

免震支承の剛性が桁の固有振動に与える影響に関する一考察

Eigenvalue analysis of bridge girder with seismic isolation bearings

伊津野 和行*, 小林 紘士*

Kazuyuki Izuno, Hiroshi Kobayashi

*工博, 立命館大学教授, 理工学部都市システム工学科 (〒525-8577 滋賀県草津市野路東 1-1-1)

This paper discusses the natural vibration mode of a bridge girder with seismic isolation bearings. Initially, the frequency equation of a beam supported with elastic springs was solved. Then, the effect of the vertical and rotational spring constants of the supports on the natural frequency of the beam was evaluated. The results showed that the vertical stiffness of the bearings has little effect on the natural frequency of the beam if they are of adequate stiffness for use as usual bridge bearings. However, too soft bearings cause a considerable reduction in the natural frequency. Furthermore, the effect of the rotational spring is negligible.

Key Words: continua with infinite d.o.f., elastic support, frequency equation

キーワード: 弾性体の振動, 固有値解析, 支承剛性, 振動数方程式

1. はじめに

梁の曲げ振動に関する固有振動特性については, 支承部の鉛直剛性が無限大であるとして解が求められることが多かった. 金属支承の利用が一般的であった時代には, この条件が実橋にも適用でき, 橋梁の基本的な振動特性を把握するのに役立ってきた.

しかし, 1995年兵庫県南部地震の被害をふまえた設計示方書の改訂により, 道路橋の支承としてはゴム支承の利用が基本とされるようになった¹⁾. このような状況を鑑みれば, 弾性支持された梁の固有振動特性について検討することは有用だと考えられる.

従来から, 地盤上の梁の問題を取り扱うにあたり, 弾性床上的の弾性梁に関する検討はされてきたが, 弾性支承に支持された梁に関しては, 定式化までが示される例が多く^{2), 3)}, その解の性質について詳しく検討されることは少なかった. 解が示される場合も, 以前はいかに効率的に解を得るかという数値解析法に主眼を置いた研究が多く^{4), 5)}, 種々のパラメーターが振動特性に与える影響についての検討は橋軸直角水平方向振動に関する研究⁶⁾がなされているのみである. 交通振動問題に関する検討の中で, 具体的な橋梁について金属支承と弾性支承との振動特性を比較した研究は数多いが⁷⁾⁻¹⁶⁾, 支承の鉛直剛性や回転剛性と固有振動との一般的な関係については必ずしも明らかではない.

金属支承の弾性支承化による桁振動への影響については, 有限要素法を用いた解析的研究や, 実橋での振動計

測が行われており, 単純桁では金属支承に比べてわずかな固有振動数低下が生じることが報告されている¹¹⁾⁻¹⁴⁾. また多径間連続梁では, 固有振動数も固有振動モード形も異なる可能性が示されている^{15), 16)}.

しかし, 主に, 実際に設計された単一の特性を持つゴム支承について検討がなされており, ゴム支承の特性が異なることが桁振動に及ぼす影響について検討された例は少ない. 単径間の桁に対する検討結果では, 固有振動数への影響が小さいことが示されているが¹⁷⁾, 各種ケースの検討には骨組み解析計算が必要とされ, 一般的な特性を明らかにするまでには至っていない.

免震ゴム支承には天然ゴム支承, 高減衰積層ゴム支承, 鉛プラグ入り積層ゴム支承, すべり摩擦型ゴム支承など多くの種類があり, さらにその材料特性を変えることで幅広い特性を有する支承を製造することが可能である. そのため, 同じ設計基準を満足するゴム支承でも, その振動特性には違いがあることが考えられる. 特に常時の特性については, 鉛直荷重の支持と桁の回転に対する追従性能が満足されていればよいので, 交通振動に対する性能には, 支承によってばらつきが大きい可能性がある. そのため, 免震ゴム支承の特性の違いが, 橋梁振動およびその振動伝播に及ぼす影響について検討することは重要である.

よって本研究では, 弾性支持された単径間梁および三径間連続梁の振動数方程式を解いて固有値解析を行い, 弾性支承の鉛直剛性および回転剛性が固有振動に及ぼす影響について考察した.

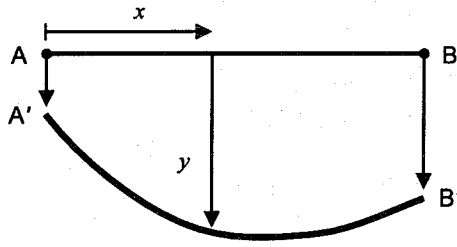


図-1 梁の座標定義

表-1 振動数方程式の解の例

k_R MN·m/rad	λ	C_1	C_2	C_3	C_4
0	0.1040	1	-0.916	1	99.2
10	0.1044	1	-0.916	0.315	64.3

2. 単径間梁に関する検討

2.1 定式化

ここでは、鉛直と回転のばねで両端を支持された単径間梁を想定し、弾性体の振動数方程式より固有振動数を求めて支承剛性の影響を検討した。免震支承も常時レベルの微小振幅に対しては減衰が小さいため、減衰の影響は無視した。全スパンにわたり等断面均質材料を仮定し、単位長さあたりの質量 m も曲げ剛性 EI も一定とした。

図-1に座標定義を示す。梁 AB が、 $A'B'$ に変形することを考える。左端 A から x の位置における梁の鉛直変位を y とすると、 y の一般形は、係数 $C_1 \sim C_4$ と変数 λ を用いて次式で表される。

$$y = C_1 \cosh \lambda x + C_2 \sinh \lambda x + C_3 \cos \lambda x + C_4 \sin \lambda x \quad (1)$$

この梁の振動数方程式を解いて固有振動数を求めるが、式の誘導と境界条件の詳細は多くの書籍^{例えは 2)}で紹介されているため、ここでは詳細な誘導は省略する。弾性支持条件となるため、境界条件として、せん断力が鉛直剛性とたわみに、曲げモーメントが回転剛性とたわみ角に、それぞれ比例することを考慮する。この境界条件を考えるにあたり、支承の鉛直剛性 k_V と回転剛性 k_R を考慮することになる。本研究では、すべての支承に対して、同一の鉛直剛性と回転剛性を与えた。

ここで、桁の曲げ剛性と支承ばね定数との比を無次元化して、式(2)のように与える。 L はスパン長である。

$$\alpha_V = \frac{EI/L^3}{k_V}, \quad \alpha_R = \frac{EI/L}{k_R} \quad (2)$$

境界条件より次の4つの式(3)~(6)が得られ、これらは式(1)の係数 $C_1 \sim C_4$ に関する連立方程式となる。

$$-\alpha_R(\lambda L)C_1 + C_2 + \alpha_R(\lambda L)C_3 + C_4 = 0 \quad (3)$$

$$C_1 + \alpha_V(\lambda L)^3 C_2 + C_3 - \alpha_V(\lambda L)^3 C_4 = 0 \quad (4)$$

$$\begin{aligned} & \{\sinh(\lambda L) + \alpha_R(\lambda L) \cosh(\lambda L)\} C_1 \\ & + \{\cosh(\lambda L) + \alpha_R(\lambda L) \sinh(\lambda L)\} C_2 \\ & - \{\sin(\lambda L) + \alpha_R(\lambda L) \cos(\lambda L)\} C_3 \\ & + \{\cos(\lambda L) - \alpha_R(\lambda L) \sin(\lambda L)\} C_4 = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} & \{\cosh(\lambda L) - \alpha_V(\lambda L)^3 \sinh(\lambda L)\} C_1 \\ & + \{\sinh(\lambda L) - \alpha_V(\lambda L)^3 \cosh(\lambda L)\} C_2 \\ & + \{\cos(\lambda L) - \alpha_V(\lambda L)^3 \sin(\lambda L)\} C_3 \\ & + \{\sin(\lambda L) + \alpha_V(\lambda L)^3 \cos(\lambda L)\} C_4 = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

式(3)~(6)が解を持つためには、 $C_1 \sim C_4$ の係数行列の行列式がゼロでなければならないことより、次式の振動数方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & \{1 + \alpha_R \alpha_V (\lambda L)^4\}^2 \\ & - \cosh(\lambda L) [\{1 - 6\alpha_R \alpha_V (\lambda L)^4 + (\alpha_R \alpha_V)^2 (\lambda L)^8\} \cos(\lambda L) \\ & + 2(\lambda L) \{ \alpha_R + \alpha_V (\lambda L)^2 \} \{ \alpha_R \alpha_V (\lambda L)^4 - 1 \} \sin(\lambda L)] \\ & + 2(\lambda L) \{ \alpha_R - \alpha_V (\lambda L)^2 \} \sinh(\lambda L) [\{ \alpha_R \alpha_V (\lambda L)^4 - 1 \} \cos(\lambda L) \\ & + (\lambda L) \{ \alpha_R + \alpha_V (\lambda L)^2 \} \sin(\lambda L)] = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

よって、式(2)の無次元パラメータ α_V , α_R , およびスパン長 L の3つのパラメータより弾性支承を有する桁のたわみ固有振動特性が決まる。式(7)の振動数方程式は λ に関する超越方程式であり、数値解を求める必要がある。ここでは、パソコン用数式処理ソフトウェアを利用し、ニュートン法によって数値解を得た。 λ の値が得られれば、次式の固有振動数 f を計算することができる。

$$f = \frac{\lambda^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{m}} \quad (8)$$

本研究では、数値解析例を示すため、次のような仮定を行った。まず、スパン $L=30\text{m}$ の梁を想定し、金属支承で両端単純支持されている場合の固有振動数 f_0 を 3Hz と仮定し、そこから曲げ剛性 EI を設定した。1つの支承が支持する桁の単位長さあたりの質量 m は、 4 ton/m (鉛直荷重 600kN) とした。

$$EI = \frac{4L^4 m f_0^2}{\pi^2} \quad (9)$$

解の一例を表-1に示す。これは鉛直剛性 $k_V=500\text{MN/m}$ (無次元パラメータ $\alpha_V=8.76 \times 10^{-4}$) の時の解であり、支承の回転剛性がゼロの場合と、回転剛性 $k_R=10\text{MN} \cdot \text{m/rad}$ (無次元パラメータ $\alpha_R=39.4$) の場合について、 C_1 を1とした時の値を示した。

なお、これ以降、本研究で示す計算例は、具体的な梁のイメージを与えるため、ある特定の質量や剛性を有する桁に対するものであるが、式(2)の無次元パラメータを考慮すれば、式(7)は汎用的に利用することが可能である。

2.2 鉛直剛性の影響

まず、支承の回転剛性 k_R をゼロとした場合について検

討する。図-2に鉛直剛性 k_V を0から1000MN/m（無次元パラメータ $\alpha_V=1.75 \times 10^{-3}$ ）まで変化させた場合の、桁のたわみ1次振動の固有振動数を示す。 $k_V=0$ では、固有振動数0の剛体変位と剛体回転になる。図の右の縦軸は、両端単純支持の場合の固有振動数 $f_0=3\text{Hz}$ を100%とした場合の百分率を表示した。鉛直剛性 k_V が400 MN/m以上（無次元パラメータ $\alpha_V=1.10 \times 10^{-3}$ 以下）であれば、両端単純支持の場合の固有振動数3Hzと比較した場合の違いは2%以下になる。逆に、200 MN/mより小さく（無次元パラメータ $\alpha_V=2.19 \times 10^{-3}$ より大きく）なると、固有振動数は急激に低下する。

図-3に、鉛直剛性 $k_V=500\text{MN/m}$ の時の固有振動モード形を示す。端部での鉛直変位は梁中央の2%と、全体の変形と比較すると小さいことがわかる。これらは、従来の研究結果¹¹⁻¹⁴⁾とも整合する。

ここで、一般に用いられている積層ゴム支承の鉛直剛性がどの程度なのか、支承便覧¹⁹⁾の式を元に計算して検討しておく。道路橋に用いるゴム支承の設計にあたっては、支承便覧によると回転剛性はゼロとされ、鉛直剛性 k_V は次式で計算される。

$$k_V = \frac{E_V A_E}{\Sigma t_e} \quad (10)$$

ただし、 E_V は支承の縦弾性係数、 A_E は有効面積、 Σt_e は総ゴム厚であり、 E_V は次式で表される。

$$E_V = \alpha \cdot \beta \cdot S_1 \cdot G \quad (11)$$

α はゴム支承の種類による係数、 β はゴム支承の平面形状による係数であり、実験を元に値が設定されている。 S_1 は一次形状係数、 G はゴムのせん断弾性係数である。

使用ゴムは天然ゴム、せん断弾性率 $G=1\text{MPa}$ 、平面形状 $\square 400\text{mm}$ 、最大反力1200kN（設計時には活荷重も考慮されるので、本章で用いた梁の死荷重の2倍を最大許容反力と仮定した）とし、一次形状係数 S_1 を6～10程度の3種類設定した。

ゴム層数は、回転角に関する規定（最低1/150の回転に対して引張を生じない）を満足する支承のなかで、層数の多いものと少ないものを、各形状係数ごとに3種類ずつ考えた。 $\square 400\text{mm}$ の矩形断面積層ゴム支承では、式(11)の係数は、 $\alpha=35$ 、 $\beta=1$ となる¹⁹⁾。有効面積 A_E は、単純化のため被覆ゴム厚がない状態を考え、 $\square 400\text{mm}$ の断面積とした。

各モデルの鉛直剛性を表-2に示す。モデル名称17-1は、層厚17mmの1層モデルという意味である。モデル17-1という単層モデルでは1700MN/m以上という高い値になっているが、それ以外は、450～1200MN/mの範囲にあることがわかる。モデル17-1のように層厚の厚い単層ゴム支承は局部せん断ひずみが大きくなりやすく、実橋に用いられることは少ないことから、一般的な道路橋用積層ゴム支承の鉛直剛性は、およそ500～1000MN/mと

考えてよいであろう。同一条件で設計されても、その鉛直剛性には約2倍の幅があることには注意を要する。

以上より、この範囲では、図-2に示されるとおり、固有振動数は鉛直剛性が無限大の場合とあまり大きな差はない。金属支承をゴム支承に変更しても、理論値通りの鉛直剛性が得られれば、桁自体の固有振動数にはあまり変化がないと言える。

しかし、鉛直剛性 k_V が200MN/m以下になれば急速に固有振動数が低下する。現行の支承便覧の式¹⁹⁾や、2004年に支承便覧が改訂される前まで用いられてきた服部・

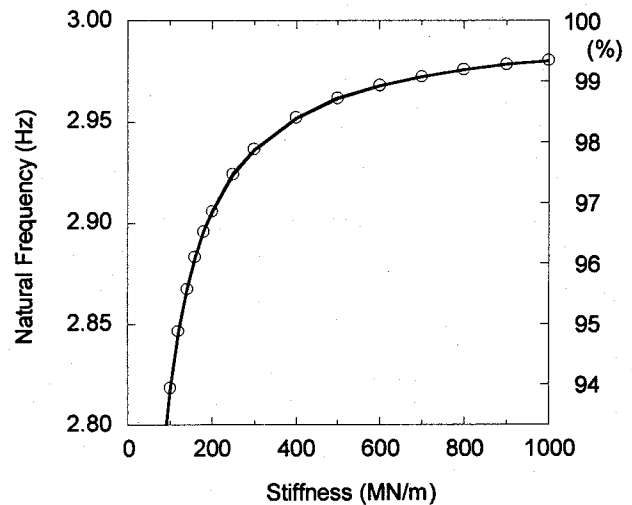


図-2 鉛直剛性と固有振動数

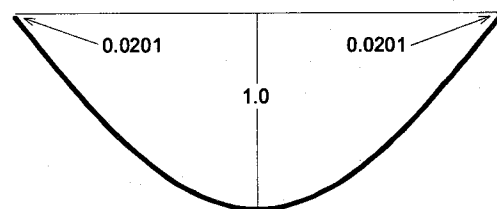


図-3 支承の鉛直剛性を考慮した振動モード形

表-2 同一設計荷重に対する各種積層ゴム支承の鉛直剛性

モデル名称	一次形状係数 S_1	ゴム1層厚 (mm)	層数	鉛直剛性 (MN/m)
17-1	5.9	17	1	1754
17-2			2	877
17-3			3	585
12-3	8.3	12	3	1165
12-5			5	699
12-7			7	499
10-5	10.0	10	5	1011
10-8			8	632
10-11			11	459

武井式²⁰⁾など、鉛直剛性の推定式は実験値を元にした値であり誤差もある。推定値よりかなり低い鉛直剛性を持つ支承が用いられることがあれば、固有振動数が大きく変動することが考えられる。

2.3 回転剛性の影響

次に、回転剛性の影響について検討する。ゴム支承を用いることにより、金属支承よりも鉛直剛性は低くなり、程度の差こそあれ固有振動数の低下をもたらす。一方、回転剛性は金属支承よりも高い可能性があり、回転運動の拘束は固有振動数の増加をもたらすことになる。

図-4には、支承の鉛直剛性 k_V を500MN/m（無次元パラメータ $\alpha_V=8.76 \times 10^{-4}$ ）とし、回転剛性 k_R を0から10MN・m/rad（無次元パラメータ $\alpha_R=39.4$ ）まで変化させた場合の固有振動数を示す。ゴム支承の回転剛性は、設計時にはゼロと考えられている¹⁹⁾。10MN・m/radという値は、理論式を基礎とした提案式²¹⁾や実験結果から与えられる回転剛性²²⁾の10倍以上の値であり、一般的なゴム支承ではこの図の範囲にはほぼ収まるものと考えられる。 $k_R=0$ の時、固有振動数は前節図-2の $k_V=500$ MN/mの値2.96Hzである。 k_R が増加するにつれ固有振動数も増加していき、 $k_R=\infty$ の時には6.43Hzになる。この図の範囲では、固有振動数の差が $f_0=3$ Hzの1%未満であり、支承の回転剛性の影響は小さい。

図-5に、回転剛性 $k_R=10$ MN・m/radの場合の1次固有振動モード形を示す。回転剛性をゼロとした図-3とほぼ同じであり、振動モード形に対しても端部における回転拘束の影響は小さい。

よって、単径間梁の固有振動数を考える場合には、免震ゴム支承の回転剛性は十分に無視できると判断できる。

2.4 スパン長の影響

前節までは、スパン長 $L=30$ mの梁について検討してきた。弾性支承を有する桁の固有振動特性は、前述の通りパラメータ α_V 、 α_R 、 L により決まる。無次元パラメータ α_V と α_R は、スパン長、曲げ剛性と支承ばね定数をパラメータとする無次元量であり、動的応答挙動に対するスパン長の影響を直接把握しにくい。そこでここでは、スパン長 $L=20$ m、30m、40mの場合について数値解を求め、支承ばね定数をパラメータとして整理してみる。

前節の検討によって回転剛性の影響は小さいと判断し、回転剛性をゼロとした解を示す。単位長さあたりの質量 m と曲げ剛性 EI が、スパン長 $L=30$ mの場合と同じ値を持つ梁に対して数値解を求めた。

図-6に鉛直剛性を0から1000 MN/mまで変化させた場合の1次固有振動数を示す。鉛直剛性が無限大の場合（金属支承）、固有振動数はそれぞれ表-3の値になる。

図-6より、鉛直剛性の違いによる影響は、短スパンの梁ほど顕著であることがわかる。 $k_V=500$ MN/mの場合で比較すると、 $L=40$ mの場合には表-3の $k_V=\infty$ の場合との

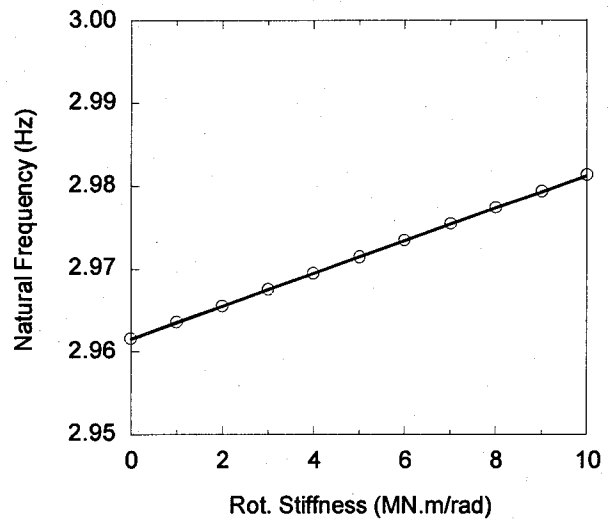


図-4 回転剛性と固有振動数

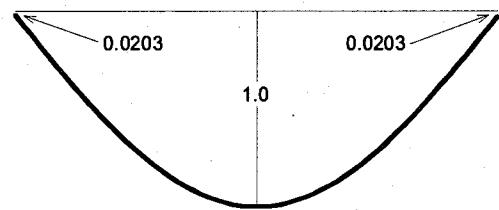


図-5 支承の鉛直剛性と回転剛性を考慮した振動モード形

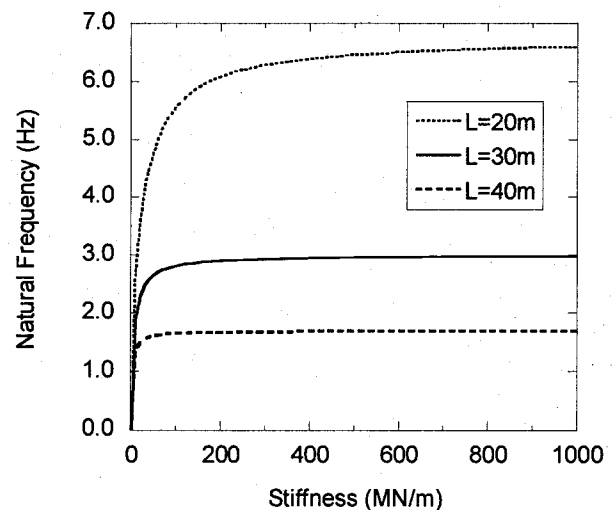


図-6 単径間梁の1次固有振動数

表-3 単純梁の固有振動数

次数	スパン長		
	$L=20$ m	$L=30$ m	$L=40$ m
1次	6.75	3.0	1.6875
2次	27.0	12.0	6.75

(単位: Hz)

差が 0.5% しかないが、 $L=20\text{m}$ では 4.2% である。よって、短スパンの梁を免震化する場合には、固有振動数が変化する可能性を考慮することが必要である。

2.5 高次振動モードについて

同様な検討は、2 次以上の高次振動モードについても考えることができる。図-7 に、2.2 節と同じ $L=30\text{m}$ のモデル ($k_V=500\text{MN/m}$, $k_R=0$) の 2 次振動モード形を示す。逆対称のモード形であるが、端部の振幅がゼロでなくなる影響で、最大値を取る位置が 1/4 スパン (端部から 7.5m) より端部へずれ、端部から 7.2m の位置となる。

図-8 に回転剛性をゼロとして鉛直剛性を変化させた場合の 2 次固有振動数を示す。1 次振動モードの場合 (図-6) よりも、鉛直剛性の影響が大きい。特に短スパン梁では影響が顕著であり、実際に用いられているゴム支承の鉛直剛性 500~1000MN/m の範囲でも、スパン長 $L=20\text{m}$ の梁では固有振動数が大きく変化する。表-3 の単純梁の固有振動数と比較すると、 $k_V=1000\text{MN/m}$ (1GN/m) と大きな場合でも、 $L=20\text{m}$ では 8.5% も差がある。

一般に、交通振動における単径間梁高次振動モードの影響は小さいという指摘もあるが、固有周期によっては橋梁付属構造物への影響が懸念される場合もある²³⁾。高次振動の固有振動数が、交通振動を考えた場合に考慮すべき数 Hz~数十 Hz といった対象領域にあるときには、ゴム支承の鉛直剛性について検討をする必要がある。

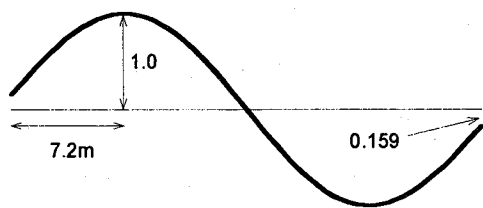


図-7 単径間梁の2次振動モード形

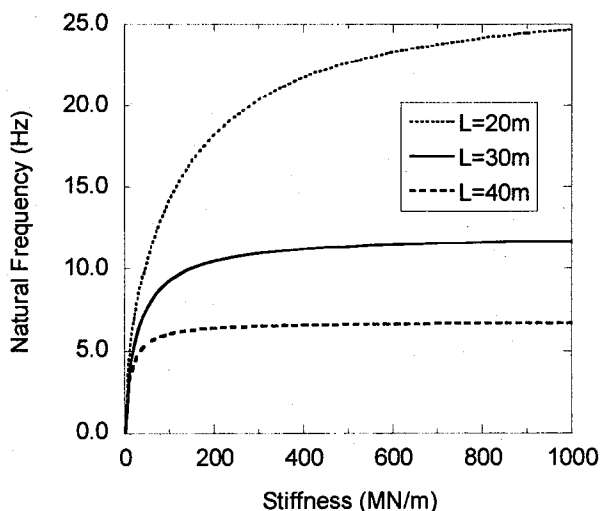


図-8 単径間梁の2次固有振動数

3. 三径間連続梁に関する検討

3.1 モデル化

次に、図-9 に示す三径間連続梁を想定して同様の検討を行った。梁の特性 (単位長さあたりの質量 m と曲げ剛性 EI) は前述の単径間梁と同じ値を用い、各スパンとも一定とした。それぞれのスパン長を L_1 , L_2 , L_3 とする。また、①~④の各支承の鉛直剛性 k_V は同一値だと仮定した。単径間梁の解析結果より、支承回転剛性の影響は小さいと判断し、まず回転剛性をゼロとした解析を行った。回転剛性の影響については 3.4 節に述べる。

各径間における鉛直変位に対して式(1)と同様の式を仮定し、振動数方程式を解いて、固有振動数を求めた。図-10 に示す 3 つの振動モード (対称 1 次、逆対称 1 次、対称 2 次) について結果を整理した。

3.2 等スパン連続梁

まず長さ $L_1=L_2=L_3=30\text{m}$ の等スパンの三径間連続梁を考え、回転剛性 k_R をゼロとして、鉛直剛性 k_V の影響のみを考えた。図-11 に鉛直剛性 k_V を 100MN/m とした場合の対称 1 次振動モード形状を示す。また、図-12 に鉛

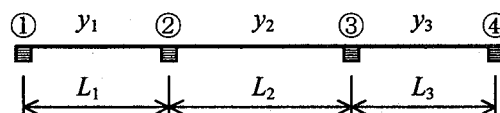
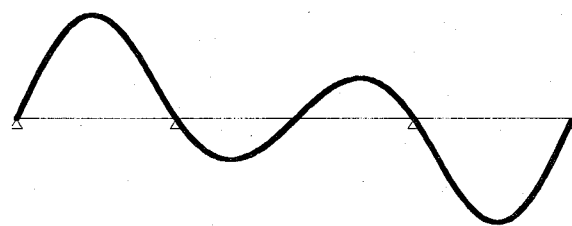


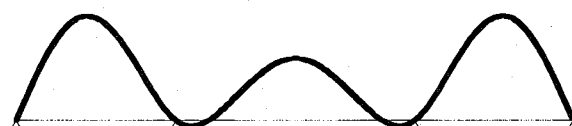
図-9 三径間連続橋のモデル



(a) 対称 1 次振動モード



(b) 逆対称 1 次振動モード



(c) 対称 2 次振動モード

図-10 三径間連続梁の振動モード

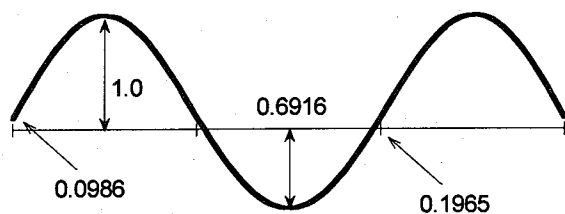


図-11 支承の鉛直剛性を考慮した対称1次振動モード
($k_V=100\text{MN/m}$)

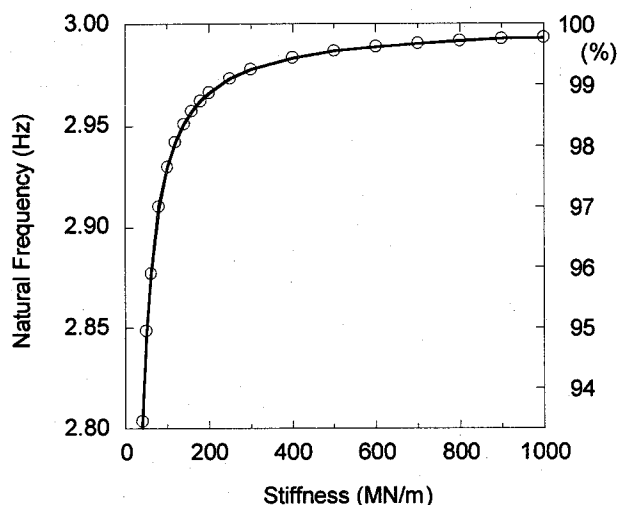
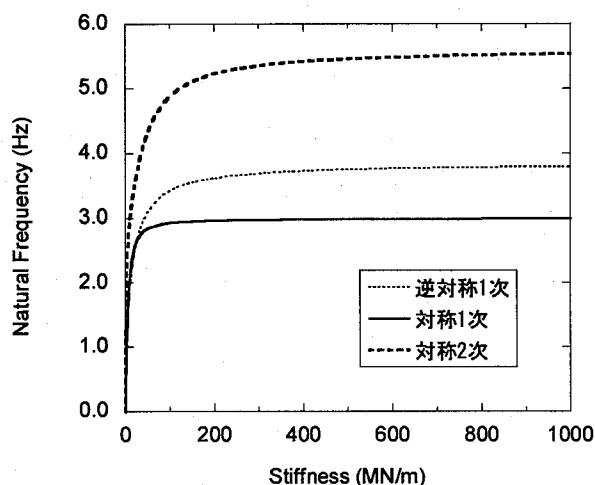


図-12 等スパン三径間連続梁の鉛直剛性と固有振動数

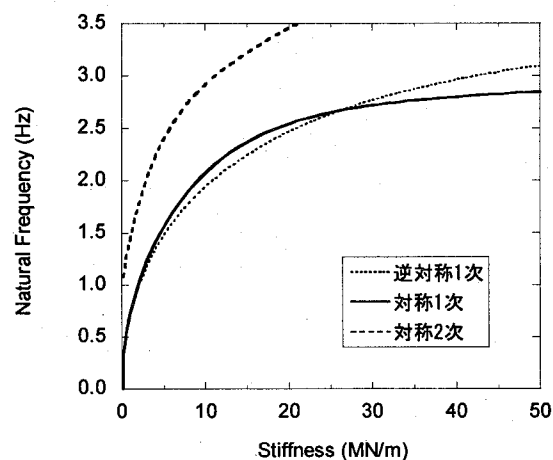
表-4 三径間連続梁の検討ケースと金属支承で支持した場合の固有振動数

L_2	L_2/L_1	対称1次	逆対称1次	対称2次
30	1.0	3.00	3.84	5.61
33	1.1	2.78	3.79	5.07
36	1.2	2.55	3.74	4.70
45	1.5	1.88	3.55	4.16

(単位: Hz)



(a) 全体



(b) 低剛性領域

図-13 鉛直剛性と固有振動数 ($L_2=30\text{m}$)

直剛性を変化させた場合の、対称1次固有振動数を示す。図の右の縦軸は、鉛直剛性が無限大（金属支承を想定）の場合の固有振動数 $f_0=3\text{Hz}$ を100%として、それに対する百分率を表示した。

図-12を見ると、三径間連続梁では、図-2の単径間梁よりも、鉛直剛性 k_V の影響が小さいことがわかる。鉛直剛性が無限大の場合の $f_0=3\text{Hz}$ と比較して、 k_V が 300MN/m で差が1%、 100MN/m で差が2%である。

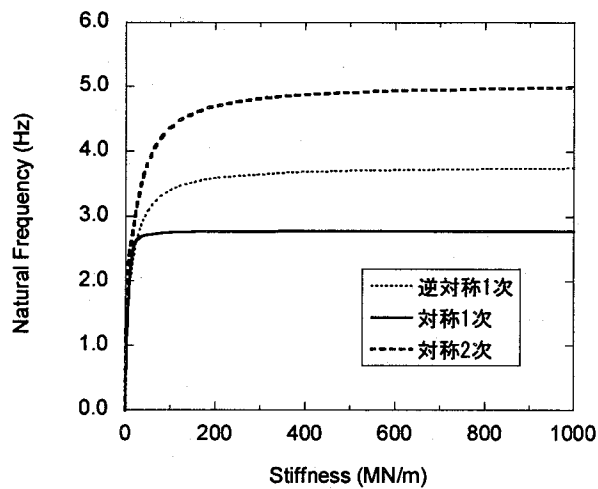
図-11に示すように、実橋の支承より低い剛性だと考えられる k_V が 100MN/m のケースの振動モード形状を見ても、梁端部での振幅が小さい。しかし、 $k_V=\infty$ では、図-10(a)のように中央径間が最も大きく揺れるのに対し、図-11では端径間の方がよく揺れる。

図-12のグラフからはさらに、 k_V が 200MN/m より小さくなると、急激に固有振動数が減少し、 f_0 との比が大きくなることも見てとれる。一般に用いられる支承の鉛直剛性は、前述の通り $500\sim 1000\text{MN/m}$ だと考えられるが、鉛直剛性が 200MN/m より小さくなる場合には、固有振動数が大きく変化する可能性がある。

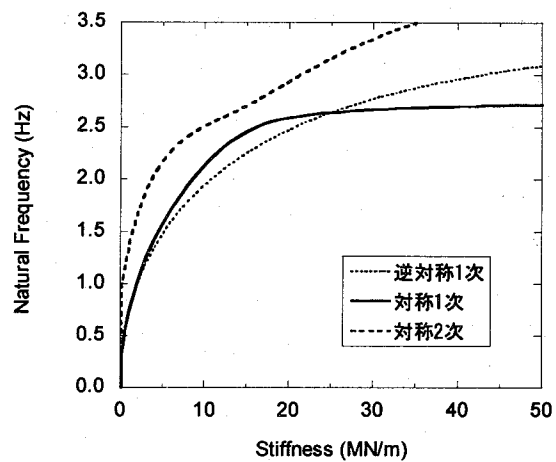
3.3 中央スパン長の影響

三径間連続梁の各径間が等スパンではない場合には、従来の研究¹⁵⁾より、振動モード形状が変化することもあると考えられる。よって次に、中央径間のスパン長を変化させ、その影響について検討することにした。両端径間のスパン長を $L_1=L_3=30\text{m}$ で固定し、中央径間のスパン長 L_2 をその1.0~1.5倍まで変化させて計算した。ここでも、回転剛性はゼロとして、まず鉛直剛性の影響をみることにした。表-4に、検討したケースと金属支承で支持した場合の、3つの固有振動数を示す。

鉛直剛性を変化させた場合の固有振動数を図-13~16に示す。鉛直剛性が低い領域において、対称1次振動モードが現れない領域が存在する場合もあったため、その $k_V=0\sim 50\text{MN/m}$ の領域を拡大した図も同時に表示した。

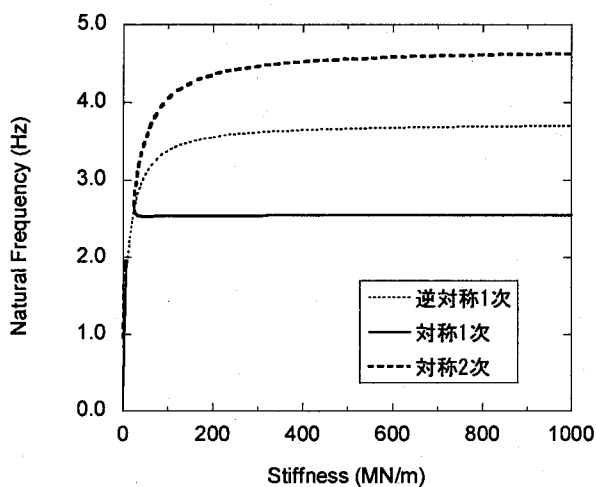


(a) 全体

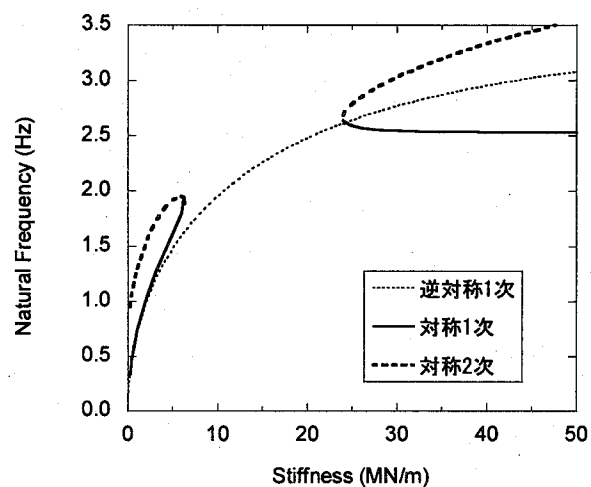


(b) 低剛性領域

図-14 鉛直剛性と固有振動数 ($L_2=33\text{m}$)

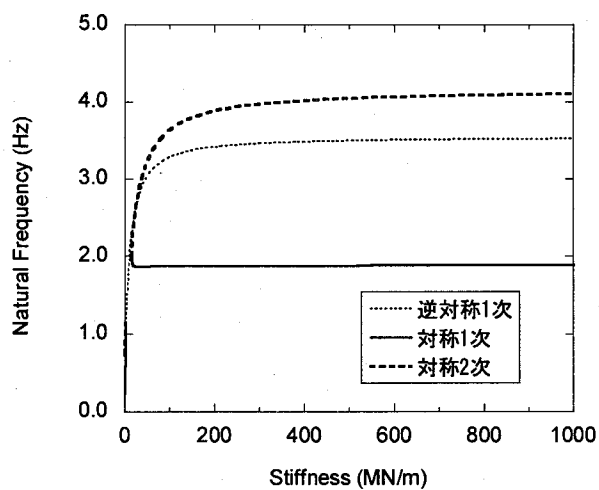


(a) 全体

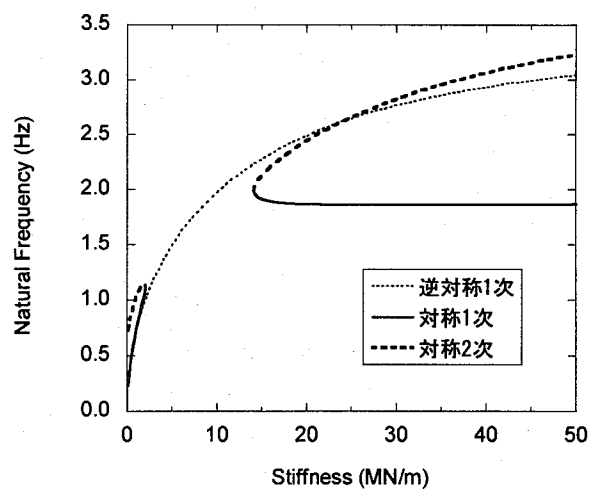


(b) 低剛性領域

図-15 鉛直剛性と固有振動数 ($L_2=36\text{m}$)



(a) 全体



(b) 低剛性領域

図-16 鉛直剛性と固有振動数 ($L_2=45\text{m}$)

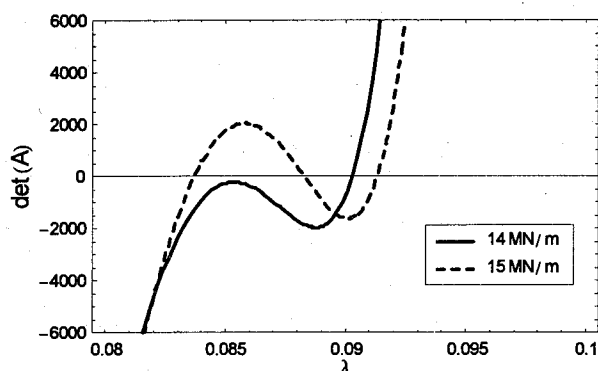


図-17 振動数方程式の関数例

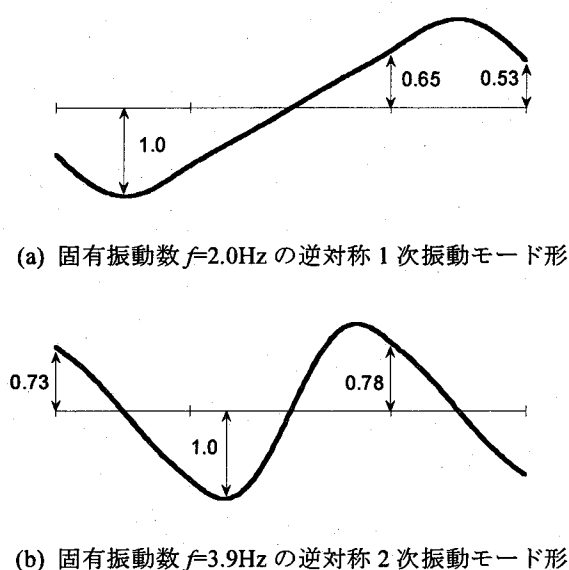


図-18 対称振動モードが現れない領域の固有振動モード

対称 1 次振動モードの固有振動数は、鉛直剛性が 50 MN/m 以上ではほぼ一定値を示し、差は 0.1% 未満である。実橋で用いられる支承のように鉛直剛性がある程度高ければ、その変化の影響は小さい。ただし、スパン長 L_2 の短いケースほど、鉛直剛性の影響は大きい。 $L_2=45\text{m}$ では $k_V=70\text{ MN/m}$ 以上で $k_V=\infty$ の 99.5% になりほぼ一定なのに対し、 $L_2=30\text{m}$ では $k_V=500\text{ MN/m}$ 以上でようやく $k_V=\infty$ の 99.5% になりほぼ一定になる。

図-13(b)～16(b)のいずれも、10MN/m 以下の低剛性では逆対称 1 次モードが最低次の振動数となっている。これは、支点の鉛直剛性が相対的に低い場合、4 つの鉛直方向ばねで支持された剛な棒の挙動に近くなり、棒の剛体回転に近いモードが現れてくるためである。極限として $k_V=0$ では、振動数 0 の剛体回転となる。剛体鉛直振動も振動数 0 であるが、 k_V がわずかでも値を持てば、ばね支持された剛体の振動を考えた場合、剛体回転の固有振動数より低くなる。例えば、等スパンの三径間連続剛体梁の固有振動数は、剛体回転に関するもの f_R と鉛直振動に関するもの f_V が次式で表され、 $f_R < f_V$ である。

$$f_R = \frac{\sqrt{5}}{6\pi} \sqrt{\frac{k_V}{m}} \quad (11a)$$

$$f_V = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{k_V}{m}} \quad (11b)$$

図-13 の $L_2=30\text{m}$ および図-14 の $L_2=33\text{m}$ の中央スパン長をもつ連続梁では、支承鉛直剛性 $k_V=30\text{MN/m}$ 付近で対称 1 次振動モードと逆対称 1 次振動モードの振動数の大小が逆転し、それ以上の k_V に対しては、対称 1 次振動モードが最低次の振動モードとなる。支点における拘束力が増す影響が表れている。

$L_2/L_1=1.2$ 以上の図-15～16 では、途中に対称振動モードが現れない領域が存在する。振動数方程式を

$$\det(A) = 0 \quad (13)$$

と記した場合、左辺の値が式(1)の変数 λ の値によってどのように変化するかを図-17 に示す。この図は、中央スパン $L_2=45\text{m}$ の例であるが、式(13)が成り立つ λ の値（縦軸が 0 となる点）が、鉛直剛性 $k_V=15\text{MN/m}$ ではこのグラフ範囲で 3 点存在するが、 $k_V=14\text{MN/m}$ では 1 点しか存在しない。このように、鉛直剛性 k_V の値によってこの図の範囲で解の数が異なることが、図-15～16 で対称モードが現れない領域の存在につながっている。

これを振動モード形で示したのが図-18 である。ここでは例として、 $L_2=45\text{m}$ 、 $k_V=10\text{MN/m}$ の場合のモード形を示す。最低次振動モード形が図-18(a)の逆対称 1 次振動モード、次が図-18(b)の逆対称 2 次振動モードとなる。

対称 1 次振動モードが生じる $k_V=30\text{MN/m}$ 以上の領域では、中央スパン長 L_2 が長いほどその固有振動数は小さい。一方、逆対称 1 次振動モードの固有振動数は、 L_2 にあまり影響されず、図-13～16 を通して 3.5～3.8Hz とほぼ同じである。図-15～16 では、鉛直剛性 k_V を 0 から大きくしていくと、対称 1 次振動モードが生じる k_V の値において、最低固有周期の振動モードが逆対称 1 次から対称 1 次へと変化する。

なお、これら最低固有周期の振動モード形の変化や、対称 1 次振動モードが現れない領域の存在という現象は、いずれも鉛直剛性 k_V が 30MN/m 以下の低剛性領域で生じている。本研究で仮定した梁においては、一般に用いられるゴム支承の $k_V=500\sim1000\text{ MN/m}$ という領域で、このような現象は生じなかった。

3.4 回転剛性の影響

前章の結果より、免震ゴム支承の回転剛性が固有振動に与える影響は小さいことが考えられる。しかし、耐震補強では、単純桁を連結して多径間連続桁にし、それをゴム支承で支える工法が用いられることがある¹⁶⁾。この場合、桁連結した橋脚上においては支承線が 2 列あり、支点での回転剛性はかなり大きくなることが考えられる。金属支承で支える場合と比較すると、ゴム支承にするこ

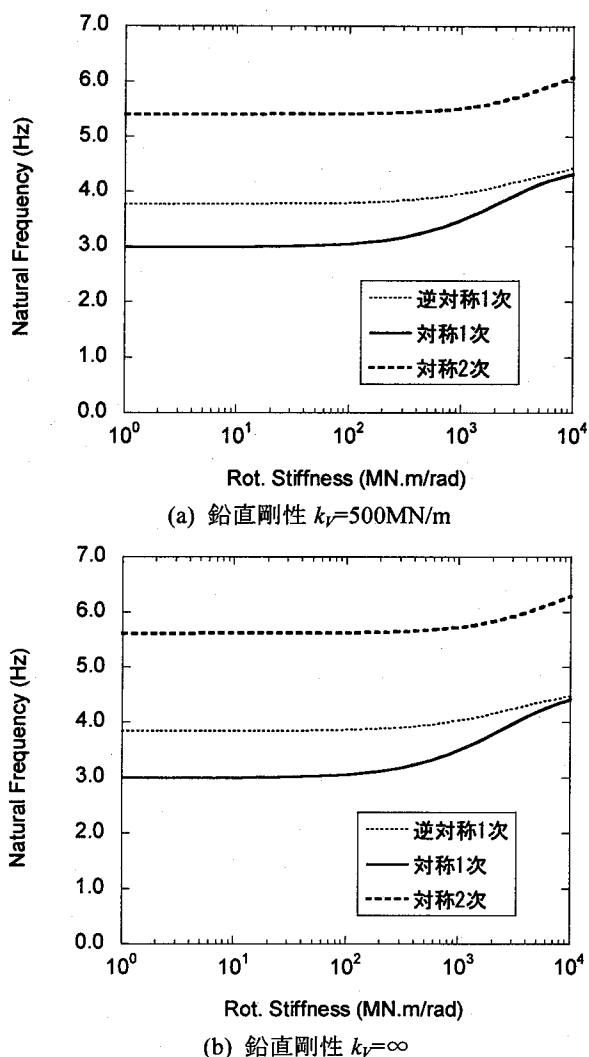


図-19 回転剛性と固有振動数

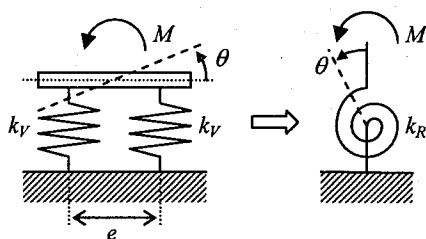


図-20 2つの鉛直ばねの等価な回転ばねへの置換

とによって鉛直剛性が低下し固有振動数が低下する影響と、支承線が2列あることによって回転剛性が増加して固有振動数が高くなる影響との相関が考えられる。

よってここでは、図-9のモデルにおいて、3つの単純桁が連結された場合を想定し、中間支点②と③において回転剛性 k_R を設定してその影響をみることにした。支承線が1列となる端部①と④の回転剛性は影響が小さいと考えゼロとした。

等スパン連続梁 ($L_1=L_2=L_3=30\text{m}$) の結果を図-19に示す。図-19(a)が鉛直剛性を 500MN/m とした場合、図

-19(b)は鉛直剛性を無限大とした場合で、それぞれ回転剛性を横軸(対数軸)として固有振動数を表示したものである。回転剛性を無限大にすると、鉛直剛性も無限大の場合に、一端固定他端単純支持の 4.7Hz および両端固定の 6.8Hz に収束する。

まず、図-19(a)と図-19(b)を比較すると、ほとんど差がないことがわかる。図-13の回転剛性がゼロの場合でも、鉛直剛性が 500MN/m 以上では固有振動数がほとんど変化しなかったが、回転剛性を変化させた場合における影響も小さい。

次に横軸の回転剛性の影響を見ると、回転剛性が $100\text{MN}\cdot\text{m/rad}$ ぐらいまでは、固有振動数が変化せず、それ以上になると増加している。前章で述べた通り、ゴム支承の回転剛性は大きくても数 $\text{MN}\cdot\text{m/rad}$ だと考えられるので、支承線が1列の場合には、連続梁の中間支点におけるゴム支承の回転剛性が固有振動モードに与える影響は無視してもよいという結果である。支承線を2列残したまま桁連結した場合には、図-20のように、次式の関係より等価な回転剛性を計算して検討する必要がある。

$$M = k_R \theta = \frac{e^2}{2} k_v \theta \quad (14)$$

例えば、鉛直剛性 $k_v=1\text{GN/m}$ の支承を 1m 離して設置した場合、等価な回転剛性は式(14)より $500\text{MN}\cdot\text{m/rad}$ となる。回転剛性が $500\text{MN}\cdot\text{m/rad}$ の場合とゼロの場合とを比較すると、対称1次モードで10%、逆対称1次モードで3%、対称2次モードで1%の差が生じている。増加の度合いは低振動数の固有振動モードが大きい。逆に、対称1次固有振動モードには10%程度影響を与えるが、その他の振動モードには影響が少ないとも言える。

4. おわりに

本研究では、免震ゴム支承で弾性支持された単径間梁および三径間連続梁の振動数方程式を解いて固有値解析を行い、弾性支承の鉛直剛性および回転剛性が固有振動に及ぼす影響について考察した。金属支承から免震ゴム支承へ変更した場合に桁の固有振動数が変化すると、標識柱や照明柱など橋梁付属構造物の振動に影響を及ぼすことが考えられる。また、周辺への振動伝播特性にも影響する可能性がある。

本研究では、桁剛性や単位長さあたり質量を一定とするなど、実橋梁に直接適用するにはパラメータを簡易化しすぎているが、大局的な傾向をつかむには有効だと考えられる。なお、本研究では支承の水平剛性の影響は考えていない。これは橋脚を含めた橋梁全体系を考えなければ、剛性マトリックスで水平ばねと鉛直・回転ばねは連成しないためである。橋梁全体系を考え、橋軸直角方向の振動や桁のねじれ振動もあわせ、三次元的な検討を行うことが今後の課題である。

本研究で得られた主な結論は以下の通りである。

- 1) ゴム支承の鉛直剛性がある程度高ければ(本研究の例では 500 MN/m 以上, 無次元パラメータ $\alpha_V=8.76 \times 10^{-4}$ 以下), 金属支承を用いた桁の固有振動数と比較した場合の違いは小さい。逆に, 鉛直剛性がある限度より小さく(本研究の例では 200MN/m 以下, 無次元パラメータ $\alpha_V=2.19 \times 10^{-3}$ 以上) ならば, 固有振動数は急激に低下する。
- 2) 単径間梁におけるゴム支承の回転剛性が, 桁のたわみ固有振動に及ぼす影響は小さい。
- 3) 支承鉛直剛性が単径間梁の固有振動数に与える影響は, 短スパンの梁ほど大きく, また, 高次振動モードほど大きい。
- 4) 三径間連続梁では, 単径間梁よりも, 支承鉛直剛性が桁の固有振動数に与える影響が小さい。また, 単径間梁と同様, 支承鉛直剛性が与える影響は, 低次振動モードよりも高次振動モードで大きい。
- 5) 不等スパン長を有する三径間連続梁では, ゴム支承の鉛直剛性の違いによって, 固有振動モード形状が変化する場合があります, それに伴って固有振動数が変動することがある。
- 6) 支承線を残したまま単純梁を連結して連続梁にした場合など, 中間支点の回転剛性が大きい三径間連続梁では, 回転剛性の大きさが対称 1 次振動モードの固有振動数に影響を与える可能性がある。

謝辞: 本研究の実施にあたり, ゴム支承剛性の値等の資料収集に関して, 株式会社ビービーエムにお世話になった。記して謝意を表する。

参考文献

- 1) 日本道路協会: 道路橋示方書・同解説, V 耐震設計編, 2002.
- 2) Timoshenko, S. P., Young, D. H. and Weaver, Jr., W. (谷口修, 田村章義共訳): 工業振動学, コロナ社, 1977.
- 3) 小坪清真: 入門建設振動学, 森北出版, pp. 156-157, 1996.
- 4) 平井一男: 結合法による弾性支承を有する連続ばりの動的解析, 土木学会論文報告集, 第 104 号, pp. 1-8, 1964.
- 5) 小堀為雄, 久保雅邦: 弾性節点・弾性支点を有する連続桁橋の汎用的な動的解析法, 土木学会論文集, No.356/I-3, pp. 395-403, 1985.
- 6) 水田洋司: 弾性支承が多径間連続橋の振動特性に及ぼす影響について, 構造工学論文集, Vol. 32A, pp. 683-690, 1986.
- 7) 山本泰幹, 森清, 稲田育朗: 密閉ゴム支承の活荷重挙動に関する実橋調査, 土木学会第 50 回年次学術講演会, 第 1 部(A), pp. 666-667, 1995.
- 8) 北村隆理, 小林潔, 田嶋仁志: ゴム支承への取替効果に関する鋼 I 桁橋の実橋計測, 土木学会第 50 回年次学術講演会, 第 1 部(A), pp. 668-669, 1995.
- 9) 薄井王尚, 徳永法夫, 川谷充郎, 西村昂: ゴム支承化による橋梁交通環境振動への影響に関する実験, 土木学会第 52 回年次学術講演会, 第 7 部, pp. 148-149, 1997.
- 10) Kim, C.W., Kawatani, M. and Hwang, W.S.: Reduction of traffic-induced vibration of two-girder steel bridge seated on elastomeric bearings, *Engineering Structures*, Vol. 26, pp. 2185-2195, 2004.
- 11) 川木秀昭, 川谷充郎, 小林義和, 徳永法夫: 弾性支承化の道路桁橋交通振動への影響, 土木学会第 53 回年次学術講演会, 第 1 部(B), pp. 914-915, 1998.
- 12) 薄井王尚, 徳永法夫, 西村昂, 松井繁之: 高架道路の弾性支承化と交通振動に関する研究, 土木学会第 53 回年次学術講演会, 第 7 部, pp. 404-405, 1998.
- 13) 深田幸史, 梶川康男, 讃岐康博: 弾性支承を有する単純桁高架橋の交通振動特性, 土木学会第 54 回年次学術講演会, 第 1 部(B), pp. 518-519, 1999.
- 14) 溝口孝夫: 支承取替えに伴う上部構造の振動特性の変化, 土木学会第 57 回年次学術講演会, 第 1 部, pp. 1147-1148, 2002.
- 15) 山田均, 沢田繁樹, 篠原修二, 風間浩二: 支承特性差に着目した橋梁振動応答特性に関する研究, 土木学会論文集, No. 623/VI-43, pp. 271-278, 1999.
- 16) 梶川康男, 深田幸史, 林秀侃, 吉川実, 薄井王尚: 弾性支承と桁連結構造を用いた既設高架橋の振動特性, 構造工学論文集, Vol. 43A, pp. 747-756, 1997.
- 17) 深田幸史, 梶川康男, 薄井王尚, 西星匡博, 杵本正信: ゴム支承化した単純桁高架橋のモデル化について, 土木学会第 51 回年次学術講演会, 第 1 部, pp. 150-151, 1996.
- 18) 徳永法夫, 吉川実, 川北司郎, 山本豊: 高力黄銅支承板(BP)支承からゴム支承への取替えに対する有益性に関する一考察, 土木学会論文集, No. 581/VI-37, pp. 17-25, 1997.
- 19) 日本道路協会: 道路橋支承便覧, 2004.
- 20) 服部六郎, 武井健三: 圧縮ゴム座のパネ常数に就て, 日本ゴム協会誌, 第 23 巻第 7 号, pp. 194-198, 1951.
- 21) 吉田純司, 阿部雅人, 藤野陽三: 高減衰積層ゴム支承の 3 次元有限要素解析法, 土木学会論文集, No. 717/I-61, pp. 37-52, 2002.
- 22) 谷中聡久, 齋藤一成, 椎名陽一, 岩崎雅紀: 鋼 I けた端部の橋軸直角方向の耐荷性能に関する実験的研究, 構造工学論文集, Vol. 46A, pp. 1153-1162, 2000.
- 23) 海老澤健正, 後藤芳顯, 岡部健: 走行荷重による高架橋照明柱の振動挙動の計測と動的応答解析, 土木学会第 60 回年次学術講演会, 第 1 部, pp. 1067-1068, 2005.

(2005 年 9 月 10 日受付)