式で仮定する。

$$Q(\eta) = q\{\lambda + (\lambda - 1)\eta\}\quad (12)$$

ただし、 λ は q_1/q であり、 q, q_1 はそれぞれ、 $\eta = 0$ と $\eta = 1$ での分布荷重強度を示す。したがって、 λ を 1 に仮定すると等分布荷重になり、 $\lambda = 0$ は静水圧分布になる。

長方形 Mindlin 板の全ポテンシャルエネルギー Π は式 (10) および式 (11) を用いて、次式で与えられる。

$$\Pi = U - V\quad (13)$$

ここで、 U と V はそれぞれ、ひずみエネルギーと外力ポテンシャルである。

したがって、Ritz 法を適用して、 Π を未定係数ベクトルで極値化すれば、次の線形代数方程式が得られる。

$$\partial \Pi / \partial \{\Delta\}_{rs}^T = [K]_{mnrs} \{\Delta\}_{mn} - \{F\}_{rs} = 0 ; \quad m, r = 1, 2, \dots, i_x, \quad n, s = 1, 2, \dots, i_y \quad (14)$$

ここで、

$$\{\Delta\}_{mn} = \left\{ \{\delta_A\}_{mn} \quad \{\delta_B\}_{mn} \quad \{\delta_C\}_{mn} \right\}^T \quad (15-a)$$

$$\begin{aligned} \{\delta_A\}_{mn} &= \left\{ A_{11} \quad A_{12} \quad \dots \quad A_{i_x i_y} \right\}^T, \\ \{\delta_B\}_{mn} &= \left\{ B_{11} \quad B_{12} \quad \dots \quad B_{i_x i_y} \right\}^T, \\ \{\delta_C\}_{mn} &= \left\{ C_{11} \quad C_{12} \quad \dots \quad C_{i_x i_y} \right\}^T \end{aligned} \quad (15-b)$$

式(10)と式(11)に示す剛性マトリックス $[K]_{mnrs}$ および外力ベクトル $\{F\}_{rs}$ は、それぞれ式(16)と式(17)で示すサブマトリックスで表される。

$$[K]_{mnrs} = \begin{bmatrix} [K_{\phi_x \phi_x}] & [K_{\phi_x \phi_y}] & [K_{\phi_x W}] \\ [K_{\phi_y \phi_x}] & [K_{\phi_y \phi_y}] & [K_{\phi_y W}] \\ [K_{W \phi_x}] & [K_{W \phi_y}] & [K_{WW}] \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\{F\}_{rs} = \begin{bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \\ \{F_{ww}\} \end{bmatrix} \quad (17)$$

これらのサブマトリックスは、Legendre-Gauss の数値積分公式により求めている。ここで、 ξ および η 方向の積分点数 n は $k+2$ を採用しており、 k は spline 階数である。

式(16)に示すサブ剛性マトリックス $[K_{ij}]$ の詳細は、文献15)に示してあるので割愛する。一般に、全体関数を仮定した Ritz 法では、得られる係数行列は対称のフルマトリックスになるが、本手法では、 $[K]_{mnrs}$ の大きさは $3(k-2+m_x)(k-2+m_y)$ で表され、常に対称のバンドマトリックスになる。

3. 数値計算例および考察

ここでは、分布荷重を受ける固定辺と自由辺を持つ長方形厚板の曲げ解析への BF-spline Ritz 法の適用について検討するために、本手法の解の収束性と精度比較について示す。また、長方形板の曲げ性状に与える幅厚比 b/h 、辺長比 b/a やポアソン比 ν などの影響についても示す。計算例に用いる長方形板の境界条件は、三辺固定他の一辺が自由である場合(CC-CF)と二隣辺固定で他の二辺が自由な場合(CF-CF)を対象にする。ただし、CC-CF は、それぞれ ξ 軸に垂直な2つ境界辺($\xi=0, 1$)で固定辺(C)であり、 η 軸に垂直な2つの境界辺($\eta=0, 1$)で固定辺(C)と自由辺(F)に相当し、またせん断修正係数 κ は $5/6$ に仮定する。

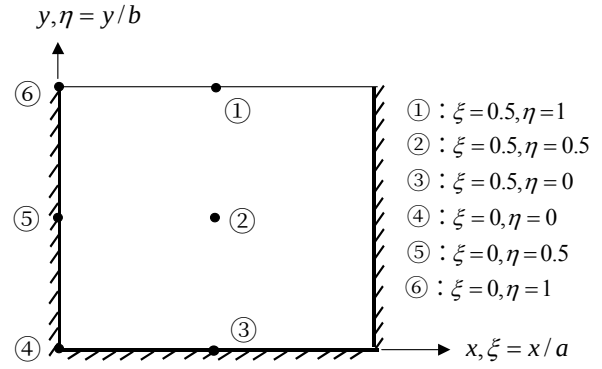


図-2 長方形板 (CC-CF)の着目点の配置

3.1 三辺固定他の一辺が自由な長方形板の曲げ解析

表-2 には、図-2 に示すように、等分布荷重($\lambda=1$)を受ける正方形板の各位置でのたわみ、曲げモーメントおよびせん断力の収束性に与える spline 次数 $k-1$ と区分点の数の影響が示してある。ここで、幅厚比 b/h は 1000 と 10 に仮定している。 $k-1$ は 3 次から 5 次まで変化させ、また区分点の数 m_x と m_y は等間隔に配置し、11 から 41 まで変化させている。ポアソン比 ν は $1/6$ を用いている。

これより、固定辺と自由辺の交点⑥を除くと、区分点の数を増大させると、一定値への一様な収束状態が得られており、また spline 次数を高めれば、少ない区分点の数で4桁の有効桁数の収束値が得られている。しかしながら、固定辺と自由辺の交点⑥の曲げモーメント M_x 、 M_y およびせん断力 Q_x の値は、後で述べるように応力集中を示すので、spline 次数と区分点の数をさらに高めて検討してみたが、収束値が得られていない。幅厚比の大きな薄板では、断面力の応力集中が顕著に見られる。以上の計算結果を踏まえて、以後の計算には、 $k-1=5$ 次、 $m_x=m_y=41$ を用いる。

表-3 には、等分布荷重($\lambda=1$)および静水圧分布荷重($\lambda=0$)を受ける長方形薄板 ($b/h=1000$, $\nu=1/6$) のたわみと曲げモーメントの精度比較が示してある。比較のために、Timoshenko の解²⁾と薄板理論に基づく spline 要素法¹⁷⁾を用いて計算した数値解 (thin plate theory) が列記してある。また、Timoshenko の解に対する本手法の値の相対誤差(%)も示してある。

これより、BF-spline Ritz 法の値は、spline 要素法で求めた数値と比較して、固定辺と自由辺の交点の値を除くと、良く一致した結果が得られている。しかしながら、Timoshenko の解と比較すると、たわみの値に大きな差が見られ、辺長比の値や分布荷重の相違に係わらず、Timoshenko の解は、20%弱の大きな値を示している。これは、コンピュータの無い時代における結果であるので、採用した級数項の数が少ないためと思われる。

固定辺の曲げモーメントの値を除くと、曲げモーメントに関する Timoshenko の解と本手法の値は、比較的良く一致した結果を示している。

表-2 および表-3 で示したように、固定辺と自由辺の交点での断面力の収束性が悪く、また解析結果に大きな差異

表-2 等分布荷重を受ける正方形板(CC-CF)のたわみおよび断面力の収束に与える $k-1$ と $m_x=m_y$ の影響：
 $b/a=1$, $\nu=1/6$

b/h	k-1	m _x =m _y	(1)	(1)	(2)	(2)	(3)	(3)	(3)	(5)	(5)	(5)	(6)	(6)	(6)
			W	M _x	W	M _x	M _x	M _y	Q _y	M _x	M _y	Q _x	M _x	M _y	Q _x
1000	3	11	0.002765	0.04307	0.001899	0.03067	-0.008960	-0.05376	4.640	-0.06573	-0.01096	1.478	-0.08408	-0.01401	-15.18
		21	0.002766	0.04294	0.001895	0.03041	-0.009400	-0.05640	0.8998	-0.06604	-0.01101	0.5362	-0.07503	-0.0125	-27.97
		31	0.002767	0.04293	0.001895	0.03041	-0.009418	-0.05651	0.5501	-0.06606	-0.01101	0.4775	-0.06746	-0.01124	-35.26
		41	0.002767	0.04292	0.001895	0.03041	-0.009419	-0.05651	0.4874	-0.06606	-0.01101	0.4670	-0.06144	-0.01024	-40.06
	4	11	0.002766	0.04294	0.001895	0.03041	-0.009408	-0.05645	0.7852	-0.06596	-0.01099	0.4246	-0.07859	-0.01310	-21.56
		21	0.002767	0.04292	0.001895	0.03041	-0.009419	-0.05652	0.4674	-0.06606	-0.01101	0.4664	-0.06731	-0.01122	-32.17
		31	0.002767	0.04292	0.001895	0.03041	-0.009419	-0.05651	0.4616	-0.06606	-0.01101	0.4627	-0.05938	-0.009897	-38.18
		41	0.002767	0.04292	0.001895	0.03041	-0.009419	-0.05651	0.4611	-0.06606	-0.01101	0.4628	-0.05358	-0.008931	-42.59
	5	11	0.002766	0.04292	0.001895	0.03041	-0.009423	-0.05654	0.4246	-0.06612	-0.01102	0.5344	-0.07377	-0.01229	-24.60
		21	0.002767	0.04292	0.001895	0.03041	-0.009419	-0.05651	0.4607	-0.06606	-0.01101	0.4488	-0.06164	-0.01027	-34.08
		31	0.002767	0.04292	0.001895	0.03041	-0.009419	-0.05651	0.4610	-0.06606	-0.01101	0.4641	-0.05384	-0.008973	-40.23
		41	0.002767	0.04292	0.001895	0.03041	-0.009419	-0.05651	0.4611	-0.06606	-0.01101	0.4630	-0.04843	-0.008071	-45.22
10	3	11	0.003125	0.04151	0.002142	0.03052	-0.009108	-0.05465	0.4268	-0.06533	-0.01089	0.4477	-0.09327	-0.01554	0.3479
		21	0.003126	0.04152	0.002142	0.03053	-0.009102	-0.05461	0.4267	-0.06526	-0.01088	0.4483	-0.1029	-0.01715	0.3315
		31	0.003126	0.04153	0.002142	0.03053	-0.009101	-0.05461	0.4268	-0.06526	-0.01088	0.4483	-0.1097	-0.01828	0.3241
		41	0.003126	0.04153	0.002142	0.03053	-0.009101	-0.05461	0.4268	-0.06526	-0.01088	0.4483	-0.1149	-0.01915	0.3197
	4	11	0.003126	0.04151	0.002142	0.03053	-0.009103	-0.05462	0.4267	-0.06532	-0.01089	0.5344	-0.09762	-0.01627	0.3388
		21	0.003126	0.04153	0.002142	0.03053	-0.009101	-0.05461	0.4268	-0.06526	-0.01088	0.4483	-0.1086	-0.01810	0.3259
		31	0.003126	0.04153	0.002142	0.03053	-0.009101	-0.05461	0.4268	-0.06526	-0.01088	0.4483	-0.1160	-0.01934	0.3196
		41	0.003126	0.04153	0.002142	0.03053	-0.009101	-0.05461	0.4268	-0.06526	-0.01088	0.4483	-0.1217	-0.02028	0.3159
	5	11	0.003126	0.04151	0.002142	0.03052	-0.009101	-0.05461	0.4267	-0.06514	-0.01086	0.4488	-0.1016	-0.01694	0.3339
		21	0.003126	0.04153	0.002142	0.03053	-0.009101	-0.05461	0.4268	-0.06528	-0.01088	0.4483	-0.1135	-0.01891	0.3223
		31	0.003126	0.04153	0.002142	0.03053	-0.009101	-0.05461	0.4268	-0.06526	-0.01088	0.4483	-0.1213	-0.02022	0.3167
		41	0.003126	0.04153	0.002142	0.03053	-0.009101	-0.05461	0.4268	-0.06526	-0.01088	0.4483	-0.1274	-0.02123	0.3134
multipliers			qa^4/D	qa^2	qa^4/D	qa^2	qa^2	qa^2	qa	qa^2	qa^2	qa	qa^2	qa^2	qa

表-3 三辺固定他の一辺が自由である長方形薄板(CC-CF)のたわみと曲げモーメントの精度比較：
 $b/h=1000$, $\nu=1/6$, $k-1=5$, $m_x=m_y=41$

Loading conditions	b/a		①	①	②	②	②	⑥	⑤	③
		methods	W	M_x	W	M_x	M_y	M_x	M_x	M_y
uniform loading	0.6	BF2-spline Ritz method	0.002224	0.03223	0.001088	0.01660	0.007186	-0.05581	-0.04107	-0.05406
		Thin plate theory ¹⁷⁾	0.002225	0.03224	0.001088	0.01660	0.007181	-0.08287	-0.04107	-0.05407
		Timoshenko ¹⁵⁾	0.00271	0.0336	0.00129	0.0168	0.0074	-0.0745	-0.0365	-0.0554
		(%)	-17.9	-4.1	-15.7	-1.2	-2.9	-25.1	12.5	-2.4
	0.8	BF2-spline Ritz method	0.002644	0.04014	0.001547	0.02461	0.01188	-0.05283	-0.05567	-0.05596
		Thin plate theory ¹⁷⁾	0.002646	0.04014	0.001548	0.02461	0.01187	-0.1050	-0.05567	-0.05596
		Timoshenko ¹⁵⁾	0.00308	0.0401	0.00185	0.0252	0.0116	-0.0812	-0.0505	-0.0535
		(%)	-14.1	0.1	-16.4	-2.3	2.4	-34.9	10.2	4.6
	1	BF2-spline Ritz method	0.002767	0.04292	0.001895	0.03041	0.01333	-0.04843	-0.06606	-0.05651
		Thin plate theory ¹⁷⁾	0.002771	0.04292	0.001895	0.03041	0.01332	-0.1283	-0.06605	-0.05651
		Timoshenko ¹⁵⁾	0.00333	0.0444	0.00230	0.0317	0.0138	-0.0853	-0.0614	-0.0510
		(%)	-16.9	-3.3	-17.6	-4.1	-3.4	-43.2	7.6	10.8
	1.25	BF2-spline Ritz method	0.002780	0.04359	0.002200	0.03535	0.01278	-0.04519	-0.07444	-0.05677
		Thin plate theory ¹⁷⁾	0.002787	0.04360	0.002200	0.03535	0.01276	-0.1623	-0.07443	-0.05676
		Timoshenko ¹⁵⁾	0.00345	0.0467	0.00269	0.0374	0.0142	-0.0867	-0.0708	-0.0470
		(%)	-19.4	-6.7	-18.2	-5.5	-10.0	-47.9	5.1	20.8
	1.5	BF2-spline Ritz method	0.002764	0.04348	0.002392	0.03841	0.01133	-0.04418	-0.07925	-0.05685
		Thin plate theory ¹⁷⁾	0.002775	0.04350	0.002392	0.03840	0.01132	-0.1988	-0.07923	-0.05685
		Timoshenko ¹⁵⁾	0.00335	0.0454	0.00290	0.0402	0.0118	-0.0842	-0.0755	-0.0418
		(%)	-17.5	-4.2	-17.5	-4.5	-4.0	-47.5	5.0	36.0
hydrostatic loading	0.6	BF2-spline Ritz method	0.0005644	0.008609	0.0003765	0.005916	0.005665	-0.009798	-0.01634	-0.02488
		Thin plate theory ¹⁷⁾	0.0005646	0.008610	0.0003765	0.005917	0.005663	-0.01620	-0.01620	-0.02488
		Timoshenko ¹⁵⁾	0.00069	0.0089	0.00044	0.0060	0.0062	-0.0745	-0.0131	-0.0242
		(%)	-18.2	-3.3	-14.4	-1.4	-8.6	-86.8	24.8	2.8
	1	BF2-spline Ritz method	0.0005491	0.009397	0.0007998	0.01293	0.008873	-0.002571	-0.02979	-0.03499
		Thin plate theory ¹⁷⁾	0.0005495	0.009397	0.0007998	0.01293	0.008871	-0.01184	-0.02987	-0.03499
		Timoshenko ¹⁵⁾	0.00065	0.0095	0.00097	0.0135	0.0094	-0.0146	-0.0269	-0.0299
		(%)	-15.5	-1.1	-17.5	-4.2	-5.6	-82.4	10.7	17.0
	1.5	BF2-spline Ritz method	0.0003608	0.006500	0.001141	0.01837	0.007124	-0.0009530	-0.03871	-0.04210
		Thin plate theory ¹⁷⁾	0.0003620	0.006505	0.001141	0.01837	0.007123	-0.01049	-0.03871	-0.04210
		Timoshenko ¹⁵⁾	0.00042	0.0065	0.00138	0.0191	0.0075	-0.0087	-0.0364	-0.0291
		(%)	-14.1	0.0	-17.3	-3.8	-5.0	-89.0	6.3	44.7
multipliers		qa^4/D	qa^2	qa^4/D	qa^2	qa^2	qa^2	qa^2	qa^2	

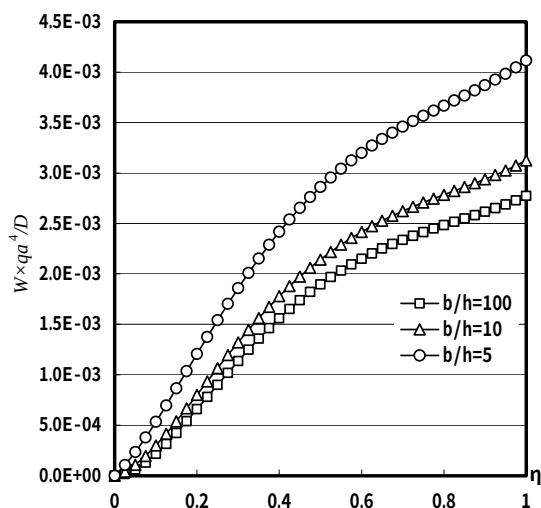
が見られる。次に固定辺と自由辺の交点を含む断面等での曲げモーメントおよびせん断力の分布性状に与えるポアソン比 ν 、幅厚比 b/h や辺長比 b/a などの影響について、検討を行う。

図-3には、等分布荷重を受ける正方形板(CC-CF, $b/a=1$)の中央断面($\xi=0.5$)でのたわみ W 、曲げモーメント M_x , M_y およびせん断力 Q_y の分布に与える幅厚比 b/h の影響が示してある。ただし、ポアソン比 ν は $1/6$ に仮定し、 b/h は100,10,5としている。これより、断面力の分布性状と比較して、横せん断変形の影響によりたわみの分布に与える b/h の影響が顕著に見られる。一方、曲げモーメント M_x の分布に与える b/h の影響は小さく、差異が見られない。また、せん断力 Q_y の分布に与える b/h の影響は、固定端近傍に見られる。

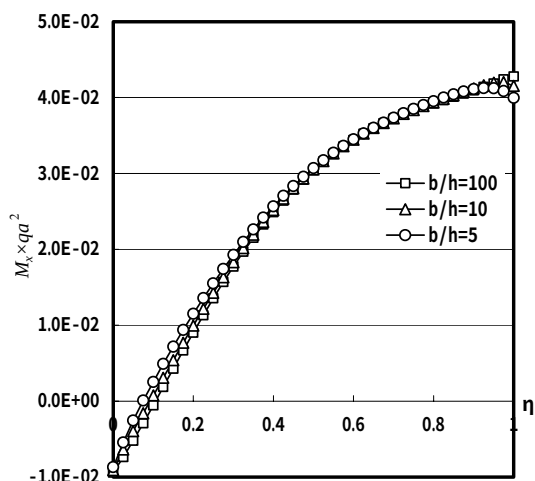
同様に、図-4は、等分布荷重を受ける正方形板

(CC-CF, $b/a=1$)の固定辺($\xi=0$)に沿った曲げモーメント M_x , M_y およびせん断力 Q_x の分布に与える幅厚比 b/h の影響が示してある。これより、曲げモーメント M_x と M_y の分布に与える b/h の影響は、固定辺と自由辺の交点近傍で、大きく見られ、 b/h の減少に伴い、いずれも局所的に応力勾配の大きな応力集中が生じている。一方、せん断力 Q_x の分布は、 b/h が大きくなると固定辺と自由辺の交点近傍で局所的に大きな値を示しているが、これは隅角点に大きなねじりモーメントが発生するためと考えられる。

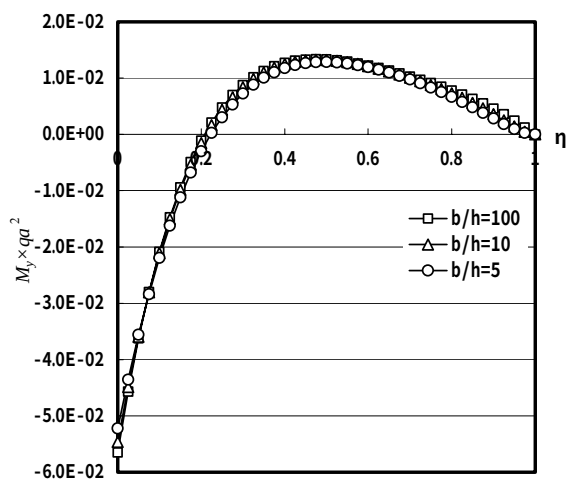
図-5には、等分布荷重を受ける正方形板(CC-CF, $b/a=1$)の中央断面($\xi=0.5$)でのたわみ W 、曲げモーメント M_x , M_y およびせん断力 Q_y の分布に与えるポアソン比 ν の影響が示してある。ただし、 $b/h=10$ に仮定している。これより、たわみの分布に与える ν の影響は、自由辺の近傍で見られ、 ν の値が大きくなるほど、たわみの値が大きくなっている。



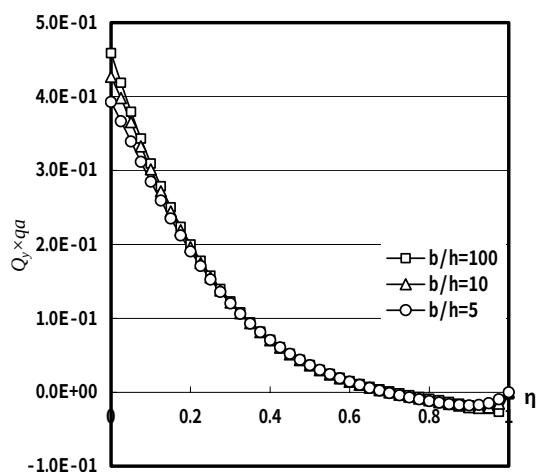
a) W の分布に与える b/h の影響



b) M_x の分布に与える b/h の影響



c) M_y の分布に与える b/h の影響



d) Q_y の分布に与える b/h の影響

図-3 中央断面($\xi=0.5$)でのたわみおよび断面力の分布に与える b/h の影響: CC-CF, $\lambda=1$, $\nu=1/6$, $b/a=1$

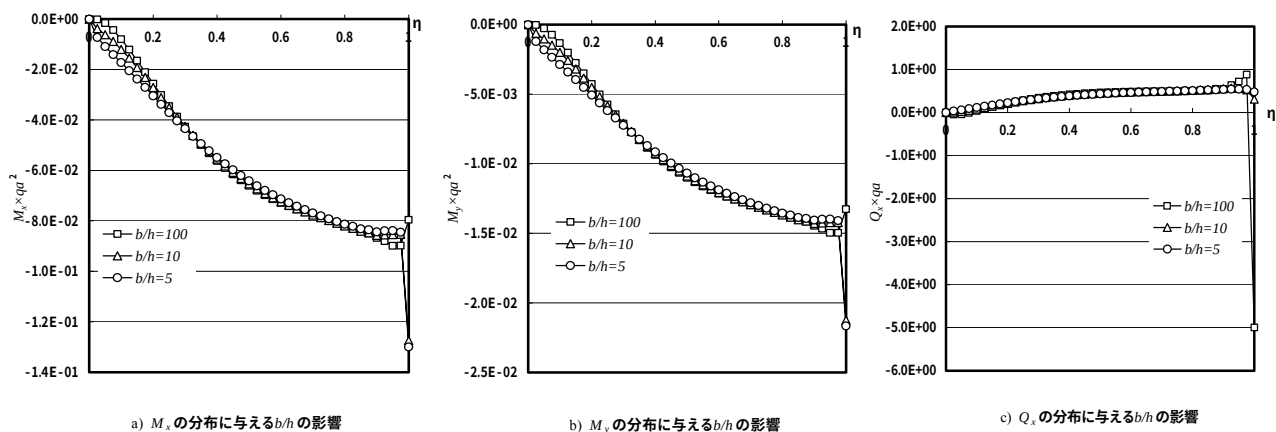


図-4 固定辺 ($\xi=0$) に沿った曲げモーメントおよびせん断力の分布に与える b/h の影響：CC-CF, $\lambda=1$, $\nu=1/6$, $b/a=1$

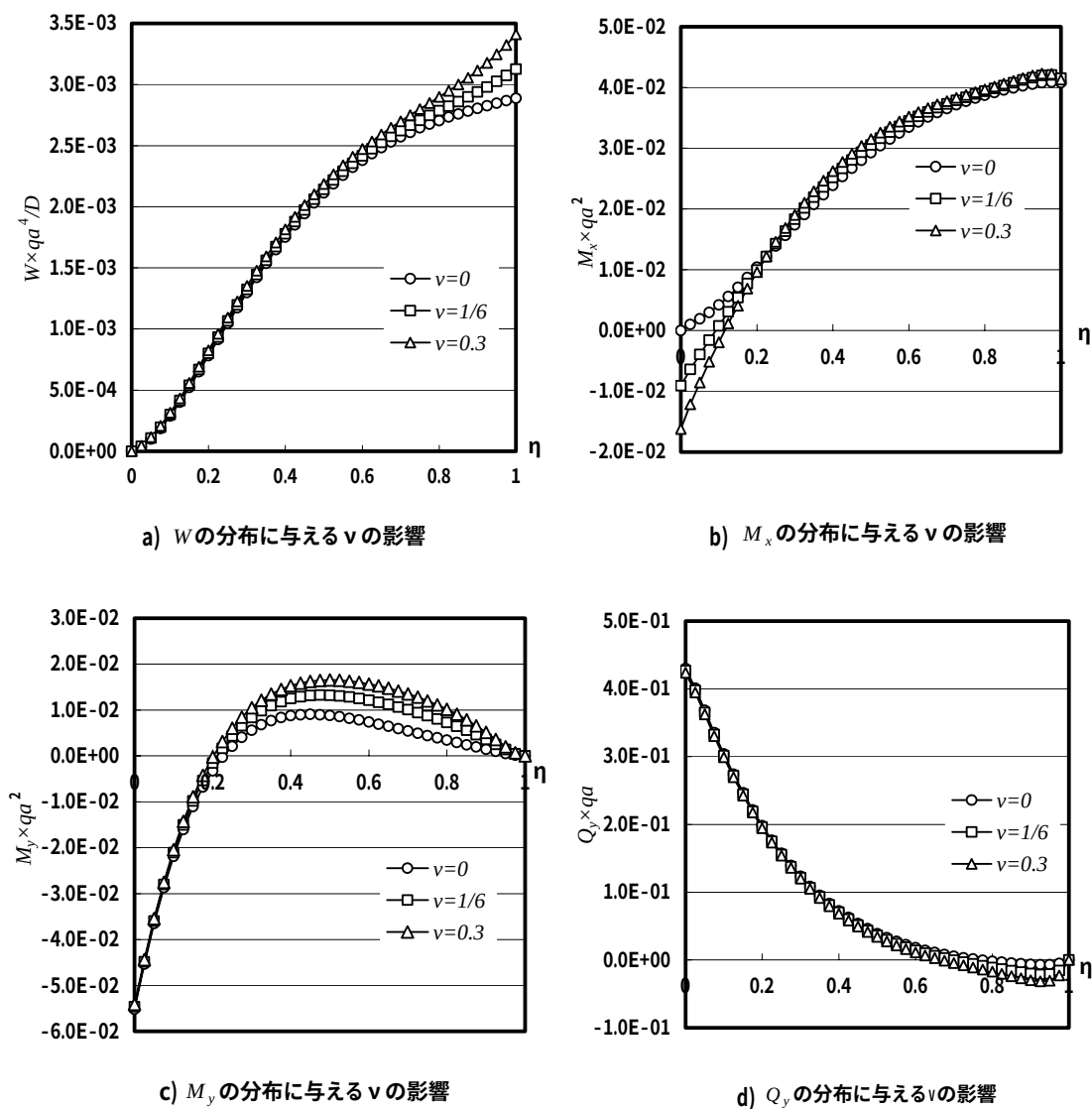


図-5 中央断面 ($\xi=0.5$) でのたわみおよび断面力の分布に与える ν の影響：CC-CF, $\lambda=1$, $b/h=10$, $b/a=1$

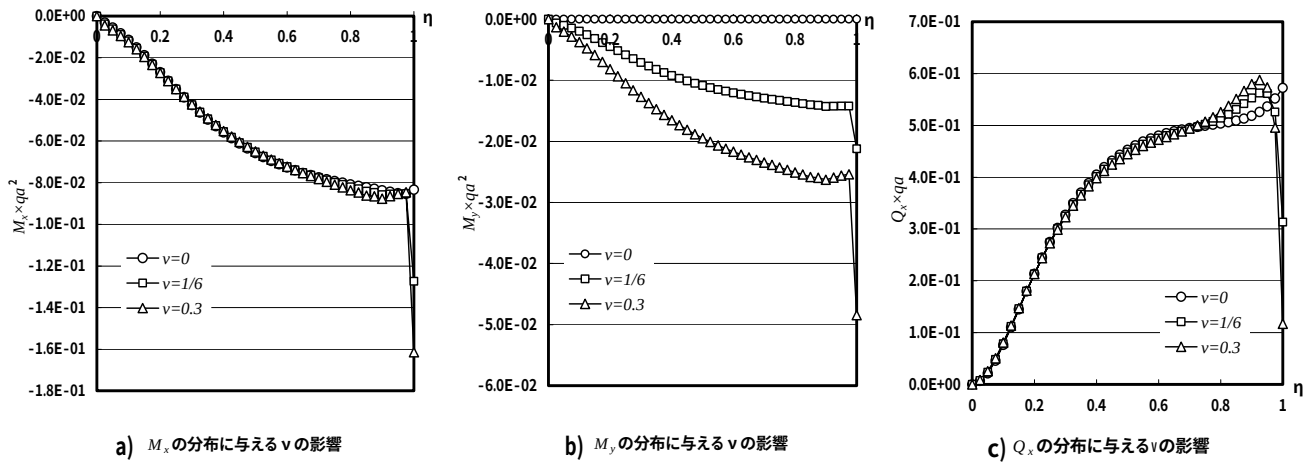


図-6 固定辺 ($\xi=0$)に沿った曲げモーメントおよびせん断力の分布に与える ν の影響：CC-CF, $\lambda=1$, $b/h=10$, $b/a=1$

一方、曲げモーメント M_x の分布に与える ν の影響は固定端近傍で見られ、 ν の値が大きくなると、負の M_x の値が増大しているが、 M_y の分布に与える ν の影響は、断面中央部で大きく見られる。せん断力 Q_x の分布に与える ν

の影響は、比較的小さい。また、図-6 は、等分布荷重を受ける正方形板 (CC-CF) の固定辺 ($\xi=0.5$)での曲げモーメント M_x , M_y およびせん断力 Q_x の分布に与えるポアソン比 ν の影響を示している。これより、 M_x の分布に与え

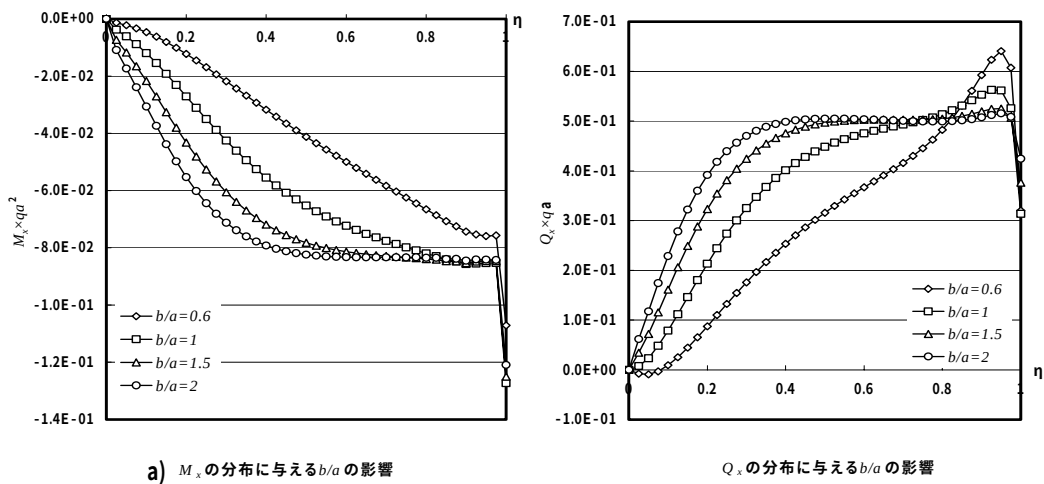


図-7 固定辺 ($\xi=0$)に沿った M_x と Q_x の分布に与える b/a の影響：CC-CF, $\lambda=1$, $\nu=1/6$, $b/h=10$

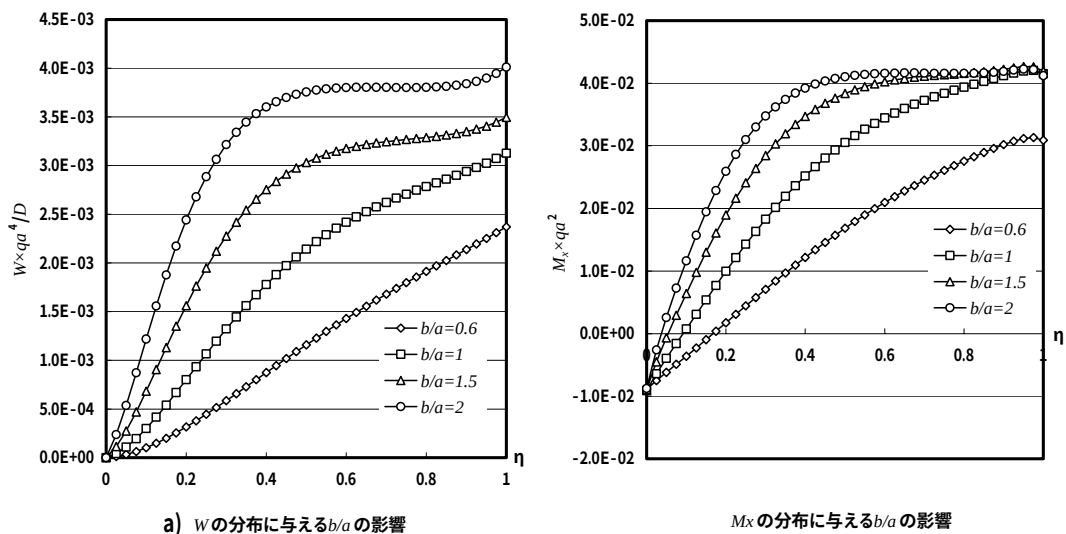


図-8 中央断面 ($\xi=0.5$)での W と M_x の分布に与える b/a の影響：CC-CF, $\lambda=1$, $\nu=1/6$, $b/h=10$

る ν の影響は固定辺と自由辺の交点近傍で見られ、 ν の値が増大すると、急激に M_x の負の値が増大する応力集中が顕著に生じてくる。 M_y の分布に与えるポアソン比 ν の影響は、大きく見られ、 ν の値の増大と共に、 M_y の値が大きくなり、また固定辺と自由辺の交点近傍に負の値は、急激に増大を示している。一方、 Q_x の分布に与えるポアソン比 ν の影響は、固定辺と自由辺の交点近傍で見られ、 ν の値の増大と共に、 Q_x の値は、急激に減少している。

次に、等分布荷重を受ける長方形板(CC-CF)の固定辺($\xi=0$)および中央断面($\xi=0.5$)でのたわみ W 、曲げモーメント M_x 、 M_y およびせん断力 Q_x の分布に与える辺長比 b/a の影響が、それぞれ図-7 と図-8 に示してある。ただし、 $b/h=10$ 、 $\nu=1/6$ に仮定し、 b/a は 0.6 から 1.5 まで変化させている。

中央断面($\xi=0.5$)でのたわみ W と曲げモーメント M_x の分布に与える b/a の影響は顕著に見られ、 b/a が 0.6 の場合には、 W と M_x の分布は、ほぼ直線的に変化している。しかしながら、 b/a の増大と共に、 W と M_x の分布は増大しかつ曲線を成し、平行な固定辺の拘束の影響により、板中央から自由端の領域でほぼ一定の値を示している。一方、固定辺($\xi=0$)に沿った曲げモーメント M_x とせん断力 Q_x の分布は、固定辺と自由辺の交点近傍の値を除くと、 b/a の値の増大と共に、 M_x と Q_x の値が増大してくる。また、固定辺と自由辺の交点近傍の値は急激な変化を示し、先に述べたような応力集中が見られる。

図-9 と図-10 には、正方形板(CC-CF, $b/a=1$)の固定辺($\xi=0$)と中央断面($\xi=0.5$)でのたわみ W 、曲げモーメント M_x およびせん断力 Q_x の分布に与える分布荷重の分布形状(λ)の影響がそれぞれの図に示してある。ただし、等分布荷重($\lambda=1$)と静水圧分布荷重($\lambda=0$)を仮定している。また $\nu=1/6$ 、 b/h は 100 と 10 としている。

中央断面($\xi=0.5$)でのたわみ W の分布は、分布荷重の分布形状(λ)の影響を受けており、 b/h の値によって差異が認められる。しかしながら、 M_x の分布には、 λ の値によらず、 b/h を変化させても解の差は顕著にならない。

また、固定辺での M_x およびせん断力 Q_x の分布に与える λ の影響は、 b/h の値に係わらず、固定辺と自由辺の交点近傍の値を除くと、さほど顕著に見られない。

3.2 二隣固定二辺自由な長方形板の曲げ解析

図-11 に示すような分布荷重を受ける二隣固定二辺自由な長方形薄板の曲げ問題は、ポアソン比 ν が 0 の場合に、金田らにより Fourier 級数展開法を用いて解析されている。

しかしながら、二隣固定二辺自由な厚板のたわみや断面力に与える板厚やポアソン比の影響については、明らかにされていないように思われる。

以後の計算例では、**3.1** で述べた計算例と同様に $k=1=5$ 次、 $m_x=m_y=41$ を用いる。

本手法の解析精度を確認するために、表-4 には、金田ら⁵⁾により Fourier 級数展開法を用いて解析された等分布荷重($\lambda=1$)を受ける長方形薄板(CF-CF)の曲げモーメント

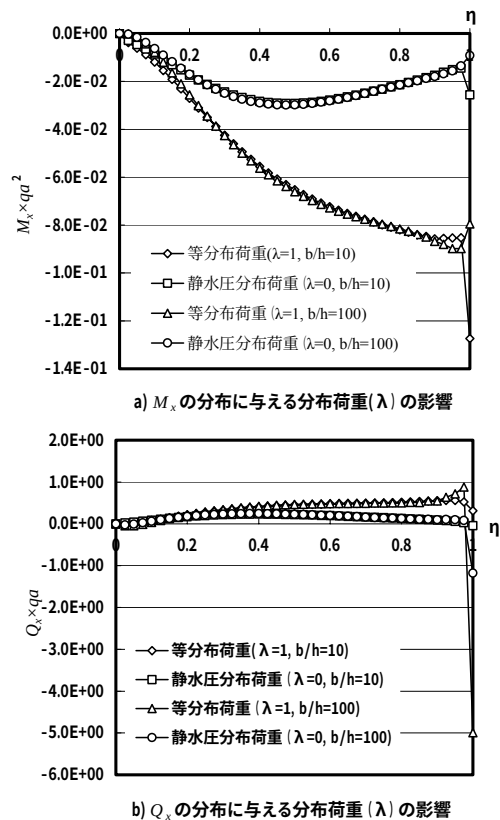


図-9 固定辺 ($\xi=0$) に沿った M_x と Q_x の分布に与える分布荷重 (λ) の影響：CC-CF, $b/a=1$, $\nu=1/6$

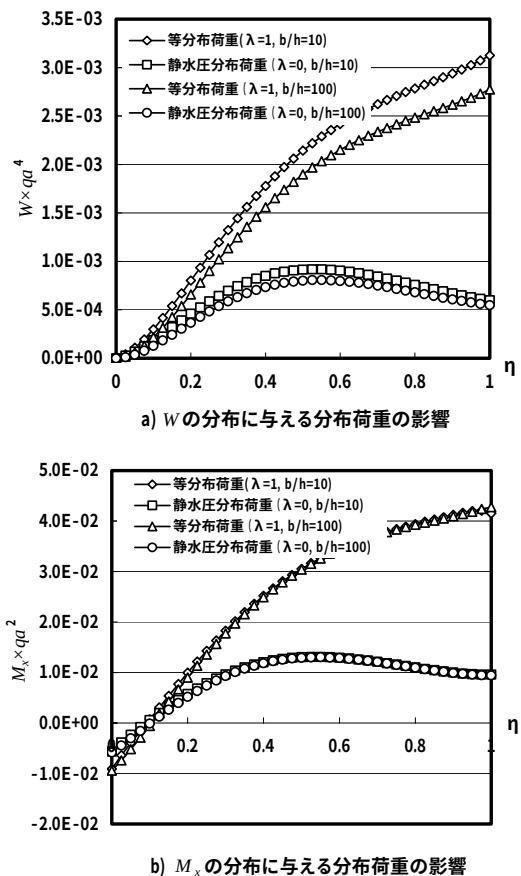


図-10 中央断面 ($\xi=0.5$) での W と M_x の分布に与える分布荷重 (λ) の影響：CC-CF, $b/a=1$, $\nu=1/6$

とせん断力の精度比較が示してある。ただし、 $\nu=0$ ， $b/h=1000$ ，また辺長比 b/a は 1 と 2 に仮定している。

これより，固定辺 ($\xi=0$)での M_x , Q_x の値は，固定辺と自由辺の交点の値を除くと，Fourier 級数展開法で求めた金田らの解析解⁵⁾と比較的良く一致した結果が得られている。また，表中に示してある自由辺 ($\eta=1$)の M_x と Q_y の値は，固定辺の性状と同様に，固定辺と自由辺の交点の値を除くと，金田らの解析解と良く一致した結果が示されている。

図-12 には，等分布荷重 ($\lambda=1$)を受ける二隣固定二辺自由な正方形厚板(CF-CF)の固定辺 ($\xi=0$)に沿った M_x と Q_x の分布に与えるポアソン比 ν の影響が示してある。ここで， $b/h=10$ に仮定し， ν を 0, 1/6, 0.3 に変化させている。また，それぞれ自由辺 ($\eta=1$)に沿った W , M_x および Q_x の分布に与える ν の影響が図-13 に示してある。

図-12 より，固定辺 ($\xi=0$)に沿った M_x と Q_x の分布に与えるポアソン比 ν の影響は，固定辺と自由辺の交点近傍で，顕著に見られる。 ν の値が大きいくほど，急激な応力勾配が生じている。また，図-13 から，自由辺 ($\eta=1$)に沿った W の分布は， ν の増大に従い，直線的に増加している。一方， M_x および Q_x の分布に与える ν の影響は，固定辺と自由辺の交点近傍で大きく見られ，特に， ν の値により， Q_x の分布形状が，かなり異なっている。

図-14 には，静水圧分布荷重 ($\lambda=0$)を受ける二隣固定二辺自由な正方形厚板(CF-CF)の固定辺 ($\xi=0$)に沿った M_x の分布に与える幅厚比 b/h とポアソン比 ν の影響がそれぞれ示してある。ただし， b/h は 100, 10, 5 に仮定し， ν の値を 0, 1/6 および 0.3 に変化させている。

これらの図より，固定辺と自由辺の交点近傍の値を除くと， M_x の分布に与える b/h の影響は小さいが，固定辺と自由辺の交点近傍の値は， ν の値が大きくなると， b/h の影響が顕著に見られる。

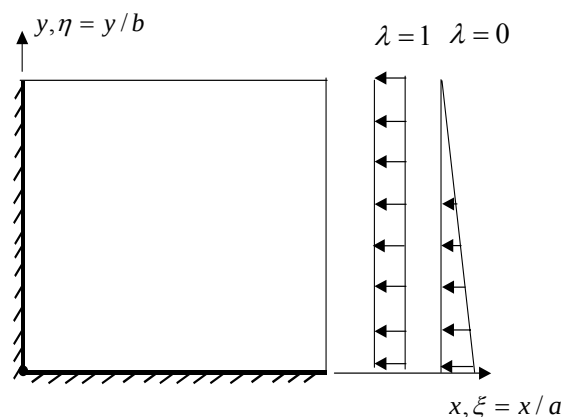
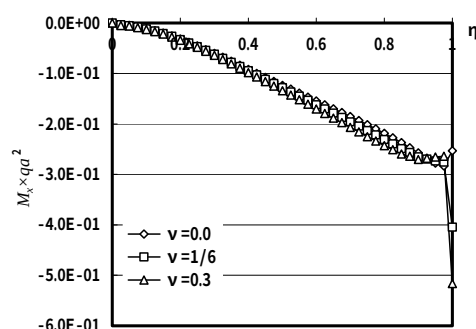
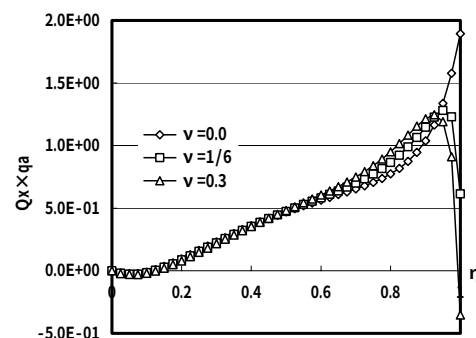


図-11 二隣固定二辺自由な長方形板(CF-CF)



a) M_x の分布に与える ν の影響

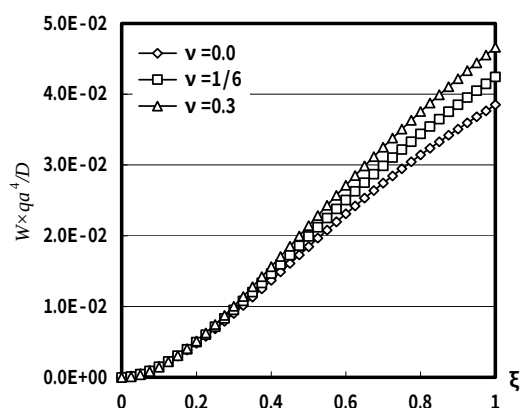


b) Q_x の分布に与える ν の影響

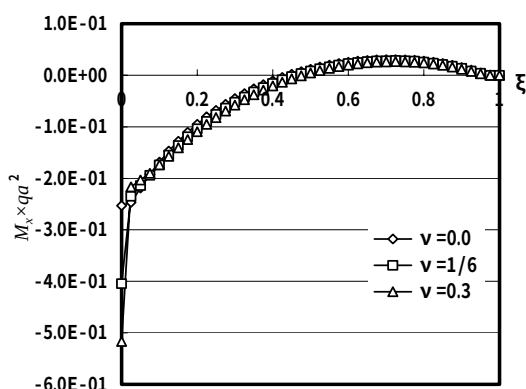
図-12 固定辺 ($\xi=0$)に沿った M_x と Q_x の分布に与える ν の影響：CF-CF, $\lambda=1$, $b/h=10$, $b/a=1$

表-4 等分布荷重を受ける二隣固定二辺自由な長方形薄板の精度比較：CF-CF, $\lambda=1$, $b/h=1000$, $\nu=0$

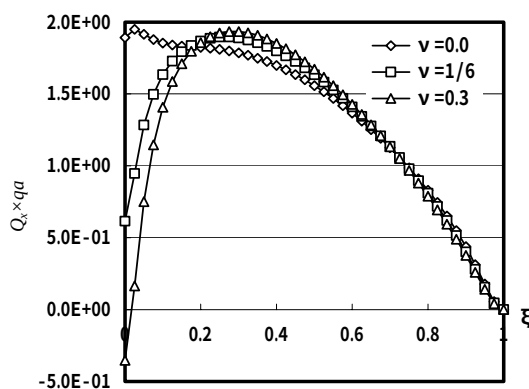
b/a	$\xi=0$					$\eta=1$				
	η	$M_x \times qa^2$		$Q_x \times qa$		ξ	$M_x \times qa^2$		$Q_y \times qa$	
		BF-spline	Fourier ⁵⁾	BF-spline	Fourier ⁵⁾		BF-spline	Fourier ⁵⁾	BF-spline	Fourier ⁵⁾
1	0	0.000	0.000	0.000	0.04234	0	-0.3540	-0.2872	0.000	0.04234
	0.2	-0.02807	-0.02618	0.06064	0.06749	0.2	-0.09505	-0.09582	-0.3252	0.05016
	0.4	-0.09064	-0.09228	0.3702	0.3722	0.4	-0.008084	-0.00775	0.36358	0.35361
	0.6	-0.1529	-0.1510	0.5746	0.5752	0.6	0.03036	0.02998	0.5747	0.55622
	0.8	-0.2127	-0.2157	0.7218	0.7132	0.8	0.03601	0.03645	0.73117	0.69396
	1	-0.3299	-0.2872	6.452	1.9801	1	0.001169	0.00650	27.949	1.96081
2	0	0.0000	0.000	0	-0.1145	0	-0.4803	-0.4392	0.000	-0.02411
	0.2	-0.1025	-0.09760	0.3270	0.33668	0.2	-0.2456	-0.2451	-0.00512	-0.04137
	0.4	-0.2532	-0.2569	0.7776	0.7857	0.4	-0.1095	-0.1095	0.30544	0.26911
	0.6	-0.3486	-0.3450	0.9397	0.9456	0.6	-0.02419	-0.02428	0.56373	0.52643
	0.8	-0.3999	-0.4032	0.9701	0.9720	0.8	0.01457	0.01517	0.7989	0.76943
	1	-0.4649	-0.4392	2.530	1.3106	1	0.000	0.009	40.814	3.07493



a) W に与える ν の影響

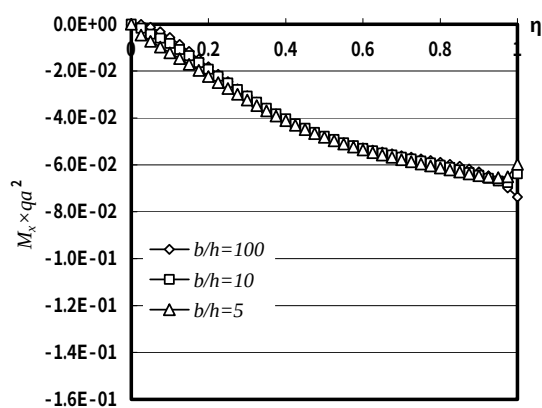


b) M_x の分布に与える ν の影響

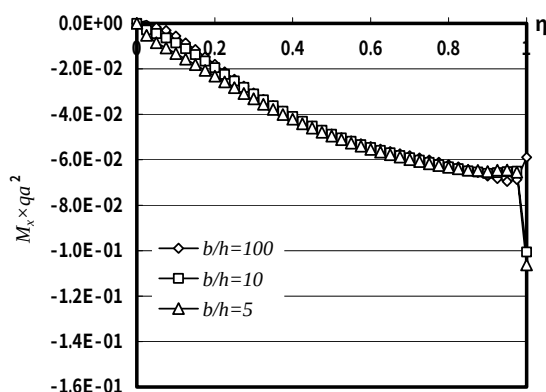


c) Q_x の分布に与える ν の影響

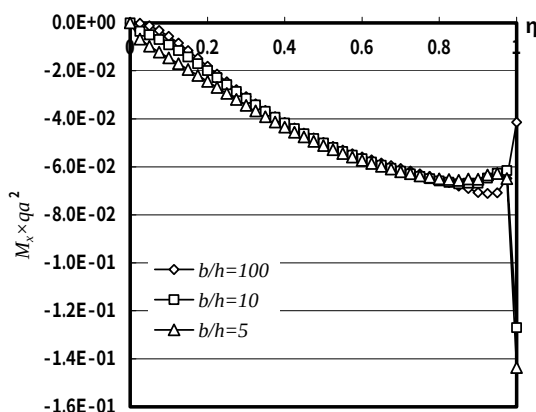
図-13 自由辺 ($\eta=1$) に沿った W, M_x, Q_x の分布に与える ν の影響: CF-CF, $\lambda=1, b/h=10, b/a=1$



a) $\nu=0$



b) $\nu=1/6$



c) $\nu=0.3$

図-14 静水圧分布荷重を受ける正方形板の固定辺 ($\xi=0$) に沿った曲げモーメント M_x の分布に与える b/h と ν の影響: CF-CF, $\lambda=1, b/a=1$

4. あとがき

本論文では、自動的に幾何学的境界条件を満たした許容関数を求めるために、境界関数と B-spline 関数を組み合わせた許容関数を変位関数に仮定した BF-spline Ritz 法を定

式化し、固定辺と自由辺を有する長方形 Mindlin 板の曲げ解析への適用について検討を行った。本手法の解の収束性や精度比較を行い、本手法の有用性および妥当性について検討した。また、固定辺と自由辺を有する厚板の曲げ特性に与えるポアソン比、幅厚比、辺長比などの影響について検討を行った。

本論文で得られた新たな知見をまとめると、以下のとおりである。

- 1) 幾何学的境界条件を自動的に満足させる境界関数と B-spline 関数を組み合わせた許容関数を仮定する BF-spline Ritz 法は、一様な収束性を示し、またその収束値は、解析解や他の数値解析法の値と比較して、良く一致した結果が得られている。
- 2) ベキ関数などの全体関数を仮定した Ritz 法の定式化では係数行列がフルマトリックスになるが、本手法は、局所基底で表される B-spline 関数を用いるので、得られる係数行列は比較的小さいバンド幅の小さな対称行列になる。また spline 次数を一定に保ったまま、区分点の数を増大すれば、解析精度が高められる。
- 3) 厚板の固定辺と自由辺の交点近傍には、ポアソン比 ν の値が大きくなると、応力勾配の大きな応力集中が現れる。
- 4) 固定辺と自由辺を有する厚板の曲げモーメントおよびせん断力の値は、固定辺と自由辺の交点近傍を除くと、ポアソン比や幅厚比の変化に、さほど大きな影響を受けない。
- 5) しかしながら、固定辺と自由辺を有する厚板の自由端近傍のたわみは、ポアソン比の値に大きく依存し、また b/h の値が小さくなると、横せん断変形の影響により、平板のたわみが顕著に増大する。
- 6) 分布荷重の形状の影響は、固定辺と自由辺を有する厚板のたわみに大きく見られるが、断面力には、さほど変化が見られない。
- 7) 分布荷重を受ける Mindlin 板のたわみの値に与える幅厚比の影響は大きく現れるが、断面力に与えるその影響は比較的小さい。これは、たわみを求めるために必要になる式(10)のひずみエネルギーに幅厚比 b/h の 2 乗項が含まれるので、式(9)で表わされる断面力と比較して、大きな影響が現れるものと思われる。

最後に、本論文で示した表のたわみや断面力の値が他の数値解析法のベンチマークテストに使って頂ければ幸いである。今後、衝撃荷重が作用する厚板の動的応答問題への本手法の適用性についても検討して行きたい。

謝辞：本研究は、大同工業大学研究奨励金の援助を受けて行ったものである。また、貴重なご意見を頂いた査読者に謝意を表わします。

参考文献

- 1) 東 洋一, 小森清司: 平板構造, 彰国社, 1974.
- 2) Timoshenko, S. and Woinowsky-Krieger, S.: Theory of plates and shells. McGraw-Hill Book Co., 1962.
- 3) Bares, R.: Tables for the analysis of plates, slabs and diaphragms. Bauverlag GmbH, Wiesbaden-Berlin, 1969.
- 4) 構造力学公式集, 土木学会, 1986.
- 5) Teng H. Hsu. : Structural Engineering and Applied mechanics data handbook, Volume3: plates. Gulf Publishing Company, Houston, 1990.
- 6) 金田一男, 高嶺哲夫, 知念嘉昭, 伊良波繁雄: 土圧を受ける二隣辺固定二辺自由板の解析解とその応用, 構造工学論文集, Vol. 50A, pp.1025-1034, 2004.
- 7) Mindlin, R.D.: Influence of rotary inertia and shear in flexural motion of isotropic, elastic plates, Journal of Applied Mechanics Vol.18, pp.1031-1036, 1951.
- 8) Liew, K.M., Wang, C.M., Xiang, Y. and Kitipornchai, S.: Vibration of Mindlin plates – Programming the p-Version Ritz method, Elsevier Science, Oxford, 1998.
- 9) Leissa, A.W.: The free vibration of rectangular plates, Journal of Sound and Vibration, Vol.31, pp.257-293, 1973.
- 10) Dawe, D.J. and Roufaeil, O.L.: Rayleigh-Ritz vibration analysis of Mindlin plates, Journal of Sound and Vibration Vol.69, pp.345-359, 1980.
- 11) Zhou, D., Cheung, Y.K., Au, F.T.K. and Lo, S.H.: Three-dimensional vibration analysis of thick rectangular plates using Chebyshev polynomial and Ritz method, International Journal Solids and Structures, Vol.39, pp.6339-6353, 2002.
- 12) 成田吉弘: 境界条件の自由な組み合わせを考慮した FRP 積層長方形板の振動解析法, 日本複合材料学会誌, Vol. 18, pp.113-120, 1992.
- 13) Mizusawa, T., Kajita, T. and Naruoka, M.: Vibration of skew plates by using B-spline functions, Journal of Sound and Vibration Vol.62, pp.301-308, 1979.
- 14) Mizusawa, T. and Kajita, T.: Analysis of skew plate problems with various constraints, Journal of Sound and Vibration Vol.73, pp.573-584, 1980.
- 15) 名木野晴暢, 水澤富作, 三上隆: BF-spline Ritz 法を用いた長方形 Mindlin 板の振動解析, 応用力学論文集, Vol. 9, pp. 341-352, 2006.
- 16) Boor, C. D.: On calculating with B-spline, Journal of Approximation Theory, Vol.6, pp.50-62, 1972.
- 17) Mizusawa, T.: Application of the spline element method to analyse of bending of skew plates., Computers and Structures Vol.53, pp.439-448, 1994.

(2006 年 9 月 11 日 受付)