

B-spline 円筒リング法を用いた中空円筒体の3次元自由振動解析

Three-dimensional free vibration analysis of hollow circular cylinders using the B-spline cylindrical ring method

名木野晴暢*, 三上隆**, 水澤富作***

Harunobu Nagino, Takashi Mikami, Tomisaku Mizusawa

*修(工) 北海道大学大学院 工学研究科北方圏環境政策工学専攻(〒060-8628 札幌市北区北13条西8丁目)

**工博 北海道大学大学院教授 工学研究科北方圏環境政策工学専攻(〒060-8628 札幌市北区北13条西8丁目)

***工博 大同工業大学教授 都市環境デザイン学科(〒457-0818 名古屋市南区白水町40)

This paper presents an application of the B-spline cylindrical ring method to analyze three-dimensional free vibration of isotropic hollow circular cylinders. The effects of mesh divisions and the degree of spline functions on the convergence of solutions are investigated. Several examples with various boundary conditions are solved and compared with those obtained by exact and other numerical methods based on the theory of elasticity. Good convergence and high accuracy are obtained by using the high-order ring model and less mesh divisions. Moreover, the effects of geometrical parameters, number of circumferential waves and boundary conditions on frequency parameters and mode shapes of thick hollow circular cylinders are also investigated.

Key Words: three-dimensional free vibration, hollow circular cylinders, theory of elasticity,

B-spline cylindrical ring method

キーワード: 3次元自由振動解析, 中空円筒体, 弾性論, B-spline 円筒リング法

1. まえがき

近年, 構造物の大型化, 長大化にともない比較的厚肉な中空円筒体が, 各種トンネル, サイロ, タンクや橋梁の橋脚などに採用されるので, このような構造要素の詳細な振動特性の把握が, 動的設計精度の向上やコスト縮減の観点から重要になってくる。

このような厚肉中空円筒体の構造解析では, 厚さの増大にともない面外せん断変形や回転慣性の影響が無視できなくなる。また, 厚さ方向の応力-ひずみ成分の影響が現れてくると考えられるため, 実務設計で用いられる Love の第一近似仮定に基づく古典シェル理論¹⁾⁻⁵⁾の適用が困難になる。一方で, 面外せん断変形や回転慣性の影響を考慮した種々の修正シェル理論⁶⁾⁻⁸⁾も提案されている。しかしながら, 修正シェル理論は, 理論の高次化にともない未知量が増大することや高次せん断変形理論に基づく有限要素の定式化や閉じた解の解式に関しては, 非常に煩雑になることから, 実務には不向きであると思われる。さらに, 2次元理論であるが故に厚さの増大にともない適用限界が生じてくる。したがって, 厚肉中空円筒体のより厳密な振動特性を把握するためには, 円筒弾性体での厳密な境界条件を考慮できる3次元弾性論に

基づかなければならない。

3次元弾性論に基づく円筒弾性体の支配方程式と弾性学的に厳密な境界条件を満足するような変位関数または応力関数が求められれば, 数学的に閉じた解(厳密解)が得られることになるが, この支配方程式の厳密解が得られるのは, 相対する2面が単純支持された場合に限りされており, 一般的には種々の数値解析法により近似的に解を得なければならない。

これまでに, 3次元弾性論に基づく厳密解法(Wave propagation^{9), 10)}, 反復法¹¹⁾, 差分法¹²⁾, 級数解法^{13), 14)}や有限要素法¹⁵⁾⁻¹⁷⁾, 有限レイヤー法¹⁸⁾⁻²⁰⁾, Rayleigh-Ritz法²¹⁾⁻²⁶⁾などを用いて無限長および有限長の中空円筒体の自由振動解析が行なわれている。前者は, 支配方程式を直接的に取り扱う解法であり, 後者は, エネルギー変分原理に基づく離散化手法である。

これまでに提案されている厳密解法や数値解析法では, 厳密解式が与えられたとしても式が複雑になる点から実務には不向きであり, 境界条件の制約, 振動数や振動モードの精度など種々の問題点が見られる。したがって, 容易に取り扱えることができ, かつ信頼性の高い数値解析法の開発は, 実務設計での構造解析や有限要素解などを評価する上でも重要であると思われる。

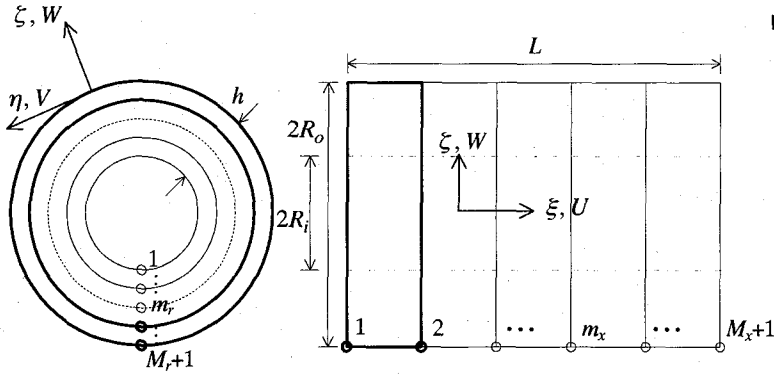


図-1 B-spline 円筒リングモデル

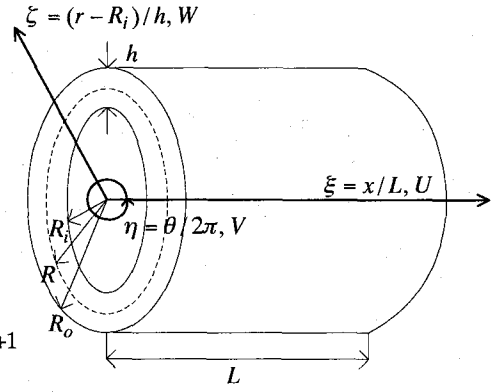


図-2 厚肉中空円筒と無次元円筒座標系

本論文では、相対する2面で任意の境界条件を取り扱え、また、薄肉から厚肉中空円筒体までの統一的な解析が行なえる3次元弾性論に基づくB-spline円筒リング法(BSCRM)を提案する。本手法を中空円筒体の自由振動解析に適用し、解の収束性に与えるspline次数、要素分割数の影響や精度比較について検討を行い、本手法の数値安定性および有用性について明らかにしている。また、厳密な解を得ることが困難な相対する2面が固定された中空円筒体の振動特性に与える円周方向の波数や幾何パラメータの影響についても明らかにしており、その一部を有限要素解や種々の数値解のベンチマークとして取り扱うように配慮している。

2. B-spline 円筒リングモデルの定式化

3次元弾性論とポテンシャルエネルギー最小の原理を用いて、図-1に示すようなB-spline円筒リングモデルを導く。B-spline円筒リング法(BSCRM)は、円周(\$\eta\$)方向の変位をFourier級数展開し、軸(\$\xi\$)方向と半径(\$\zeta\$)方向の変位にはB-spline関数を採用した半数値解析法であり、3次元問題を2次元問題として取り扱うことができる。局所的な基底関数で表される\$k-1\$次のB-spline関数は、\$k\$階の差分商で定義される区分的多項式であり、\$k-2\$階までの導関数の連続性が保証された滑らかな関数である²⁷⁾。また、本手法では、有限要素の高次化で必要になる付加的な節点変位を考慮する必要がなく、spline次数\$k-1\$を高めることによって、B-spline円筒リングモデルの高次化が容易に可能である。

円筒リングモデルの定式化にあたり、以下のような解析仮定を設ける。

- (1) 中空円筒体は、等質で、等方的な円筒弾性体である。
- (2) 微小変形、線形弾性を仮定する。
- (3) 調和振動を仮定する。

また、図-2に示すような無次元円筒座標系(\$\zeta, \eta, \xi\$)は、次式で表す。

$$\zeta = (r - R_i)/h, \quad \eta = \theta/2\pi, \quad \xi = x/L \quad (1)$$

ここで、

$$h = R_o(1 - \kappa), \quad \kappa = R_i/R_o \quad (2)$$

である。\$h\$は円筒弾性体の厚さ、\$L\$は長さ、\$r\$は半径であり、\$R_i\$と\$R_o\$はそれぞれ円筒弾性体の内径と外径を表す。また、\$R\$は中央曲面での曲率半径であり、次式で与えられる。

$$R = R_o(\kappa + 1)/2 \quad (3)$$

リングモデルにおける任意時刻\$t\$での\$\zeta, \eta, \xi\$方向の変位成分\$w(\zeta, \eta, \xi, t)\$、\$v(\zeta, \eta, \xi, t)\$および\$u(\zeta, \eta, \xi, t)\$は、それぞれ次式で表される。

$$\begin{aligned} u(\zeta, \eta, \xi, t) &= U(\zeta, \eta, \xi)e^{i\omega t}, \\ v(\zeta, \eta, \xi, t) &= V(\zeta, \eta, \xi)e^{i\omega t}, \\ w(\zeta, \eta, \xi, t) &= W(\zeta, \eta, \xi)e^{i\omega t} \end{aligned} \quad (4)$$

ここで、\$i = \sqrt{-1}\$、\$\omega\$は円振動数(rad/sec)である。

振幅変位は\$\eta\$方向の変位の周期性から、\$U(\zeta, n(2\pi\eta + 2\pi), \xi) = U(\zeta, \eta, \xi)\$、\$V(\zeta, n(2\pi\eta + 2\pi), \xi) = V(\zeta, \eta, \xi)\$および\$W(\zeta, n(2\pi\eta + 2\pi), \xi) = W(\zeta, \eta, \xi)\$を満たさなければならない。したがって、\$n\$は0または整数として、各振幅変位\$U, V\$および\$W\$は、次式で仮定する。

$$\begin{aligned} U &= \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{l=1}^{i_r} \sum_{\psi=0}^1 A_{ml} N_{m,k}(\xi) N_{l,k}(\zeta) \cos(2\pi n\eta - 0.25\psi), \\ V &= \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{l=1}^{i_r} \sum_{\psi=0}^1 B_{ml} N_{m,k}(\xi) N_{l,k}(\zeta) \sin(2\pi n\eta - 0.25\psi), \\ W &= \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{l=1}^{i_r} \sum_{\psi=0}^1 C_{ml} N_{m,k}(\xi) N_{l,k}(\zeta) \cos(2\pi n\eta - 0.25\psi) \end{aligned} \quad (5)$$

ここで、0.25は無次元位相角(\$\theta = \pi/2\$)であり、\$\psi = 0\$および\$\psi = 1\$は、それぞれ\$\eta = 0\$の軸に対して振幅変位が対称および逆対称分布を意味する。\$A_{ml}, B_{ml}, C_{ml}\$は未定係数であり、\$N_{m,k}(\xi)\$および\$N_{l,k}(\zeta)\$は\$k-1\$次の正規化されたB-splineである。また、\$n = 0, 1, \dots, \infty\$は円周方向の波数、\$i_x = k-1 + M_x\$、\$i_r = k-1 + M_r\$であり、\$M_x\$と\$M_r\$はそれぞれ\$\xi\$と\$\zeta\$方向のリングモデルの分割数、\$k-1\$はspline次数である。ただし、\$n = 0\$ (axisymmetric mode) の場合は、式

(5)とは変位場が異なり、式(6)および式(7)で表される2つの振動モードになる。さらに、 $n \geq 1$ では、 $\psi=0$ と $\psi=1$ による固有モードが異なるのに対して固有値は等しいため、縮退が起こる。

$$U = \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{l=1}^{i_r} A_{ml} N_{m,k}(\xi) N_{l,k}(\zeta), \quad (6)$$

$$W = \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{l=1}^{i_r} C_{ml} N_{m,k}(\xi) N_{l,k}(\zeta), V=0$$

$n=0$ and $\psi=0$ for longitudinal/radial mode

$$V = \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{l=1}^{i_r} B_{ml} N_{m,k}(\xi) N_{l,k}(\zeta), U=W=0 \quad (7)$$

$n=0$ and $\psi=1$ for torsional mode

式(4)をマトリックス表示すれば、次式のように表すことができる。

$$\{d\} = [S]_{ml}^n \{\delta\}_n e^{i\omega t} \quad (8)$$

ここで、

$$\{d\} = \{u \quad v \quad w\}^T \quad (9)$$

$$\{\delta\}_n = \{\{A\} \quad \{B\} \quad \{C\}\}^T \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \{A\} &= \{A_{11} \quad A_{12} \quad \cdots \quad A_{i_x, i_r-1} \quad A_{i_x, i_r}\}_n^T, \\ \{B\} &= \{B_{11} \quad B_{12} \quad \cdots \quad B_{i_x, i_r-1} \quad B_{i_x, i_r}\}_n^T, \\ \{C\} &= \{C_{11} \quad C_{12} \quad \cdots \quad C_{i_x, i_r-1} \quad C_{i_x, i_r}\}_n^T \end{aligned} \quad (11)$$

であり、 $[S]_{ml}^n$ は次式で表される。

$$[S]_{ml}^n = \begin{bmatrix} [N]_{ml} \bar{Y}_n(\eta) & 0 & 0 \\ 0 & [N]_{ml} Y_n(\eta) & 0 \\ 0 & 0 & [N]_{ml} \bar{Y}_n(\eta) \end{bmatrix} \quad (12)$$

ここで、

$$[N]_{ml} = \begin{bmatrix} N_{1,k}(\xi) N_{1,k}(\zeta) \\ N_{1,k}(\xi) N_{2,k}(\zeta) \\ \vdots \\ N_{i_x,k}(\xi) N_{-1+i_r,k}(\zeta) \\ N_{i_x,k}(\xi) N_{i_r,k}(\zeta) \end{bmatrix}^T \quad (13)$$

$$Y_n(\eta) = \sin(2\pi n \eta - 0.25\psi) \quad (14-a)$$

$$\bar{Y}_n(\eta) = \cos(2\pi n \eta - 0.25\psi) \quad (14-b)$$

である。

3次元弾性論で定義される6つのひずみ成分は、無次元円筒座標系で表せば次式で表される。

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_\theta \\ \varepsilon_r \\ \gamma_{x\theta} \\ \gamma_{\theta r} \\ \gamma_{rx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{w}{\mu} + \frac{1}{2\pi\mu} \frac{\partial v}{\partial \eta} \\ \frac{1}{h} \frac{\partial w}{\partial \zeta} \\ \frac{1}{2\pi\mu} \frac{\partial \eta}{\partial \xi} + \frac{1}{L} \frac{\partial v}{\partial \xi} \\ \frac{1}{h} \frac{\partial v}{\partial \zeta} + \frac{1}{2\pi\mu} \frac{\partial \eta}{\partial \eta} - \frac{v}{\mu} \\ \frac{1}{L} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{1}{h} \frac{\partial u}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (15)$$

ここで、 $\mu = h \{ \zeta + \kappa / (1 - \kappa) \}$ であり、式(15)に式(4)を代入し、マトリックス表示すると、式(16)のように表すことができる。

$$\{\varepsilon\} = [B]_{ml}^n \{\delta\}_n e^{i\omega t} \quad (16)$$

ここで、 $[B]_{ml}^n$ はひずみマトリックスであり、次式で表される。

$$[B]_{ml}^n = \frac{1}{h} \sum_{m=1}^{i_x} \sum_{l=1}^{i_r} \begin{bmatrix} \frac{h}{L} N'_m N_l \bar{Y}_n & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2\pi\mu} N_m N_l Y'_l & \frac{1}{\mu} N_m N_l \bar{Y}_l \\ 0 & 0 & N_m N'_l \bar{Y}_n \\ \frac{1}{2\pi\mu} N_m N_l \bar{Y}'_l & \frac{h}{L} N'_m N_l Y_n & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\mu} N_m N_l Y_l & \frac{1}{2\pi\mu} N_m N_l \bar{Y}'_l \\ N_m N'_l \bar{Y}_n & 0 & \frac{h}{L} N'_m N_l \bar{Y}_n \end{bmatrix}$$

for $\psi=0, 1$ (17)

ただし、 $N_m = N_{m,k}(\xi)$, $N_l = N_{l,k}(\zeta)$, $Y_n = Y_n(\eta)$, $\bar{Y}_n = \bar{Y}_n(\eta)$, $N'_m = \partial N_{m,k}(\xi) / \partial \xi$, $N'_l = \partial N_{l,k}(\zeta) / \partial \zeta$, $Y'_n = \partial Y_n(\eta) / \partial \eta$, $\bar{Y}'_n = \partial \bar{Y}_n(\eta) / \partial \eta$ である。

等質でかつ等方性な円筒弾性体の構成式は次式で与えられる。

$$\{\sigma\} = [D] \{\varepsilon\} \quad (18)$$

ここで、

$$\{\sigma\} = \{\sigma_x \quad \sigma_\theta \quad \sigma_r \quad \tau_{x\theta} \quad \tau_{\theta r} \quad \tau_{rx}\}^T \quad (19)$$

である。また、 $[D]$ は弾性マトリックスであり、次式で与えられる。

$$[D] = G \begin{bmatrix} D_1 & D_2 & D_2 & 0 & 0 & 0 \\ D_2 & D_1 & D_2 & 0 & 0 & 0 \\ D_2 & D_2 & D_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (20)$$

ただし、 $G = E / 2(1 + \nu)$ はせん断弾性係数、 $D_1 = 2(1$

$-v)/(1-2v)$, $D_2=2v/(1-2v)$ であり, E はヤング係数, v はポアソン比である.

円筒弾性体のひずみエネルギー U_p は, 無次元円筒座標系で表せば, 次式で与えられる.

$$U = \frac{1}{2} \Lambda \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \{\epsilon\}^T \{\sigma\} \mu d\xi d\eta d\zeta \quad (21)$$

$$= U_{\max} (e^{i\omega t})^2$$

ここで, $\Lambda = 2\pi L h^2$ である. したがって, 最大ひずみエネルギー $U_{\max}$ は次式で与えられる.

$$U_{\max} = \frac{1}{2} \{\delta\}_j^T [K]_{mliq}^j \{\delta\}_n \quad (22)$$

ここで, $[K]_{mliq}^j$ は剛性マトリックスであり, 次式で与えられる.

$$[K]_{mliq}^j = 2\pi LG \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 [B]_{liq}^j [D] [B]_{ml}^n \mu d\xi d\eta d\zeta \quad (23)$$

調和振動を仮定すれば, 運動エネルギー T は次式で与えられる.

$$T = \frac{1}{2} \rho \Lambda \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 \right\} \mu d\xi d\eta d\zeta$$

$$= -T_{\max} (e^{i\omega t})^2 \quad (24)$$

したがって, 最大運動エネルギー $T_{\max}$ は次式で与えられる.

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \Lambda \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (U^2 + V^2 + W^2) \mu d\xi d\eta d\zeta$$

$$= \frac{1}{2} \omega^2 \{\delta\}_j^T [M]_{mliq}^j \{\delta\}_n \quad (25)$$

ここで, $[M]_{mliq}^j$ は, 質量マトリックスであり, 次式で与えられる.

$$[M]_{mliq}^j = \rho \Lambda \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 [S]_{liq}^j [S]_{ml}^n \mu d\xi d\eta d\zeta \quad (26)$$

ただし, ρ は密度である.

式(4)で仮定した振幅変位において, B-spline 関数は与えられた境界条件を満たさない任意の関数であるので, 一般的な境界条件の取り扱いを考慮する必要がある. そこで, 円筒弾性体の境界面で斉次の幾何学的境界条件を導入するために仮想バネ法²⁹⁾を用いる. すなわち, ξ 軸に垂直な境界面 $\xi = \xi_c$ で斉次の幾何学的境界条件を考慮するために, 各変位 U, V, W に対応する仮想バネ係数 α, β, γ を導入する. これらの仮想バネによるひずみエネルギー U_b は, 式(27)で与えられ, このエネルギーを式(21)

に付加する. この方法は, penalty 関数法と同様の方法である.

$$U_b = \frac{1}{2} 2\pi h^2 \sum_{ic=1}^{N_c} \int_0^1 \int_0^1 (\alpha u^2 + \beta v^2 + \gamma w^2) \mu d\xi d\eta \Big|_{\xi=\xi_{ic}}$$

$$= U_{b\max} (e^{i\omega t})^2 \quad (27)$$

したがって, 最大仮想バネひずみエネルギー $U_{b\max}$ は次式で与えられる.

$$U_{b\max} = \frac{1}{2} \frac{h^2}{LG} \sum_{ic=1}^{N_c} \int_0^1 \int_0^1 (\alpha U^2 + \beta V^2 + \gamma W^2) \mu d\xi d\eta \Big|_{\xi=\xi_{ic}}$$

$$= \frac{1}{2} \{\delta\}_j^T [K_S]_{mliq}^j \{\delta\}_n \quad (28)$$

ここで, $[K_S]_{mliq}^j$ は仮想バネ剛性マトリックスであり, 次式で与えられる.

$$[K_S]_{mliq}^j = \sum_{ic=1}^{N_c} \int_0^1 \int_0^1 [S]_{liq}^j [\Phi] [S]_{ml}^n \mu d\xi d\eta \Big|_{\xi=\xi_{ic}} \quad (29)$$

ここで, $[\Phi] = \text{diag}[k_U, k_V, k_W]$, $k_U = \alpha h^2/LG$, $k_V = \beta h^2/LG$ および $k_W = \gamma h^2/LG$ は仮想剛性パラメータ, ic はそれぞれ仮想剛性パラメータを導入する境界面の数であり, N_c は ξ 軸に垂直な面の総数を表す.

円筒弾性体の幾何学的境界条件は, 以下の通りである.

単純支持面 $V = W = 0, U \neq 0$

固定面 $U = V = W = 0$

自由面 $U = V = W \neq 0$

したがって, これらの幾何学的境界条件に対応する仮想剛性パラメータは, 単純支持面では $k_U=0, k_V=k_W=\infty$ であり, 固定面では $k_U=k_V=k_W=\infty$, また, 自由面では $k_U=k_V=k_W=0$ になる. しかしながら, 数値計算の際には, ∞ 値は取り扱うことができないため, 数値実験を行い, 解に影響を与えない範囲での最大値を用いる.

したがって, 円筒弾性体の全ポテンシャルエネルギー Π は, 式(22), (25)および式(28)を用いて次式で与えられる.

$$\Pi = (U_{\max} + U_{b\max}) - T_{\max} \quad (30)$$

式(30)において, 円周方向の固有関数の直交性($n=j$)を考慮し, ポテンシャルエネルギー最小の原理を適用すれば, 次の線形代数方程式が得られる.

$$\partial \Pi / \partial \{\delta\}_j^T = 0 \quad (31)$$

これをマトリックス表示すれば,

(a) $n=0$ and $\psi=1$ for torsional mode

$$([K_{WW}] - \Omega^2 [M_{WW}]) \{B\} = \{0\} \quad (32-a)$$

(b) $n = 0$ and $\psi = 0$ for longitudinal/radial mode

$$\begin{bmatrix} [K_{UU}] & [K_{UW}] \\ [K_{WU}] & [K_{WW}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{A\} \\ \{C\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (32-b)$$

$$-\Omega^2 \begin{bmatrix} [M_{UU}] & [0] \\ [0] & [M_{WW}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{A\} \\ \{C\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}$$

(c) $n \geq 1$ transverse bending mode ($n = 1$), breathing mode ($n \geq 2$) and $\psi = 0, 1$

$$\begin{bmatrix} [K_{UU}] & [K_{UV}] & [K_{UW}] \\ [K_{VU}] & [K_{VV}] & [K_{VW}] \\ [K_{WU}] & [K_{WV}] & [K_{WW}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{A\} \\ \{B\} \\ \{C\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix} \quad (32-c)$$

$$-\Omega^2 \begin{bmatrix} [M_{UU}] & [0] & [0] \\ [0] & [M_{VV}] & [0] \\ [0] & [0] & [M_{WW}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{A\} \\ \{B\} \\ \{C\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{0\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}$$

で与えられる。ここで、 $\Omega = \omega h (\rho/G)^{1/2}$ であり、サブ剛性マトリックス $[K_{IJ}]$ ($I, J = U, V, W$) およびサブ質量マトリックス $[M_{IJ}]$ ($I = U, V, W$)は、Legendre-Gaussの数値積分公式により求めている。さらに、式(32-a), (32-b)および式(32-c)の剛性マトリックスおよび質量マトリックスの大きさは、それぞれ、 $(k-1+M_x)(k-1+M_r)$, $2(k-1+M_x)(k-1+M_r)$, $3(k-1+M_x)(k-1+M_r)$ で表される。なお、固有値および固有ベクトルは、Householder-QR法と逆反復法を用いて求めている。

3. 数値計算例および考察

ここでは、3次元弾性論に基づく中空円筒体の3次元自由振動解析への本手法(BSCRM)の適用性について検討するために、解の収束性に与える spline 次数 $k-1$ 、要素分割数 M_x, M_r の影響や精度比較について示す。また、厳密な解を得ることが困難な固定面を有する中空円筒体の振動特性に与える円周方向の波数 n 、厚さ - 半径比 h/R や長さ - 半径比 L/R の影響についても示す。

数値計算例では、ポアソン比 $\nu = 0.3$ を用い、 ξ 軸に垂直な2つの境界面 ($\xi = 0, 1$) での境界条件は、C-F, S-S のように表す。ここで、固定面(C), 自由面(F)であり、また、単純支持面(S)である。

中空円筒体の振動モードは、対称な境界条件に限り、円周方向の波数 n ごとに S または A で表している。ここで、S と A は、それぞれ、軸方向に関して対称または反対称モードを意味する。

3.1 解の収束性に与える仮想剛性パラメータの影響

数値計算上では、仮想剛性パラメータの ∞ 値を取り扱うことができない。したがって、数値実験を行い、解に影響を与えないパラメータの範囲について検討する。

表-1 には、境界条件が C-F である中空円筒体 ($L/R = 4$) の振動数パラメータ $\Omega^{**} = \omega R_0 (\rho/G)^{1/2}$ ($n = 1$) の収束性に与える仮想剛性パラメータ $k_U = k_V = k_W$ の影響が示して

表-1 境界条件が C-F である中空円筒体の振動数パラメータ Ω^{**} の収束性に与える仮想剛性パラメータの影響：
 $L/R = 4, k-1 = 4, M_x \times M_r = 12 \times 12, n = 1$

h/R	Modes	$k_U = k_V = k_W$			
		10^2	10^6	10^8	10^{10}
0.005	1st	0.18024	0.18318	0.18320	0.18320
	2nd	0.58977	0.59249	0.59250	0.59250
	3rd	1.0605	1.0643	1.0643	1.0643
	4th	1.2334	1.2365	1.2365	1.2365
	5th	1.3747	1.3772	1.3772	1.3772
0.6	1st	0.25355	0.25776	0.25776	0.25776
	2nd	0.83724	0.84300	0.84300	0.84300
	3rd	1.5581	1.5661	1.5661	1.5661
	4th	1.8257	1.8352	1.8352	1.8352
	5th	2.4466	2.4592	2.4592	2.4592
1.2	1st	0.34949	0.35521	0.35522	0.35522
	2nd	1.1140	1.1202	1.1202	1.1202
	3rd	2.0672	2.0768	2.0768	2.0768
	4th	2.4930	2.5047	2.5047	2.5047
	5th	2.8659	2.8708	2.8708	2.8708

表-2 境界条件が S-S および C-C である中空円筒体の振動数パラメータ Ω^{**} の収束性に与える spline 次数 $k-1$ 等要素分割の影響： $h/R = 0.8, L/R = 1, n = 1$, 1st - symmetric mode in the axial direction (S1)

Boundary conditions	$M_x \times M_r$	$k-1$			
		1	2	3	4
S-S	4×4	0.69539	0.66041	0.65990	0.65989
	8×8	0.66883	0.65992	0.65989	0.65989
	12×12	0.66387	0.65990	0.65989	0.65989
	16×16	0.66213	0.65989	0.65989	0.65989
	20×20	0.66132	0.65989	0.65989	0.65989
	24×24	0.66089	0.65989	0.65989	0.65989
	Exact ¹⁰⁾	0.65989			
C-C	4×4	0.79661	0.75787	0.75524	0.75468
	8×8	0.76700	0.75500	0.75441	0.75423
	12×12	0.76039	0.75450	0.75422	0.75412
	16×16	0.75785	0.75431	0.75413	0.75407
	20×20	0.75661	0.75422	0.75409	0.75404
	24×24	0.75589	0.75416	0.75406	0.75403

* Armenakas et al.

ある。ここで、spline 次数 $k-1 = 4$ 、要素分割 $M_x \times M_r = 12 \times 12$ 、厚さ - 半径比 h/R は、極薄厚の 0.005、中等厚肉の 0.6 およびかなり厚肉の 1.2 を採用し、仮想剛性パラメータは、 10^2 から 10^{10} まで変化させている。

これより、仮想剛性パラメータの値の増大にともない、振動数の値は下からの収束状態を示しており、厚さ - 半径比 $h/R = 0.05$ であれば仮想剛性パラメータの値が 10^8 、厚さ - 半径比 h/R が 0.6 と 1.2 の場合には 10^6 を用いれば、1 次から 5 次までの振動数パラメータ Ω^{**} に変化が見られなくなる。また、長さ - 半径比 L/R 、円周方向の波数 n および境界条件を変えて検討を行なったが、同様の結果が得られている。したがって、仮想剛性パラメータの値は、 10^{10} を用いる。

表-3 種々の厚さ - 半径比 h/R を有する中空円筒体の振動数パラメータ Ω^* の収束性に与える不等分割要素 ($M_x \neq M_r$) の影響: $L/R = 1$, $k-1 = 4$, $n = 1$, 1st symmetric mode in the axial direction (S1), S-S

M_x	M_r	DOF	h/R					
			0.05	0.2	0.6	1	1.4	1.8
4	4	192	0.023039	0.10704	0.45678	0.86589	0.88318	0.88199
12	12	768	0.023039	0.10704	0.45678	0.86589	0.88318	0.88196
20	20	1728	0.023039	0.10704	0.45678	0.86589	0.88318	0.88196
10	4	336	0.023039	0.10704	0.45678	0.86589	0.88318	0.88199
10	8	504	0.023039	0.10704	0.45678	0.86589	0.88318	0.88197
10	12	672	0.023039	0.10704	0.45678	0.86589	0.88318	0.88196
10	16	840	0.023039	0.10704	0.45678	0.86589	0.88318	0.88196
Exact ⁽¹⁰⁾			0.02304	0.10704	0.45679	0.86589	0.88318	0.88197

* Armenakas et al.

表-4 境界条件が S-S および C-F である中空円筒体の振動数パラメータ Ω^{**} の収束性に与える要素分割数の影響: $h/R = 1.2$, $L/R = 4$, $k-1 = 4$

Boundary conditions	n	$M_x \times M_r$	Modes								
			1st	2nd	3rd	4th	5th	6th	7th	8th	9th
S-S	0	16x16	1.9122	2.8376	3.1271	3.6271	4.4214	4.4475	4.6365	5.1446	5.7481
		24x24	1.9122	2.8376	3.1271	3.6271	4.4214	4.4475	4.6365	5.1446	5.7481
	2	16x16	1.8591	2.5385	3.0093	3.4382	3.5707	4.1923	4.5201	4.7160	5.0605
		24x24	1.8591	2.5385	3.0093	3.4382	3.5707	4.1923	4.5201	4.7160	5.0605
	6	16x16	6.7934	6.9584	7.3016	7.5012	7.6485	7.8217	8.0302	8.4903	8.5670
		24x24	6.7934	6.9584	7.3016	7.5013	7.6486	7.8217	8.0303	8.4903	8.5670
C-F	0	16x16	1.0251	2.6160	2.6835	3.2960	3.5035	3.8967	4.7396	5.0189	5.3684
		24x24	1.0251	2.6160	2.6835	3.2960	3.5034	3.8967	4.7394	5.0189	5.3682
	2	16x16	1.7145	1.9620	2.7279	3.2481	3.8474	4.0604	4.3225	4.5224	4.9998
		24x24	1.7145	1.9620	2.7279	3.2481	3.8473	4.0604	4.3225	4.5223	4.9997
	6	16x16	6.2391	6.7891	6.9535	7.2767	7.6655	7.7374	8.1471	8.3213	8.8004
		24x24	6.2391	6.7891	6.9535	7.2766	7.6654	7.7374	8.1470	8.3212	8.8002

表-5 境界条件が S-S および C-F である中空円筒体の高次の振動数パラメータ Ω^{**} の収束性に与える要素分割数の影響: $h/R = 1.2$, $L/R = 4$, $k-1 = 4$

Boundary conditions	n	$M_x \times M_r$	Modes						
			10th	20th	30th	40th	50th	70th	100th
S-S	0	16x16	6.0717	8.5369	10.609	12.722	14.220	17.233	21.503
		24x24	6.0717	8.5369	10.609	12.722	14.220	17.095	21.065
		32x32	6.0717	8.5369	10.609	12.722	14.220	17.095	21.014
	2	16x16	5.3717	7.5425	9.4049	10.520	11.759	13.807	16.586
		24x24	5.3717	7.5425	9.4049	10.520	11.746	13.807	16.551
		32x32	5.3717	7.5425	9.4049	10.520	11.745	13.807	16.551
C-F	0	16x16	9.2182	11.733	13.215	14.638	15.790	17.923	20.098
		24x24	9.2182	11.733	13.215	14.637	15.735	17.901	19.947
		32x32	9.2182	11.733	13.215	14.637	15.734	17.901	19.947
	2	16x16	5.9053	8.5683	10.708	12.693	14.272	17.396	21.681
		24x24	5.9051	8.5676	10.705	12.692	14.268	17.214	21.073
		32x32	5.9049	8.5675	10.705	12.692	14.268	17.213	21.064
C-F	2	16x16	5.2409	7.4298	8.9919	10.239	11.666	13.589	16.509
		24x24	5.2409	7.4297	8.9918	10.238	11.664	13.577	16.274
		32x32	5.2409	7.4297	8.9918	10.238	11.664	13.577	16.270
	6	16x16	9.0029	11.632	13.276	14.363	15.770	17.774	20.045
		24x24	9.0029	11.631	13.275	14.357	15.751	17.718	19.845
		32x32	9.0029	11.631	13.275	14.357	15.751	17.717	19.841

3.2 本手法の解の収束性

表-2 には、境界条件が S-S および C-C である中空円筒体 ($L/R=1$) の振動数パラメータ $\Omega^* = (\omega h / \pi)(\rho / G)^{1/2}$ ($n=1$, 対称一次モード S1) の収束性に与える spline 次数 $k-1$ と等分割要素の影響が示してある。ここで、厚さ - 半径比 $h/R=0.8$ であり、spline 次数 $k-1$ は、1 から 4 次まで変化させ、要素分割数は 4 から 24 まで変化させている。また、解の収束判定のために Armenakas らの厳密解¹⁰⁾ (Exact) も示してある。

これより、線形の形状関数を有する有限レイヤー要素と同じ多項式の次数である 1 次の B-spline を用いた場合、要素分割数を増大させても解は若干ではあるが、剛な結果を示している。この原因は、1 次の B-spline では導関数の連続性が保証されず、ひずみ場が不連続になるためである。よって、B-spline の利点を生かすためには、spline 次数 $k-1$ を 2 以上に取る必要がある。2 次の B-spline を採用した場合には、振動数パラメータ Ω^* は要素分割数の増大にともない S-S では有効数字 5 桁、C-C では 4 桁で安定した収束状態を示している。さらに、高次である 4 次の B-spline を採用すれば、少ない分割数で収束値が得られている。

以後の数値計算例では、spline 次数 $k-1=4$ を用いる。

表-3 には、境界条件が S-S であり、種々の厚さ - 半径比 h/R を有する中空円筒体 ($L/R=1$) の振動数パラメータ $\Omega^* = (\omega h / \pi)(\rho / G)^{1/2}$ ($n=1$, 対称一次モード S1) の収束性に与える不等分割要素 ($M_x \neq M_r$) の影響が示してある。ここで、厚さ - 半径比 h/R は 0.05 から 1.8 まで変化させている。また、要素分割は軸方向の要素分割数 M_x を 10 で固定し、半径方向の要素分割数 M_r を 4 から 20 まで変化させている。また、比較のために等分割要素 ($M_x = M_r$) の結果および Armenakas らの厳密解¹⁰⁾ (Exact) も示してある。

これより、振動数パラメータ Ω^* は、厚さ - 半径比 h/R および要素分割のパターンに関わらず、要素分割数を増大させれば、有効数字 5 桁で安定した収束状態を示している。また、本手法の解の収束性に与える不等分割要素 ($M_x \neq M_r$) の影響としては、厚さ - 半径比 h/R が 1 より小さな場合は、 $M_x > M_r$ を、 h/R が 1 以上の場合には、 $M_x \leq M_r$ を用いれば、等分割要素 ($M_x = M_r$) と比較してかなり少ない自由度で収束値が得られる。

表-4、表-5 には、それぞれ、境界条件が S-S および C-F である中空円筒体 ($h/R=1.2$, $L/R=4$) の高次までの振動数パラメータ $\Omega^{**} = \omega R (\rho / G)^{1/2}$ の収束性に与える要素分割数の影響が示してある。ここで、要素分割数 ($M_x = M_r$) は 4 から 24 まで変化させ、1 次から 100 次までの振動数に着目し、解の収束性について検討を行なった。

これより、本手法は、境界条件に関わらず、要素分割数 24×24 を用いれば、各円周方向の波数 n に対して 100 次程度までの振動数パラメータ Ω^{**} の安定した収束状態が得られている。したがって、本手法は、高次振動解析にも十分適用が可能である。

表-6 中空円筒体の振動数パラメータ Ω^* の精度比較：

$L/R=1$, $k-1=4$, $M_x \times M_r = 10 \times 10$, $n=1$,
1st symmetric mode in the axial direction (S1), S-S

h/R	n	Present	Armenakas et al. ¹⁰⁾	Soldatos and Hadjigeorgi ¹¹⁾	Loy and Lam ¹⁹⁾
		10x10	Exact	8 intertions	25 layers
0.1	1	0.047821	0.04782	0.047824	0.047822
	2	0.039726	0.03972	0.039731	0.039728
	3	0.036437	0.03643	0.036446	0.036441
	4	0.040459	0.04046	0.040471	0.040466
	5	0.050502	-	0.050515	0.050512
0.3	1	0.10704	0.10704	0.10705	0.10705
	2	0.099119	0.09912	0.099144	0.099131
	3	0.10782	0.10782	0.10785	0.10784
	4	0.13409	0.13409	0.13412	0.13412
	5	0.17228	-	0.17231	0.17233
1	1	0.86589	0.86589	-	-
	2	0.91152	0.91153	-	-
	3	1.0603	1.0603	-	-
	4	1.2473	1.2473	-	-
	5	1.4374	-	-	-

表-7 中空円筒体の振動数パラメータ Ω^{**} の精度比較：

$h/R=1.4$, $k-1=4$, $M_x \times M_r = 16 \times 16$,
 $n=0$ for longitudinal / radial mode, F-F

L/R	Method	Modes				
		1	2	3	4	5
1	Present	3.0858	7.2372	7.8200	8.9145	9.5722
	Ritz ^{*24)}	3.0857	7.2374	7.8204	8.9148	9.5725
	Ritz ^{**26)}	S 3.0858	7.2372	7.8200	8.9145	9.5722
	Finite element ¹⁶⁾	3.0874	7.2457	7.8345	8.9372	9.7051
	Series	3.0858	7.2403	7.7678	8.9165	9.5815
	Present	1.7884	5.3167	6.7194	9.6715	9.8672
	Ritz [*]	1.7883	5.3169	6.7195	9.6718	
	Ritz ^{**}	A 1.7884	5.3168	6.7194	9.6715	
	Finite element	1.7899	5.3276	6.7422	9.7096	
	Series	1.7887	5.3203	6.7203	9.6718	
10	Present	0.8552	2.3271	2.7954	3.0913	3.4225
	Ritz [*]	0.8551	2.3270	2.7953	3.0911	3.4223
	Ritz ^{**}	S 0.8551	2.3271	2.7953	3.0911	3.4224
	Finite element	0.8551	2.3282	2.8035	3.0983	3.4340
	Series	0.8551	2.3276	2.7987	3.0955	3.4224
	Present	1.6646	2.7274	2.8246	3.3407	3.4993
	Ritz [*]	1.6646	2.7274	2.8245	3.3405	
	Ritz ^{**}	A 1.6646	2.7275	2.8246	3.3407	
	Finite element	1.6646	2.7314	2.8327	3.3512	
	Series	1.6646	2.7273	2.8303	3.3420	

* Chebyshev polynomial series, ** Simple algebraic polynomials

3.3 本手法で求めた振動数の解析精度

表-6 には、相対する 2 面が単純支持 (S-S) された厚肉中空円筒体 ($L/R=1$) の振動数パラメータ $\Omega^* = (\omega h / \pi)(\rho / G)^{1/2}$ ($n=1$, 対称一次モード S1) の精度比較が示してある。ここで、要素分割数は等分割 $M_x \times M_r = 10 \times 10$ を採用し、厚さ - 半径比 h/R は 0.1 から 1 まで変化させている。ま

表-8 中空円筒体の振動数パラメータ Ω^{**} の精度比較: $h/R=2/3$, $k-1=4$, $M_x \times M_r = 16 \times 16$, C-C

n	Modes	L/R=4				L/R=8			
		Present		Ritz ²⁰⁾		Present		Ritz	
		S		A		S		A	
0	1	2.3124	2.3123	1.6955	1.6949	1.6439	1.6432	0.8512	0.8508
	2	2.8807	2.8798	2.5610	2.5607	2.2849	2.2847	2.1218	2.1214
	3	3.6523	3.6514	3.5895	3.5883	2.4042	2.4041	2.3957	2.3954
	4	4.4174	4.4161	5.2182	5.2166	2.5800	2.5794	2.7300	2.7288
	5	6.2341	6.2327	5.4116	5.4104	3.1110	3.1093	2.9277	2.9269
1	1	0.8157	0.8155	1.6112	1.6109	0.3397	0.3395	0.7057	0.7054
	2	2.5310	2.5304	2.1301	2.1297	1.1342	1.1338	1.5345	1.5343
	3	2.8949	2.8947	3.3635	3.3630	1.9883	1.9880	1.6323	1.6318
	4	3.4643	3.4640	3.4768	3.4760	2.0938	2.0930	2.4491	2.4485
	5	4.3042	4.3033	4.4827	4.4826	2.8779	2.8775	2.5362	2.5355
2	1	1.2398	1.2396	1.8293	1.8288	1.0289	1.0288	1.1749	1.1747
	2	2.6416	2.6409	3.0646	3.0645	1.4290	1.4286	1.7655	1.7648
	3	3.7998	3.7995	3.5654	3.5645	2.1570	2.1562	2.5806	2.5797
	4	4.5131	4.5122	4.4684	4.4679	2.9912	2.9908	2.7847	2.7846
	5	4.5570	4.5569	5.2468	5.2467	3.0806	3.0797	3.3502	3.3500

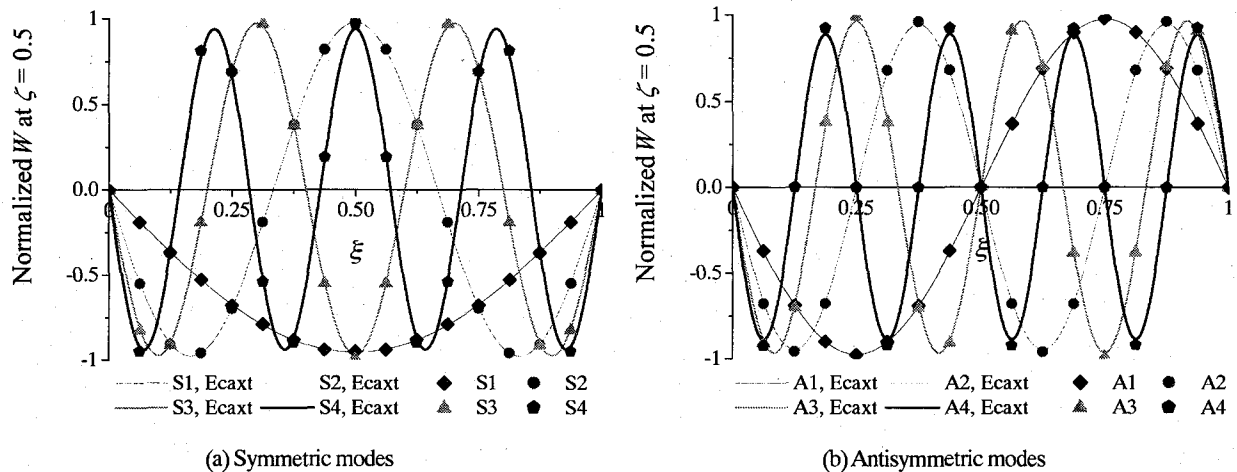


図-3 半径方向変位 W の軸方向振動モードの精度比較: $h/R=1.2$, $L/R=4$, $n=1$, $\zeta=0.5$, $k-1=4$, $M_x \times M_r = 16$, S-S

た, 解の比較のために Armenakas らの厳密解¹⁰⁾(Exact), Soldatos・Hadjigeorgiou の反復法 (8 fictitious layers) による厳密解¹¹⁾および Loy・Lam の有限レイヤー法 (FLM, 25 layers) による数値解¹⁹⁾も示してある。

これより, Soldatos・Hadjigeorgiou の解および Loy・Lam の数値解は, 厚さ - 半径比 h/R および円周方向の波数 n の増大にともない 5 桁目で Armenakas らの厳密解と若干の差異が見られるが, 本手法による結果は, 厚さ - 半径比や円周方向の波数 n に関わらず厳密解とよく一致した結果が得られている。

以後の数値計算例では, 解析精度を高めるために要素分割数 $M_x \times M_r = 16 \times 16$ を用いる。

表-7 には, 相対する 2 面が自由 (F-F) な厚肉中空円筒体 ($h/R=1.4$) の振動数パラメータ $\Omega^{**} = \omega R_0 (\rho / G)^{1/2}$ ($n=0$ for longitudinal/radial mode) の精度比較が示してある。ここで, 長さ - 半径比 L/R は, 1 と 10 に設定している。また, 比較のために Hutchinson・El-Azhari の級数解法 (Series) によ

る解析解¹⁴⁾, Gladwell・Vijay の有限要素法 (Finite element) による数値解¹⁶⁾, So・Leissa の単純多項式を振幅変位に用いた Ritz 法 (Ritz*) による数値解²⁴⁾および Zhou らの Chebyshev 級数を振幅変位に用いた Ritz 法 (Ritz**) による数値解²⁶⁾も示してある。

これより, 本手法により求めた解は, So・Leissa および Zhou らの Ritz 法による結果とよく一致しており, また, 他の解析解および数値解ともよく似た結果が得られている。

次に, 研究報告例が非常に少ない相対する 2 面が固定された中空円筒体の振動数の精度比較について示す。

表-8 には, 相対する 2 面が固定 (C-C) された厚肉中空円筒体 ($h/R=2/3$) の振動数パラメータ $\Omega^{**} = \omega R_0 (\rho / G)^{1/2}$ の精度比較が示してある。ここで, 長さ - 半径比 $L/R=4$ と 8 としている。また, 比較のために Zhou らの Chebyshev 級数を振幅変位に用いた Ritz 法 (Ritz) による数値解²⁶⁾も示してある。

表-9 中空円筒体の振動特性に与える厚さ - 半径比 h/R と円周方向波数 n の影響 :

$L/R=4, k-1=4, M_x \times M_r = 16 \times 16, \Omega^{**} = \omega R_0(\rho/G)^{1/2}, C-C$

n	Modes	h/R									
		0.01		0.4		0.8		1.2		1.6	
		S	A	S	A	S	A	S	A	S	A
0	1	1.5841	1.2183	2.0123	1.5097	2.4771	1.7864	3.0133	2.0545	3.4961	2.3180
	2	1.6160	1.6089	2.3364	2.1675	3.1264	2.7631	3.8002	3.3486	4.4023	3.7636
	3	1.6258	1.6205	3.2197	2.8309	3.8610	3.9064	4.5035	4.6155	5.1172	4.8020
	4	1.6529	1.6348	3.4957	4.1614	4.7997	5.5286	5.7147	5.2483	6.2685	5.6786
	5	1.6956	1.6954	4.9668	4.8285	6.6469	5.7481	6.5670	6.2261	6.9696	6.8239
1	1	0.5200	0.9741	0.6824	1.3351	0.8836	1.7368	1.0805	2.0742	1.2633	2.3788
	2	1.2912	1.4335	2.0196	1.8780	2.7515	2.2617	3.0894	2.6596	3.1315	3.0168
	3	1.5080	1.5242	2.6646	2.6779	2.9769	3.5157	3.3347	3.7804	3.8575	3.9960
	4	1.5731	1.5634	3.1347	3.1295	3.6163	3.7479	4.0736	4.5380	4.5106	5.2238
	5	1.6244	1.6030	3.4123	4.0177	4.4967	4.6974	4.9005	5.2892	5.2435	5.4006
2	1	0.2926	0.5946	0.8086	1.3129	1.4440	2.0532	2.0157	2.6282	2.4764	3.0543
	2	0.8899	1.3639	1.9804	2.6747	2.9119	3.2225	3.5926	3.5970	4.1228	3.8608
	3	1.1128	1.4867	3.3907	2.7890	3.9667	3.8928	4.2187	4.6372	4.4548	5.0440
	4	1.2637	1.6103	3.5233	4.0833	4.5745	4.6051	4.8047	4.9245	5.1770	5.5253
	5	1.4334	2.0789	4.4191	4.3121	4.9030	5.3838	5.6417	5.8446	6.1075	6.3002
3	1	0.1804	0.3901	1.6182	1.9565	2.7937	3.1647	3.5370	3.8611	3.7596	4.0961
	2	0.6214	0.8345	2.4818	3.1326	3.7629	4.3160	4.5055	4.6092	4.8850	4.7817
	3	1.0109	1.1484	3.8612	3.8111	4.9322	4.5702	5.3602	5.3886	5.6434	5.9117
	4	1.2543	1.3392	4.3057	4.6432	5.4475	5.6169	6.0308	6.0708	6.3138	6.4398
	5	1.4173	1.5128	5.4507	4.9256	5.9285	6.3568	6.3968	6.7150	7.0687	7.2026
4	1	0.1362	0.2795	2.6688	2.9221	4.2035	4.4588	4.7616	4.9932	4.8336	5.1142
	2	0.4564	0.6377	3.3325	3.8737	4.8888	5.3992	5.4684	5.6184	5.7201	5.7269
	3	0.8064	0.9537	4.5129	4.9332	5.9161	5.5495	6.2696	6.1859	6.5079	6.5979
	4	1.0783	1.1849	5.3019	5.2265	6.2582	6.5514	7.0450	7.0173	7.5976	7.3620
	5	1.2851	1.4029	5.9877	5.8189	7.1819	7.0757	7.6035	7.9456	7.8242	8.3435
5	1	0.1424	0.2310	3.8161	4.0201	5.5074	5.7003	5.8192	6.0255	5.8523	6.1137
	2	0.3620	0.5098	4.3542	4.8056	6.0312	6.4610	6.4142	6.6310	6.6124	6.7095
	3	0.6591	0.8004	5.3555	5.9779	6.9108	6.5971	7.1735	7.0179	7.3774	7.3627
	4	0.9291	1.0462	6.3608	6.0852	7.1654	7.4780	7.7673	7.8620	8.2789	8.1905
	5	1.1611	1.2966	6.6807	6.7918	8.1200	7.8689	8.6160	8.6252	9.0259	9.2921

表-10 中空円筒体のねじり振動モードに与える厚さ - 半径比 h/R の影響 :

$n=0, L/R=4, k-1=4, M_x \times M_r = 16 \times 16, \Omega^{**} = \omega R_0(\rho/G)^{1/2}, C-C$

Modes	h/R									
	0.01		0.4		0.8		1.2		1.6	
	S	A	S	A	S	A	S	A	S	A
1	0.7893	1.5787	0.9425	1.8850	1.0996	2.1991	1.2566	2.5133	1.4137	2.8274
2	2.3680	3.1573	2.8274	3.7699	3.2987	4.3982	3.7699	5.0265	4.2412	5.6549
3	3.9466	4.7360	4.7124	5.6549	5.4978	6.5463	5.4663	5.8837	5.3363	5.8713
4	5.5254	6.3150	6.5974	7.5403	6.2632	6.5974	6.2832	7.3190	6.6682	7.6456
5	7.1054	7.8982	8.4840	9.4307	6.9928	7.5738	6.5202	7.5398	7.0686	8.4823

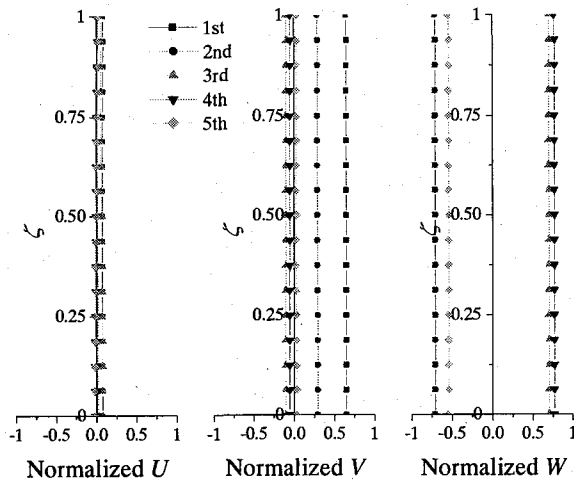
これより, 本手法により求めた解は, 長さ - 半径比 L/R に関わらず, Zhou らの Ritz 法による結果と誤差 1% 以内でよく一致した結果が得られている。

3.4 本手法で求めた振動モードの精度

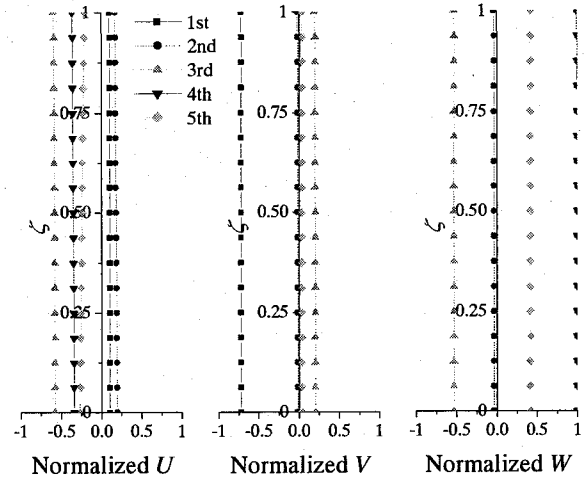
本手法は, 有限レイヤー法とは異なり, 軸方向にも離散化をしているため, 軸方向の振動モードの精度も重要になってくる。ここでは, 中空円筒体における半径方向変位 W の軸方向振動モードの精度比較について示す。

図-3 には, 相対する 2 面が単純支持された中空円筒体 ($h/R=0.8, L/R=4$) での変位 W の軸方向振動モード ($n=1, \xi=0.5$) の精度比較が示してある。ここで, モード形状は対称(S)および逆対称(A)モードに分けて示している。なお, S または A に添えた数字は, モード次数である。また, 振動モードの精度については, 厳密解や有限レイヤー法の半径方向の振幅変位に用いられているはりの固有関数と比較を行なった。

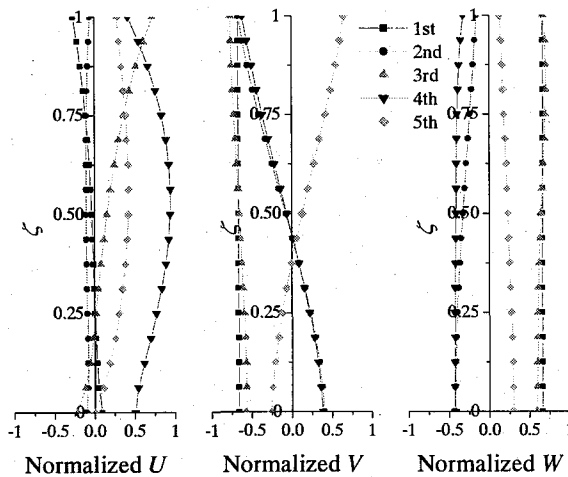
$$W(\xi) = A \sin(m\pi\xi) \quad m=1, 2, \dots, \infty \quad (33)$$



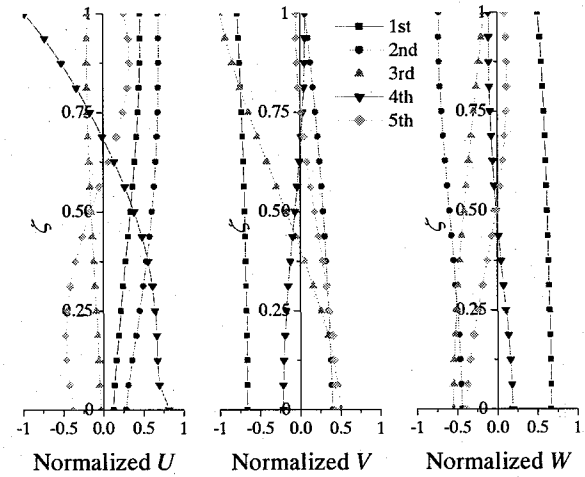
(a) $h/R = 0.01$, Symmetric mode in the axial direction



(b) $h/R = 0.01$, Antisymmetric mode in the axial direction



(c) $h/R = 1.6$, Symmetric mode in the axial direction



(d) $h/R = 1.6$, Antisymmetric mode in the axial direction

図-4 中空円筒体の厚さ方向のモード分布特性に与える厚さ - 半径比 h/R の影響：

$L/R = 4$, $n = 1$, $\xi = 0.25$, $k - 1 = 4$, $M_x \times M_r = 16 \times 16$, C-C

ここで、 A は未定振幅係数である。

これより、本手法は、対称(S)および逆対称(A)モードに対して、それぞれ、4次モード程度まで厳密解(Exact)とよく一致した結果が得られている。

今回、 U および V に関しては割愛したが、 W と同様の精度で、 U は余弦関数 $\cos(m\pi\xi)$ 、 V は正弦関数 $\sin(m\pi\xi)$ を表す結果が得られていることを確認している。また、さらに高次の振動モードの精度を確保するためには、要素分割数を増大させればよい。

3.5 相対する2面が固定された中空円筒体の振動特性に与える厚さ - 半径比、長さ - 半径比や円周方向の波数の影響

既往の研究報告では、相対する2面が固定された中空円筒体を取り扱ったものが非常に少ない。ここでは、境界条件がC-Cである中空円筒体の振動特性に与える幾何パラメータや円周方向の波数の影響について検討する。

表-9には、中空円筒体の振動特性に与える円周方向波数 n および厚さ - 半径比 h/R の影響が示してある。こ

で、厚さ - 半径比 h/R は、かなり薄い0.01から極厚である1.6まで変化させている。

これより、厚さ - 半径比 h/R が小さな中空円筒体($h/R = 0.01$)の対称一次(S1)モードの場合、円周方向波数 n の増大にともない $n = 4$ を最小値とした放物線型の変動性状であるが、 $0 \leq n \leq 5$ の範囲での逆対称一次(A1)モードの場合には、 $n = 5$ が最小の振動数になる。また、振動次数の増大にともない円周方向波数 n に対して変動に規則性が見られなくなる。一方、厚さ - 半径比 h/R が大きな中空円筒体($h/R \geq 0.4$)では、対称(S)および逆対称(A)モードやその次数に関わらず、 $n = 1$ を最小値とし、ほぼ直線的に増加する。したがって、低次の振動モードは、曲げ振動が支配的になる。

表-10には、中空円筒体のねじり振動モードに与える円周方向波数 n および厚さ - 半径比 h/R の影響が示してある。ここで、採用している厚さ - 半径比 h/R は、表-9と同様である。

これより、対称(S)モードでは、1および2次モードは厚さ - 半径比 h/R の増大にともない直線的に増加するが、

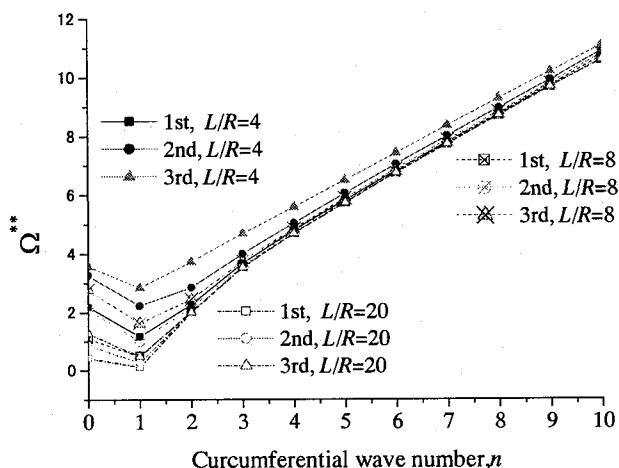


図-5 中空円筒体の振動特性に与える円周方向波数 n および長さ - 半径比 L/R の影響: $h/R=1.4$, $k-1=4$, $M_x \times M_r = 16 \times 16$, C-C

3次モードでは厚さ - 半径比 $h/R=0.8$ をピークに減少する傾向にある。さらに、4と5次モードでは厚さ - 半径比 $h/R=0.4$ をピークに、そこからは放物線を描くように変動する。なお、逆対称(A)モードの場合でも、対称(S)モードとほぼ同様な変動の傾向が示されている。

図-4には、相対する2面が固定された中空円筒体の厚さ方向の振動モード分布に与える厚さ - 半径比 h/R の影響が示してある。ここで、厚さ - 半径比 h/R はかなり薄い0.01と極厚の1.6としている。

これより、厚さ - 半径比 h/R が小さければ U, V および W の厚さ方向分布は、Loveの第一近似仮定に基づく古典シェル理論と同様な一定分布を示しているが、厚さ - 半径比 h/R がかなり大きくなると、 U と V に関しては曲線的な分布性状を示している。また、 W に関しても厚さ方向に一定分布を示さなくなり、曲線分布を示している。したがって、厚肉の中空円筒体の自由振動解析には、3次元弾性論を用いる必要がある。

図-5には、中空円筒体の振動特性に与える円周方向波数 n および長さ - 半径比 L/R の影響が示してある。ここで、厚さ - 半径比 h/R は1.4とし、長さ - 半径比 L/R は4から20まで変化させている。ただし、axisymmetric mode ($n=0$)では、longitudinal/radial modeを対象としている。

これより、長さ - 半径比 L/R が大きな場合と比較して長さ - 半径比 L/R が小さい場合の方が振動数の値は大きくなっている。また、長さ - 半径比 L/R が8以上になると、円周方向波数 n が4以上であれば、振動回数に関わらず振動数に差が見られなくなる。さらに、円周方向波数 n の影響としては、長さ - 半径比 L/R に関わらず、円周方向波数 n が増大すれば、振動数は線形的に増加する。ただし、axisymmetric mode ($n=0$)は、長さ - 半径比 L/R が大きいと、breathing mode ($n \geq 2$)よりも低次に現れてくる。

4. あとがき

本論文では、相対する2面で任意の境界条件を取り扱い、薄肉から厚肉までの中空円筒体の統一的な解析が行なえる3次元弾性論に基づくB-spline円筒リング法(BSCRM)を定式化した。本手法を中空円筒体の3次元自由振動解析に適用し、解の収束性や精度比較について検討を行い、本手法の有用性について検討した。また、厳密な解を得ることが困難な固定面を有する中空円筒体の振動特性に与える円周方向の波数 n 、厚さ - 半径比 h/R や長さ - 半径比 L/R の影響について明らかにしている。

本論文で得られた結果を取りまとめると、以下のとおりである。

- (1) 本手法は、spline 次数 $k-1=4$ を採用し等要素分割 ($M_x = M_r$) を用いれば、幾何パラメータに関わらず、相対する2面で任意の境界条件を有する中空円筒体の振動数パラメータの一定値への安定した収束状態が得られる。
- (2) 本手法は、spline 次数 $k-1=4$ を用いて不等分割要素 ($M_x \neq M_r$) を採用すると、厚さ - 半径比 $h/R < 1$ であれば $M_x > M_r$ を、 $h/R \leq 1$ の場合には $M_x \leq M_r$ を用いることによって、等分割要素 ($M_x = M_r$) と比較して少ない自由度で収束値が得られる。
- (3) 本手法により求めた振動数パラメータの収束値は、Armenakasらの厳密解と一致しており、また、他の数値解や解析解ともよく一致している。また、振動モードに対しても高い精度を有する。
- (4) 中空円筒体の振動特性に与える厚さ - 半径比 h/R の影響は、中空円筒体の厚さが薄いと振動数は、円周方向波数 n の増大にともない放物線を描くように変動するが、厚さが大きな場合、振動数は、円周方向波数 n の増大にともないほぼ直線的に増加する。
- (5) 中空円筒体の厚さ方向の振動モード分布は、薄肉の場合には、 U, V および W ともに一定分布をなすが、厚肉になると U, V のみでなく W も厚さ方向に曲線分布を示す。
- (6) 厚肉中空円筒体の振動数は、長さ - 半径比 L/R に関わらず、円周方向の波数 n の増大にともない直線的に増加する。

最後に、本論文で示した表の振動数パラメータの値は、有限要素解析など種々の数値解析のベンチマークテストに使って頂ければ幸いである。

今後、軸方向に変厚や変断面を有する中空円筒体や円筒中実体の自由振動問題や流体 - 構造関連問題への本手法の適用性について検討して行きたい。

謝辞：本論文に関する貴重なご意見およびご指摘を頂きました査読者に対して、感謝の意を表します。

参考文献

- 1) Love, A. E. H. : A treatise on the mathematical theory of elasticity, Cambridge: Cambridge University Press, fourth edition, 1952.
- 2) Flugge, W. : Stresses in shells, Springer, Berlin, 1960.
- 3) Donnell, L. H. : Stability of thin walled tubes in torsion, NACA, Report, 479, 1933
- 4) Sanders, J. L. : An improved first-approximation theory for thin shells, NASA, Technical report, R-24, 1959.
- 5) Vlasov, V. Z. : General theory of shells and its applications in engineering, NASA, TFT-99, Washington, D. C., 1964.
- 6) Bhimaraddi, A.: A higher order theory for free vibration analysis of circular cylindrical shells, *International Journal of Solid and Structures*, **20**, pp.623-630, 1984.
- 7) Reddy, J. N. and Liu, C. F. : A higher-order shear deformation theory of laminated elastic shells, *International Journal of Engineering Sciences*, **23**, pp.319-330, 1985.
- 8) Reddy, J. N. : On refined computational models of composite laminates, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, **27**, pp.361-382, 1989.
- 9) Gazis, D. C. : Three-dimensional investigation of the propagation of wave in hollow circular cylinders. I. Analytical foundation, *The Journal of the Acoustical Society of America*, **31**, pp.568-573, 1959.
- 10) Armenakas, A. E. Gazis, D. S. and Herrmann, G. : Free Vibration of Circular Cylindrical Shells, Oxford: Pergamon Press, 1969.
- 11) Soldatos, R. K. and Hadjigeorgiou, V. P. : Three-dimensional solution of the free vibration problem of homogeneous isotropic cylindrical shells and panels, *Journal of Sound and Vibration*, **137**, pp.369-384, 1990.
- 12) McMahon, G. W. : Finite-difference analysis of the vibrations of solid cylinders, *The Journal of the Acoustical Society of America*, **48**, pp.307-312, 1970.
- 13) Hutchinson, J. R. : Vibrations of solid cylinders, *Journal of Applied Mechanics*, **47**, pp.901-907, 1980.
- 14) Hutchinson, J. R. and El-Azhari, S. A. : Vibrations of free hollow circular cylinders, *Journal of Applied Mechanics*, **53**, pp.641-651, 1986.
- 15) Gladwell, G. M. L. and Tahbaldar, U. C. : Finite element analysis of the axisymmetric vibrations of cylinders, *Journal of Sound and Vibration*, **22**, pp.143-157, 1972.
- 16) Gladwell, G. M. L. and Vijay, D. K. : Natural frequencies of free finite-length circular cylinders, *Journal of Sound and Vibration*, **42**, pp.387-397, 1975.
- 17) Buchanan, G. R. and Yui, C. B. K. : Effect of symmetrical boundary conditions on the vibration of thick hollow cylinders, *Applied Acoustics*, **63**, pp.547-566, 2002.
- 18) Cheung, Y. K. and Wu, C. I. : Free vibrations of thick, layered cylinders having finite length with various boundary conditions, *Journal of Sound and Vibration*, **24**, pp.189-200, 1972.
- 19) Loy, C. T. and Lam, K. Y. : Vibration of thick cylindrical shells on the basis of three-dimensional theory of elasticity, *Journal of Sound and Vibration*, **226**, pp.719-737, 1999.
- 20) Nelson, R. B., Dong, S. B. and Kalra, R. D. : Vibrations and waves in laminated orthotropic circular cylinders, *Journal of Sound and Vibration*, **18**, pp.429-444, 1971.
- 21) Singal, R. K. and Williams, K. : A theoretical and experimental study of vibration of thick circular cylindrical shells and rings, *Journal of Vibration Acoustics Stress and Reliability in Design*, **110**, pp.533-537, 1988.
- 22) Leissa, A. W. and So, J. : Comparisons of vibration frequencies for rod and beams from one-dimensional and three-dimensional analysis, *The Journal of the Acoustical Society of America*, **98**, pp.2122-2135, 1995.
- 23) Leissa, A. W. and So, J. : Accurate vibration frequencies of circular cylinders from three-dimensional analysis, *The Journal of the Acoustical Society of America*, **98**, pp.2136-2141, 1995.
- 24) So, J. and Leissa, A. W. : Free vibrations of thick hollow circular form three-dimensional analysis, *Journal of Vibration and Acoustics*, **119**, pp.89-95, 1997.
- 25) Liew, K. M. and Hung, K. C. : Three-dimensional vibratory characteristics of solid cylinders and some remarks on simplified beam, *International Journal of Solid and Structures*, **32**, pp.3499-3513, 1995.
- 26) Zhou, D., Cheung, Y. K., Lo, S. H., and Au, F. T. K. : 3D vibration analysis of solid and hollow circular cylinders via Chebyshev-Ritz method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **192**, pp.1575-1589, 2003.
- 27) Boor, C. D.: On calculating with B-spline, *Journal of Approximation Theory*, **6**, pp.50-62, 1972.
- 28) Mizusawa, T., Kajita, T. and Naruoka, M.: Vibration of skew plates by using B-spline functions, *Journal of Sound and Vibration*, **62**, pp.301-308, 1979.
- 29) 名木野晴暢, 水澤富作 : 3次元 spline 帯板法を用いた粘弾性直交異方性厚板の振動解析と損失正接について, 応用力学論文集, Vol.6, pp.321-330, 2003.

(2005年9月10日受付)