

解析的均質化手法を用いた複合材料・構造の簡易解析と最適化

Simplified analysis and optimization of composite materials and structures
using an analytical homogenization method

王峰*, 岩熊哲夫**, 小山茂***

WANG Feng, IWAKUMA Tetsuo, KOYAMA Shigeru

*修(工) 東北大学大学院 工学研究科土木工学専攻 (〒980-8579 仙台市青葉区荒巻字青葉 6-6-06)

**PhD 東北大学大学院教授 工学研究科土木工学専攻

***博(工) 信州大学助手 工学部社会開発工学科 (〒380-8553 長野市若里 4-17-1)

Using an analytical averaging method of overall elastic moduli of composite materials based on the Mori-Tanaka theory, we construct a three dimensional finite element of composite materials. Applying this finite element to several boundary value problems, we can propose a new usage of composite materials and quantitative estimates of reinforcing effects. Moreover, taking advantage of explicit expression of the overall stiffness with respect to the micro-structures, we seek for optimized micro-structures of composites in a structure. The results suggest that this kind of analytical method can be used as a designing tool of composite materials and structures.

Key Words : *overall elastic moduli, Mori-Tanaka theory, 3D FEM, composites, optimization*

キーワード : 平均弾性係数, 森・田中理論, 3次元有限要素, 複合材料, 最適化

1. はじめに

高性能・高機能橋梁のひとつの形式として複合構造が挙げられるが, その材料に着目したとき, 特にコンクリートは繊維補強等によってさらに高性能な複合材料にする試みが多く行われている. このような複合材料は, 要求される性能に従ってその内部構造を適切に設定することによって, 性能の効率的な向上が可能になる. このような観点からコンクリートのみならず積層材のようなものも含めた複合材料の研究は盛んであり, 実際に歩道橋や道路橋の床版等で多くの実績が着実に積み重ねられつつある. 昨年には, 土木分野における複合材料の展望の出版¹⁾もなされている.

近年特に注目を集めている材料のひとつに, 上記の繊維補強コンクリートの一種の「ダクトル (商品名: わが国では太平洋セメントがライセンスを保有)」があり, 無筋で歩道橋を架設するといった実績^{2),3),4)}がある. これは鋼繊維で補強した高強度・高流動コンクリートであり, 例えば靱性の改善等が著しい. この商品の場合は, 流動性等の条件から, 含有繊維量は体積比率で2%程度であるが, もし含有率をさらに変化させることができれば, 剛性や強度の観点からは確実に高性能材料を製造できる. また繊維の向きを揃える試行もなされていると聞いているが, その場合は剛性の改善は顕著であることも分かっている.

複合構造中の複合材料部にこのような設計の自由度が増えたとすると, 複合材料の内部の微視構造の設計を, 構造物全体の巨視的な挙動を踏まえて可能にしておく必

要がある. 繊維量による剛性等の変化については, 通常の解析ツールでは実験的な剛性値を代入すれば済むかもしれない. さらに繊維の向きもコントロールしようとした場合には, 解析上の材料中の異方性の程度を変動させることで対処することができるかもしれない. しかし, 繊維あるいは母材中の分担応力を求めることはできないし, その界面挙動も検討できない. そういった観点からは, 直接, 繊維の形や量・向きを解析ツールに入力できれば, なお便利である.

標準的な有限要素法の場合, こういった内部微視構造までをメッシュでモデル化して解析することは現実的ではない. これに対し, 特異摂動法の考え方と有限要素法を組み合わせた数値的な均質化手法は, 内部の微視構造を解析に陽に取り込むことが可能な点からかなり有望なツール (例えば5),6)ではあるが, 内部構造の最適化は決して容易ではない. ある程度の誤差を容認する設計プロセスで用いることを念頭に置くと, 近似的であってもある程度解析的に微視構造を考慮できる解析ツールの方が便利であり有用性が高いであろう. そこでここでは, ひとつの解析的な均質化手法を有限要素に直接に組み込んで複合材料と構造の解析と最適化を試みる.

そういった解析的な把握に用いることができる均質化手法は, これまでも多く提案されてきているが, ここでは付録に概説した「森・田中理論⁷⁾」を用いた均質化を用いてみる. つまり, ある有限要素の材料特性, あるいはもっと具体的には, 要素の積分点の剛性が, 解析的均質化手法による無限体の平均剛性でモデル化できるもの

として有限要素を組み立てる．さらに付録の式 (I.19) にも示したように，このような方法を用いれば母材と介在物の平均応力も求めることができる．この方法については，平面ひずみ問題に適用した例^{8),9)}において，繊維量などの微視構造の確率変動による構造剛性の変動を求めるなどの有用性を示してきた．ここではそれを3次元連続体に拡張し，さらに，剛性を微視構造のパラメータで微分可能であるといった解析的手法の利点を活かして，既存の最適化手法のコードを利用して設計への適用可能性も検討する．

2. 森・田中理論に基づく平均弾性係数と有限要素への導入

母材と介在物共に等方弾性体であり，母材中に楕円体介在物が分布しているときの複合材料全体の平均弾性係数テンソル $\tilde{C}$ は，森・田中理論を用いると

$$\tilde{C} = C_M \{C_M - (1-f)(C_M - C_I)S\}^{-1} [C_M - (C_M - C_I)\{S - f(S - I)\}] \quad (1)$$

と求められる．ここに， f は介在物の体積比率であり， I は4階の単位テンソルである． C_M と C_I はそれぞれ母材と介在物の弾性係数テンソルである．また S は Eshelby のテンソル¹⁰⁾ とよばれ，母材のポアソン比 ν_M と介在物楕円体の主軸の半径比（形状比）と主軸の向きだけで決まる量である．誘導については文献¹¹⁾等にもあるので省略し，その概略を付録に示した．このように，体積比率 f と介在物の形と向きの陽な形になっているため，有限要素に組み込んだ場合に，こういった微視構造のパラメータに関する剛性の変化を少なくとも数値的には算定できる．そのため，数値的な均質化手法の場合とは異なり，確率有限要素法の適用（感度解析⁹⁾）が可能であったり，ここで示すような最適化も比較的容易になる．

上式は，例えば介在物が球体のときの平均せん断弾性係数 $\bar{\mu}$ は

$$\frac{\bar{\mu}}{\mu_M} = \frac{[(1-f)\mu_M + f\mu_I] - \beta(1-f)(\mu_M - \mu_I)}{\mu_M - \beta(1-f)(\mu_M - \mu_I)} \quad (2)$$

となる．ここに， μ_M と μ_I が母材と介在物のせん断弾性係数であり， β が Eshelby テンソルの影響を示すパラメータで $\beta \equiv \frac{2(4-5\nu_M)}{15(1-\nu_M)}$ という値である．もし上式で $\beta = 0$ と置くと，単純な体積平均で平均剛性が

$$\bar{\mu} \equiv (1-f)\mu_M + f\mu_I \quad (3)$$

と求められることになり，これには介在物の形状も局所的なつり合い式等の力学をも含んでいないモデル（Voigt モデル）になる．それを改善した平均化のひとつが式 (1) である．ただし本手法による予測は実験値の上下界のいずれかに近いと考えられており，体積比率が大きい場合には実用的ではないこともある．これに対し近年の

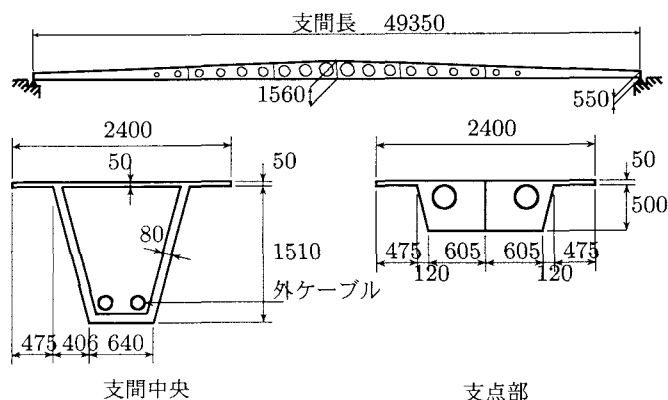


図-1 全体一般図及び断面図

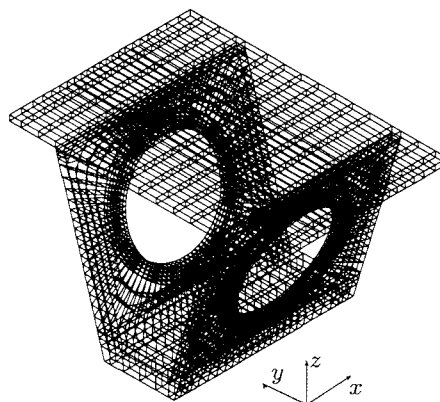


図-2 中央部から取り出した1パネルの要素分割

研究¹²⁾では，さらに具体的に介在物同士の相互作用を考慮することにより，精度の高い2次近似理論も提案されているが，複雑な式になるため，ここでは簡単のために式 (1) のモデルを用いる．

有限要素は標準的な六面体アイソパラメトリック要素を用いることにすると，要素剛性マトリクス K^e は，標準的な記号を用いると

$$K^e = \int_v (\partial\phi)^T \tilde{C} \partial\phi dV \quad (4)$$

となる．ここで ϕ は形状関数で， ∂ も標準的な微分作用素ベクトルである． $\tilde{C}$ が，森・田中理論による上式の弾性係数テンソル $\tilde{C}$ を，標準的な応力とひずみの行列の順番に合わせて行列表示したものである．なお，4階のテンソルの諸計算は，文献¹³⁾にある手法を用いて行列演算で実行している．ただし，一つの要素内には一種類の介在物しか存在しないものとしている．

3. 応力集中の緩和

3.1 解析対象領域

最初の解析例は，「はじめに」の節でも引用した「ダクトル」を用いた歩道橋の1パネルでの応力集中の解析である．酒田みらい橋²⁾は無筋でこの「ダクトル」を用いて建設された歩道橋であり，非常に薄い部材厚と低い桁高で，長スパン・大幅軽量化を実現している．その概要を図-1に示した．

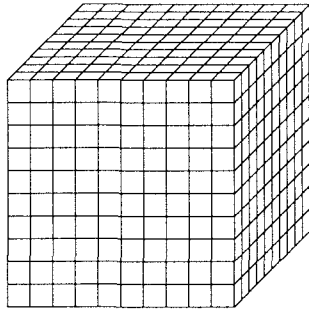


図-3 1000 要素にランダムな向きで繊維を混入

この軽量化のために空けられた孔周辺の補強効果を定量評価することにより、単純な異方モデルでは求めることができない特徴、つまり母材や繊維の応力評価の例を示す。残念ながら計算機等の制限から、全スパンを有限要素化することができなかったため、スパン中央付近の開口部を持つ幅 1.8 m の 1 パネルを取り出して 3 次元解析を行った。図-2 に、用いた 2012 個の要素分割を示した。また外力は、純曲げが作用したとして梁理論から求められるこの断面の直応力分布 σ_{xx} を、このブロックの左右両境界面に表面力として分布させた。変位の境界条件としては、断面の中立軸に最も近いウェブ上の 8 節点（4 節点 / 両端断面）を上下方向には固定し、片方の断面は水平方向にも固定、もう片方は水平方向を自由とした。

3.2 平均材料定数

なお実際の橋梁では、繊維の向きはパイプレータを用いてランダム化されている。一方本解析手法では、1 有限要素には一種類の介在物しか設定できないため、平面ひずみにおける解析⁸⁾と同様、多くの要素ごとにランダムな向きに繊維を分布させて巨視的な等方材料をモデル化することができる。材料定数は文献²⁾を参考にして、高流動高強度コンクリートに $E_M = 45$ GPa, $\nu_M = 0.2$ 、鋼繊維に $E_l = 200$ GPa, $\nu_l = 0.3$ を用いる。これを用いて Voigt のモデル式 (3) でヤング率の平均値を求めると 48.1 GPa になり、もうひとつの古典理論の Reuss の予測では 45.7 GPa となる。この二つが予測の古典的な上下界とされている。

さて、平面ひずみ問題でも行ったように、 $10 \times 10 \times 10$ の 1000 個の六面体要素からなる図-3 に示したような立方体を対象とし、それぞれの要素の繊維を乱数で発生させた任意の向きに並べた。繊維は回転楕円体介在物で近似し、その 3 つの主軸半径を a_i ($i = 1, 2, 3$) としてその比を $a_1 = a_2$, $a_3/a_1 = 50$ とした。ひとつの有限要素に含まれる繊維長軸 a_3 の向きを 3 次的にランダムに設定し、各要素の繊維の体積比率を 2% にした。この大きな立方体の表面に、一様な単位の外力あるいは変位を与えて得られる表面の平均的な応答（変位あるいは

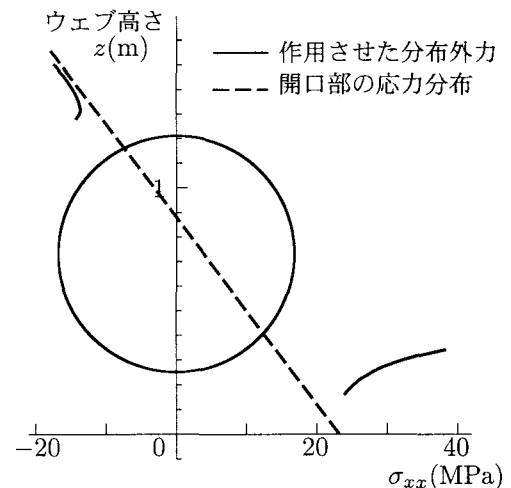


図-4 開口部の応力集中 — 全 2% 繊維ランダム分布

反力) から、ポアソン比とヤング率を求めると、0.2 と 46.3 GPa (球近似の予測式 (2) の 46.2 GPa と同じ) となって、上で示した古典的上下界の中間の値を予測した。これに対して実験値は 50 GPa と上界も越えてしまっているが、本手法による解析的な予測値 46.3 GPa は工学的には許容できる近似であろう。

実際には図-2 の各有限要素ごとに等方な性質を持つように設定しなければならないのであるが、図-2 から明らかなように、さらに要素を細分化してこれ以上の要素数を対象領域内に設定することは困難であったため、まずすべての要素は、既に繊維がランダムに 2% 含まれた普通の等方材料として設定することにした。すなわち、文献²⁾等において実験から得られている値の方を用いて、ヤング率を $E = 50$ GPa、ポアソン比を $\nu = 0.2$ とした等方材料に設定した。

3.3 応力集中の様子

まず、すべてが 2% の繊維補強等方材料の場合の 3 次元有限要素解析のウェブ部分のみの応力分布を図-4 に示した。破線で示したのが、端部に作用させた表面力の分布である。通常の繊維補強コンクリートの強度の二倍程度の応力 (20 MPa) を作用させていることになるが、ここでは群集荷重 (5 kN/m²) を外ケーブル無しで対象例とした単純桁に載せた場合を想定したため現実的ではなくなっている。ただ弾性計算なので、荷重を約半分にして強度以下に抑えても以下の結果は同じなので、このまま解析した。この与えた外力分布と比較して明らかなように、開口部の下縁近傍の引張部分で応力集中が生じている。この集中係数は約 1.6 であった。それに対して、開口部の上縁近傍の圧縮部分でも応力集中は生じているが、引張り側程は顕著ではない。

そこで、施工上はかなり困難ではあるが、引張り側の応力集中を緩和するために、図-5 の斜線を引いた部分のみに、さらに鋼繊維を導入して補強することを

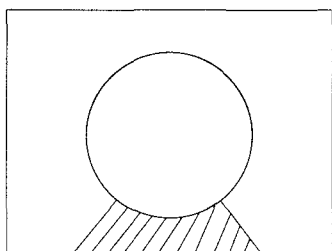


図-5 水平方向の繊維で補強する開口部の部位

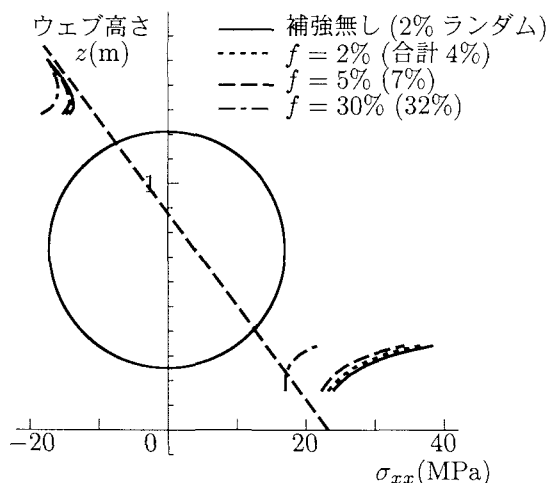


図-6 補強後の応力分布

試みる。ただし先に述べたように、すべての要素には既に2%の繊維が導入された材料定数を用いているため、

「等方繊維補強材」が「母材」になり、そこにさらに鋼繊維を導入するようなシミュレーションになってしまっていることに注意して欲しい。また繊維をランダムに分布させると、その部分は剛性が高くなった等方弾性体になるだけなので、その補強効果は単に剛性の改善度に比例するだけである。したがって、これは施工はほぼ不可能ではあるが、引張りの応力集中の緩和を目的としていることから、さらに加える介在物の向きはすべて橋軸方向（水平 x 軸方向）とした。鋼繊維介在物については、そのヤング率を $E_f = 210 \text{ GPa}$ とし、ポアソン比を $\nu_f = 0.2$ とする。この介在物となる鋼繊維の半径（3主軸は座標軸方向を向いているとして、 a_x を橋軸 x 方向の半径とする）は、楕円体で近似されていることから、その3主軸の半径比を $a_z = a_y$ 、 $a_x/a_y = 50$ と設定した。半径比の設定の影響等については文献⁹⁾等を参照して欲しいが、ここで設定したような細長い形状の場合は、上記の設定を $a_x/a_y = 30$ くらいに変更しても、結果への影響はほとんど生じないことは確認してある。

これを3次元有限要素解析して求めた、ウェブ開口部近傍の母材（追加繊維を除いた）部分の応力を図-6に示した。実線が図-4に示した追加補強の無い2%等方繊維補強材の場合の応力分布である。これにさらに2%の水平方向の繊維を導入した結果が、短い破線である。凡例に示した括弧内の数値は、母材に既に含まれる2%

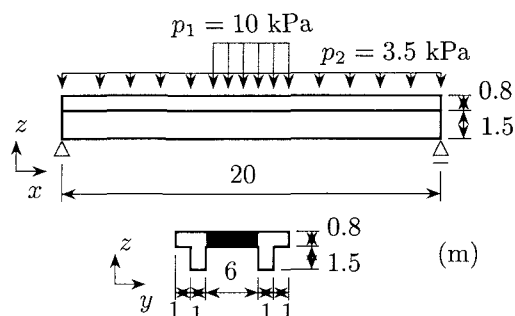


図-7 対象とする幅広Tけた橋

の繊維と追加導入した繊維の総量の体積比率である。追加導入した繊維が応力を分担するため、若干ではあるが、母材の引張り側の応力集中は緩和されている。さらに追加繊維量を5%とした場合の結果が長い破線であるが、それでもこの程度である。参考のための試算として、繊維をもっと増やして30%にした場合の一点鎖線の場合によやく作用応力レベルにまで応力集中を無くすることができるという結果になった。ただし、圧縮部は補強していないため、その応力集中の程度は繊維導入にしたがって悪くなるが、引張り側に比べれば半分程度に留まる。

このように、応力改善はほぼ導入繊維量に比例してしか期待できない。これは、例えば球の場合で説明すると、繊維の体積比率が小さい場合には、式(2)の平均剛性が式(3)のVoigt解とほとんど差が無く、平均剛性が体積比率 f の線形関数になるからである。また実測結果を所有していないため、結果の精度の検証ができていないが、定性的には予想通りの結果であり、もし導入繊維量を現状の2%程度よりもさらに増やすことができれば、補強効果は上がることを定量的に示すことができた。なお、実際の「ダクトル」は高強度コンクリートであるため、こういった応力集中が実際の橋梁でいま問題になっているわけではない。

4. 幅広Tけた橋のせん断遅れ

繊維補強コンクリートのもうひとつの応用例として、せん断遅れの改善策に使用してみる。近年の合理化橋梁のひとつとして少数主桁化が推奨され、実際には床版には橋軸直角方向のPC床版を併用することが多く、特に高速道路橋ではよく用いられるようになってきている。このような幅広の箱げた橋やけた橋では、幅の広い床版が平板として挙動するため、いわゆるせん断遅れのために、全断面を用いて梁理論で解析した応力よりも大きい応力が主桁部には生じる。そのため設計では通常、有効幅の概念が用いられている。ここでは床版の「部分的」な繊維補強によるせん断遅れの程度の改善を検討する。

解析対象は、図-7に示した、支間長20 mで桁高が

2.3 m, 幅が 10 m の幅広 T けた橋である。解析対象を 3248 個の六面体要素でメッシュ分割し、図示したように主桁部直上に L 荷重を載荷する。L 荷重の幅方向の分布は 5.5 m ではなく、この 2 主桁間の 6 m 部分に主荷重を載せ、その外側に従荷重を載せて合計を求めた。実際の外力は、この合計の半分ずつを主桁部直上の節点のみに分配して作用させてある。鉄筋を有限要素分割することは煩雑であり、ここでは特にせん断遅れによる応力分布の相対的な変化に注目しているだけなので、ここでは鉄筋を有限要素化しなかった。したがって、ヤング率 $E = 30 \text{ GPa}$ とポアソン比 $\nu = 0.2$ のコンクリート母材に、繊維を導入するという問題の設定にした。

鋼繊維介在物については、そのヤング率を $E_f = 210 \text{ GPa}$ 、ポアソン比を $\nu_f = 0.2$ とする。また介在物となる鋼繊維の形状は、回転楕円体の 3 つの主軸半径 (a_i , $i = 1, 2, 3$) 比で $a_1 = a_2$, $a_3/a_1 = 50$ と設定した。繊維を断面全体に入れてしまうと、単に剛性が異なる場合の結果になり、補強による応力分布の変化は無いので、繊維は図-7 の断面図に網掛けして黒くなった部分だけに導入し、その繊維の向きはすべて水平で、橋軸方向を向くようにした場合 ($a_3 = a_x$) と、橋軸直角方向にした場合 ($a_3 = a_y$) とを比較する。

4.1 橋軸方向に繊維を向けた場合

スパン中央の断面におけるフランジ部の、無補強コンクリート内の、梁の軸方向直応力分布を示したのが図-8 の細い一点鎖線である。横軸は図-7 の断面の左端からの距離で、縦軸はフランジの一番上の要素の上側の積分点における x 方向の直応力を圧縮を正にして示している。左右から 2 m 程度の主桁直上部分の応力が、それ以外の応力レベルよりも高く、水平の一点鎖線で示した「全断面使用の梁理論」で算定した応力よりも大きくなっている。示方書の「有効断面¹⁴⁾」を用いた応力レベルが、水平の破線であるが、主桁部の応力がほぼそれと同じ値になっている。

床版の網掛け部分に橋軸方向に分布させた繊維を導入した場合の結果を、同じ図-8 に重ねて示したが、この図の縦軸は、母材の応力、すなわち、繊維を除いたコンクリート部分の応力である。繊維を通常の「ダクトル」の 2% とした場合の結果が実線である。繊維が分担して抵抗しているために、コンクリート部の応力は相対的に減少し、全断面にわたって応力レベルが小さくなっている。さらに繊維を増やし 9% とした場合の結果が破線であるが、この程度の補強で、主桁部分の応力は、全断面が無補強の場合の梁理論の応力値まで減少している。ただし応力分布形状は、無補強の場合とほぼ相似である。

実際には、主桁間のみ床版の材料定数がそれ以外の部分と異なる構造を設計しなければならないため、最初から繊維を導入することを前提とした設計の仕方については、煩雑になるとは思われる。しかし、本手法のよう

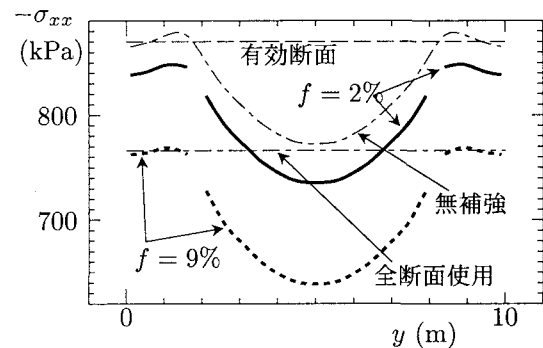


図-8 フランジの RC 部の応力 — 繊維：橋軸方向

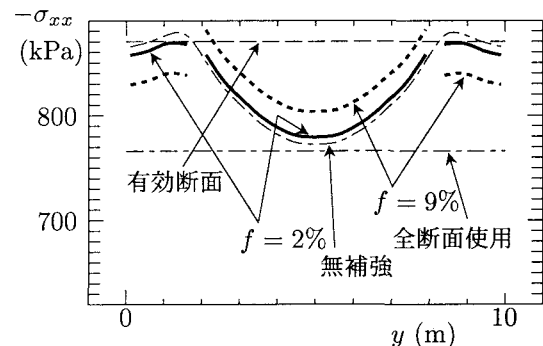


図-9 フランジの RC 部の応力 — 繊維：橋軸直角方向

な数値ツールを用いることで、その繊維分布も含めた応力解析は可能になると考えている。もちろん、主桁中間部の水平方向にのみ繊維を配置することの施工上の困難は避けられないが、流動させる方向に繊維が揃う傾向はあるようなので、ある程度は制御できるのではないかと予想される。

4.2 橋軸直角方向に繊維を向けた場合

次に、補強材の鋼繊維の向きを橋軸直角方向にした場合のコンクリート部の応力分布を図-9 に示した。線の意味は前節の図-8 の場合と同じである。部分的な繊維補強のため、剛性が変化する主桁直上では応力が不連続になるが、その程度が、先の橋軸方向の繊維配置よりも大きい。もちろん主桁直上部の応力レベルは減少するが、その改善の程度は橋軸方向の配置よりも小さい。しかし、前節の橋軸方向に導入した場合とは大きく異なり、相対的にその内側の応力レベルは増大し、全断面内での応力の再分配が生じていることは興味深い。すなわち、強度的な観点からは全断面を有効に利用していることになる。ただもちろん、応力の向きと直角方向への補強のために、応力の改善量（縦軸の変化量）は橋軸方向に分布させた場合よりも小さいが、応力レベルの均質化という特性を明らかにできた。なお応力状態は 3 軸状態にあるので、念のために強度に関連させて相当応力で同様の図を描いてみたが、その応力分布の変化の定性的な特性は σ_{xx} のそれと同じであった。

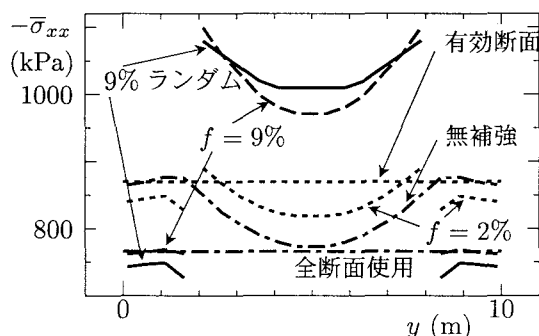


図-10 フランジ部分の平均応力 — 繊維：橋軸方向

4.3 繊維の向きがランダムな場合

最後に実用的な観点から、繊維の向きがランダムの場合について考察する。ただし、ランダム配置に匹敵する程多数の要素分割を用いるのは困難なので、ここでは近似的に、式(3)のVoigt近似を用いて、繊維が9%含まれた材料の平均ヤング率とポアソン比を持つ等方均質な材料で、補強部分を置き換えて解析した。そのため、母材部分の応力を求めるのが直接は困難なので、繊維を含めた平均応力分布で比較する。繊維を橋軸方向に並べた場合と比較したのが図-10である。つまり平均応力は、ランダムにした場合と橋軸方向に並べた場合とで同じレベルになっていることから、RC部分の応力も、ランダムに配置した場合の効果は橋軸方向に並べた場合程度を期待できると考えられる。

5. 微視構造の最適化

ここでは材料設計のことを念頭に置き、ある目的関数を最適化するように、微視構造である介在物の向きと体積比率を求める最適化解析を実施する。ここでは、制約条件付きの非線形計画問題の解法として、逐次2次計画法を用いる。目的関数は、与えられた外力条件のもとでの構造物全体の剛性の最大化とする。つまり、コンプライアンスで定義した補ひずみエネルギーを用いて、その最小化

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{F}^T \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F} \rightarrow \text{Min.} \quad (5)$$

によって目的関数を定義する。ここに $\mathbf{F}$ は節点外力ベクトルを、 $\mathbf{K}$ 全体剛性マトリクスを表している。最適化の設計変数としては介在物の向きあるいは体積比率とする。

ここで用いた逐次2次計画法プログラムは‘ASNOP’というパッケージで、文献¹⁵⁾から得られるものである。ただし、補ひずみエネルギーの設計変数についての微係数は、Mathematica等は使わず、設計変数を数値的に若干変動させた有限要素解析から得られる補ひずみエネルギーの変動を用いて数値的に求めている。

材料は、仮に普通コンクリートに鋼繊維を配合して補強したものを想定し、母材は普通コンクリートとして、そのヤング率を $E_M = 30 \text{ GPa}$ 、ポアソン比を $\nu_M = 0.2$

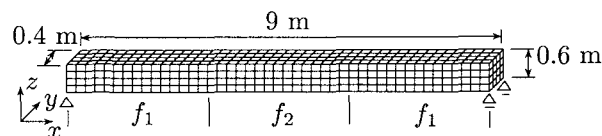


図-11 等分布荷重を受ける単純梁

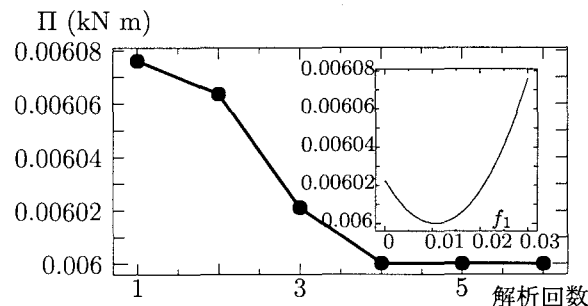


図-12 最適解への収束の様子

とした。また鋼繊維は、ヤング率を $E_1 = 210 \text{ GPa}$ 、ポアソン比を $\nu_1 = 0.2$ の回転楕円体介在物とする。繊維の3主軸半径比は $a_1 = a_2$ 、 $a_3/a_1 = 50$ と設定した。

5.1 目的関数の特性と最適解の精度

(1) 目的関数の凸性

球の場合の式(2)からも明らかのように、例えば介在物の体積比率は剛性の分母と分子に存在する。したがって目的関数には f の非線形性が存在するのは明らかであるが、果たして下に凸の関数になっているかは、簡単には示すことができない。そこでまず、図-11に示したような単純梁の上面に、下方向に一律な等分布外力 10 kN/m^2 を作用させ、図示したように三等分の区間に分け、スパン中央では f_2 の、サイド・スパンでは f_1 の体積比率を持つように繊維量を設定し、最適化解析をする。メッシュ分割は全部で720の六面体要素とした。ただし繊維量は、剛性を高くするには多く入れればいだけである一方で、現実的な繊維量には限界があるため、ここでは全スパンに2%存在した場合の合計値で制限し

$$2f_1 + f_2 = 0.06 \quad (6a)$$

$$f_1 \geq 0, \quad f_2 \geq 0 \quad (6b)$$

の制約条件を受けるものとした。また橋軸方向を x 軸としたとき、ここでは簡単のために、繊維の長軸は常に橋軸方向を向くようにした。したがって、その介在物の主軸方向は $a_x = a_3$ になるように設定した。

$f_1 = 0.03$ 、 $f_2 = 0$ を初期値として最適化を開始したときの、最適ステップごとの目的関数の値の変化を図-12に示したが、数回で最適解が得られている。得られた最適な組み合わせは $f_1 = 0.0107$ 、 $f_2 = 0.0386$ であった。そこで、上記の制約条件のもとで式(5)の目的関数の値を算定した結果を、同じ図-12の中の挿入図に示した。図から明らかのように目的関数は、最適な場合

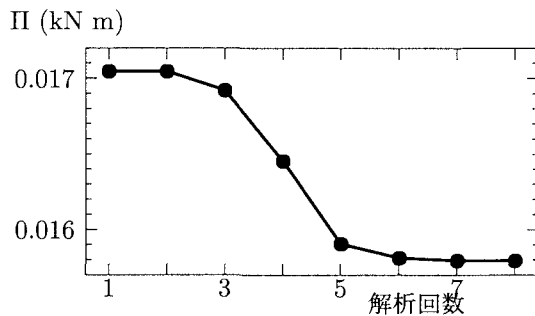


図-13 最適解への収束の様子

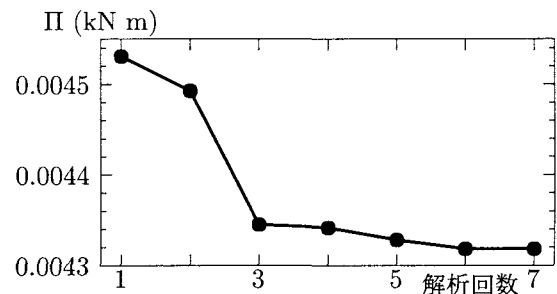


図-15 最適解への収束の様子

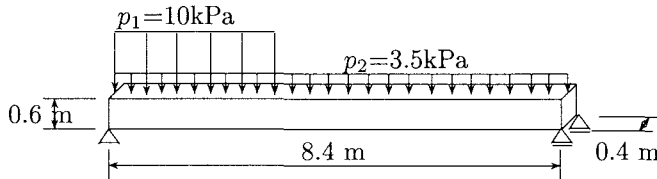


図-14-a 荷重条件と境界条件

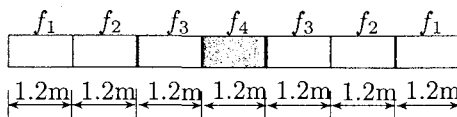


図-14-b 繊維の体積分率分布の設定

図-14 最適化の解析対象：単純支持梁

に最小になるような下に凸の関数になっていることを確認することができた。ここで設定した条件においては、このように、最小値を得るような解が存在したが、異なる荷重条件や境界条件の場合は、制約条件で最適解が決定される場合もあった。しかしその場合であっても、目的関数は下に凸の形を有していることを確認している。

(2) 繊維の向きの最適解

次に、コーディングミスのチェックと、解の精度を確認するために、繊維の向きを変動量として最適化を実行する。対象は前節と同じく、図-11の等分布外力を受ける単純支持梁である。繊維の体積比率は全スパンにわたって2% ($f_1 = f_2 = 0.02$)とした上で、各要素の繊維の向き θ の最適解を求めた。ただし、繊維の長軸は x - z 面内にあるものとして、すべての要素で z 軸から時計回りに θ の角度で繊維が存在するものとした。

初期値は $\theta = 30$ 度で開始したが、この場合も図-13に示したように、数回で最適解が得られた。得られた繊維の向きは $\theta = 89.8$ 度であった。当然のことではあるが、橋軸方向を向いた場合に最も剛性が高くなるという結果を得ることができ、解析手法の精度を確認することができた。

5.2 介在物の体積比率の最適解

(1) 単純支持梁の場合

最後に、設計変数を梁の4つの区間の補強繊維量とした場合を検討する。同時に、設計断面が橋梁の対称軸

上にある場合を想定し、橋梁は対称性を持っているものの、外力が非対称に作用している場合の最適な構造を解析する。

橋軸方向を x 軸としたとき、この節と次の例では簡単のために、繊維の長軸は常に橋軸方向を向くようにした。したがって、その介在物の主軸方向は $a_x = a_3$ になるように設定した。最初の解析対象は図-14に示した、スパン8.4 mで桁高が0.6 m、断面幅が0.4 mの長方形断面の単純支持梁である。解析対象を672個の六面体要素でメッシュ分割した。また実際の橋梁では工場製作されたパネルを現場で架設していくと考えられるので、ここでは、全スパンを図-14-bに示したように、スパン中央を対称軸にして七つの区間に分け、この区間の体積比率を変動量とした。この例では、ある程度現実的な繊維量内に留めるために、繊維の体積比率に制約条件を付けた。すなわち

$$2f_1 + 2f_2 + 2f_3 + f_4 = 0.175 \quad (7a)$$

$$f_1 \geq 0, \quad f_2 \geq 0, \quad f_3 \geq 0, \quad f_4 \geq 0 \quad (7b)$$

とした。上式の‘0.175’は、全スパンに2.5%ずつの繊維を導入した場合の合計値である。体積比率の最適化の開始値は、すべての区間で0.025とした。

荷重は、図-14-aに示したように、スパン端部側のある断面を設計することとして、L荷重を単純支持梁の端部寄りに作用させた。幅が狭いので全幅に主荷重を載せた。その結果、図-15に示したように、比較的少ない繰り返して最適解が得られており、その最適解は $f_1 = 0$, $f_2 = 0.0047$, $f_3 = 0.0518$, $f_4 = 0.0620$ であった。この結果は、与えられた荷重に対する応力あるいは変位分布から予想されるものであり、妥当な結果が得られたと考えられる。

(2) 2径間連続T形桁橋の場合

次の解析対象は図-16に示したような不静定構造で、スパン21 mで桁高が2.3 m、断面幅が6 mの2径間連続T形桁橋である。解析対象を1008個の六面体要素でメッシュ分割した。ここでも簡単のために、繊維の長軸は常に橋軸方向に一致するように設定した。全スパンを図-16-bに示したように、スパン中央を対称軸にして七つの区間に分けて最適化をした。材料は前節で設定したものと同一である。この例でも、比較的現実的な繊維量

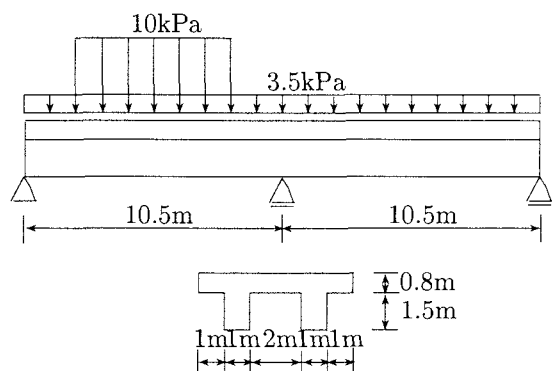


図-16-a 荷重条件と境界条件

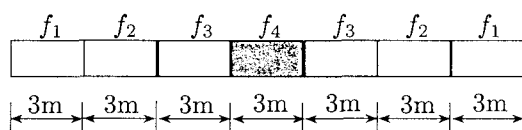


図-16-b 繊維の体積分率分布の設定

図-16 最適化の解析対象：2 径間連続 T 形桁橋

内に留めるために、繊維の体積比率に付ける制約条件を式 (7) と同じにした。

この場合は両スパンの中央部の断面を設計することを想定し、1 荷重を左スパン中央に作用させ、最適解析を行った。その結果この場合も、図-17 に示したように、比較的少ない繰り返しで最適解が得られており、その最適解は $f_1 = 0$, $f_2 = 0.0405$, $f_3 = 0$, $f_4 = 0.094$ であった。これもちり合い性状と比較して妥当な結果であると考えられる。

6. おわりに

一つの例として森・田中理論に基づく均質化手法を用い、それを複合材料の積分点での構成則として捉え、3 次元の複合材料有限要素を構築した。この有限要素を用いて、複合材料でできた構造の境界値問題に適用した。構造の合理化のために繊維補強材料を用いる例として、応力集中の緩和と、さらに、幅広 T けた橋のせん断遅れの緩和効果を解析してその有用性を示した。また、繊維等の介在物の寸法比や向きの陽な表現で剛性行列が表現できるという、解析的な均質化手法のメリットを活かし、最適化解析を実行し、いくつかの例を示すことによってその可能性を示すことができた。

もちろん、例えば導入繊維量を考えた場合、実際のコンクリートに 10% 以上もの繊維を導入することが現実的かどうかは疑問である。特に例として引用した商品のように、高流動性を確保しなければならない場合には、繊維量にはさらに厳しい制約条件が付されることは容易に予想される。しかし、もし流動性を犠牲にしたとしても工場で管理された製造が可能であれば、繊維量やその

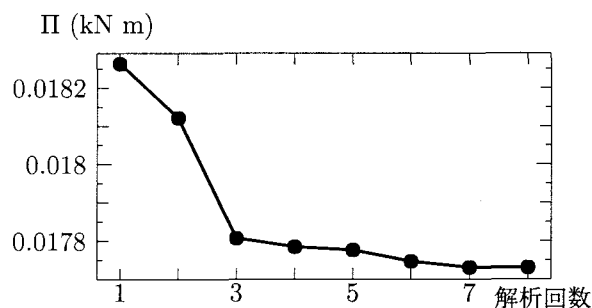


図-17 最適解への収束の様子

向きの制御によって、より高性能の複合材料が実現できる。そういった場合には、もちろん介在物を楕円体で近似せざるを得ないデメリットはあるが、本手法のような簡便な数値解析は材料設計において役立つものと期待している。実際「森・田中手法」は、熱膨張関係の複合材料の設計に実務でも使われ、材料開発の低コスト化に利用されている¹⁶⁾と聞いている。

また、既存構造物の補修・補強において、こういった部分的補強を用いた複合材料の利用は、例えば軽量であること等を念頭に置くと可能性と有用性が高いと考えられる。著者らは以前、床版の連続化^{17),18)}について (JH の伸縮分散型埋設ジョイントに類似) 検討したことがあるが、橋梁の弱点であるジョイントを無くすことは非常に重要なことだと考えているが、やはり床版に大きな応力が生じることは否めない。また、もうひとつの JH の延長床版の場合には、橋台の後ろとはいえジョイントが存在するため、衝撃をある程度は受けることになる。こういった高応力と衝撃を受ける部分にも、靱性も高くできる繊維補強複合材料は有効利用できるのではないかと考え、シミュレーションしようと考えている。

最後に最適化については、経済性や強度の観点からのアプローチと、設計断面ごとに異なる荷重条件を用いた場合の最適化の方法等の検討が、今度の課題だと考えている。

謝辞 — この研究は、平成 15, 16 年度科学研究費補助金基盤研究 (C) (課題番号 15560391) の補助を一部受けている。

付録 I 森・田中理論を利用した平均挙動の予測

ここでは 1 要素には 1 種類のみ介在物しか含まれないものとするので、母材に 1 種類の介在物だけが含まれる複合材料に特化して、その平均挙動を導く手法を説明する。母材と介在物における応力ひずみ関係はそれぞれ

$$\sigma_M = C_M \varepsilon_M, \quad \sigma_I = C_I \varepsilon_I \quad (I.1)$$

と書けるものとする。ここに σ , ε , C はそれぞれ、応力テンソルとひずみテンソルと弾性係数テンソルを表し、

下添え字の M と I はそれぞれ母材部分と介在物内部の諸量であることを示している。ここでは、いずれも等方弾性体であるものとする。

複合材料の全体積を V 、母材の体積を V_M 、介在物の体積を V_I とし、複合材料全体積に占める介在物の体積比率 f を以下のように定義する。

$$f \equiv \frac{V_I}{V} = \frac{V_I}{V_M + V_I} \quad (\text{I.2})$$

こうした上で、複合材料全体の平均応力と平均ひずみを、単純な体積平均

$$\bar{\sigma} \equiv f \langle \sigma \rangle_I + (1-f) \langle \sigma \rangle_M \quad (\text{I.3a})$$

$$\bar{\epsilon} \equiv f \langle \epsilon \rangle_I + (1-f) \langle \epsilon \rangle_D \quad (\text{I.3b})$$

で定義する。ここに、 $\bar{\sigma}$ 、 $\bar{\epsilon}$ が複合材料全体の平均応力と平均ひずみである。また $\langle \rangle$ は、その次の下添え字で示した体積中の平均量であることを示している。母材中の平均ひずみに相当する量が、下添え字が D の $\langle \epsilon \rangle_D$ で定義されているが、これについては後述する。このように定義された平均応力と平均ひずみの間を関係づける係数が複合材料の平均弾性係数であり

$$\bar{\sigma} = \bar{C} \bar{\epsilon} \quad (\text{I.4})$$

で定義されるものとする。したがって、各相の平均応力・ひずみと、平均応力・ひずみとの関係が、力学的に求められさえすれば、それを上式 (I.3) に代入し、さらにそれを上式 (I.4) に代入すれば、各相の材料定数と $\bar{C}$ の関係が求められる。

まず森・田中は、母材中での平均的な場について大きな仮定を設けた。すなわち、母材中に介在物が多数存在することによって、母材部分に生じている介在物同士の相互作用は正確には求めることができないため、母材中の応力あるいはひずみのいずれかは、何らかの力学的に整合する量の平均で定義するのではなく、既に介在物が多数存在することを考慮された場になっていると仮定する。したがって、母材中の平均的な応力ひずみ関係を

$$\langle \sigma \rangle_M = C_M \langle \epsilon \rangle_D \quad (\text{I.5})$$

と表現している。ここで注意しなければならないのは上述のように、平均ひずみを $\langle \epsilon \rangle_D$ のように表記することで、ある力学的なひずみの平均値というよりも、介在物同士の相互作用をすでに含んだ、しかし未知量として残された量として定義していることである。

これに対し、介在物内部の平均的な応力ひずみ関係は、式 (I.1) の平均で

$$\langle \sigma \rangle_I = C_I \langle \epsilon \rangle_I \quad (\text{I.6})$$

となるものとしている。この介在物中のひずみと応力については、以下において、つり合い式や境界条件を満足するように決定しているため、力学量の平均として定義している。ここが母材の上述の仮定と異なる点である。

次に、介在物の中の物理量を求めるために、母材との相互作用を考慮する必要がある。森・田中理論では、既

に式 (I.5) において、多くの介在物が母材中に存在して相互作用を及ぼしていることは考慮済みであるとみなしている。そのため、この式 (I.6) が成立している平均的な母材の中に、たった 1 個の介在物を加えたとしても、体積比率に及ぼす影響は無視できであろうから、その状態が他のすべての介在物中にも発生していると考えた。介在物中の応力やひずみの場合は、式 (I.5) が成立する「均質な無限体」中に、今投げ入れた 1 個の介在物しか存在しない場合の場で近似できることになる。したがって、全体が平均的に一様なひずみ状態 $\langle \epsilon \rangle_D$ になっている無限体に 1 個の介在物を新たに導入する状態を考えればよい。新たに導入された介在物の部分には、もともと $\langle \epsilon \rangle_D$ の平均ひずみ場にあったとし、その介在物が導入されたことによって生じるひずみの乱れ成分が γ で表されるとする。このとき、介在物中の平均ひずみは

$$\langle \epsilon \rangle_I = \langle \epsilon \rangle_D + \gamma \quad (\text{I.7})$$

となると考えてよい。このように考えると、介在物中の平均的な応力ひずみ関係を表す式 (I.6) に代入して、平均応力は

$$\langle \sigma \rangle_I = C_I \{ \langle \epsilon \rangle_D + \gamma \} \quad (\text{I.8})$$

となる。

無限体に 1 個だけ介在物が存在する場合の、介在物中に生じるひずみ場は、つり合い式を解くことによって求めることができる。多くの方法があるが、例えば「マイクロメカニクス¹¹⁾」には、等価介在物法を用いる手法が紹介されている。それはもともとは Eshelby によって示された手法であるが、部分的に異なる材料が存在する領域でのつり合い式の解は、その異なる材料の領域に一種の非適合ひずみである eigen ひずみ ϵ^* が存在した上で材料がすべての領域で同じものにした場合の解と等しいことを利用した手法である。

ここでは、無限体に新たに加えた 1 個の介在物内部にその eigen ひずみが存在し、ただし介在物の弾性係数は母材の弾性係数と同じものであるとすると、介在物中の応力ひずみ関係式 (I.8) は

$$\langle \sigma \rangle_I = C_M \{ \langle \epsilon \rangle_D + \gamma - \epsilon^* \} \quad (\text{I.9})$$

と表現することができるというのが、等価介在物法である。材料定数が一様であるため、つり合い式を解くのが比較的容易になることから、この手法が取られる。このようにしてつり合い式を解くと、ひずみの乱れ成分は eigen ひずみと

$$\gamma = S \epsilon^* \quad (\text{I.10})$$

という関係にあることが分かる。もし、等方弾性の無限体中に 1 個の介在物が存在し、その形状が楕円体である場合には、このテンソル S は定数テンソルになることを Eshelby¹⁰⁾ は示した。式 (I.10) を式 (I.8) に代入すると

$$\langle \sigma \rangle_I = C_I \langle \epsilon \rangle_D + C_I S \epsilon^* \quad (\text{I.11})$$

という表現が得られる。また、式 (I.10) を式 (I.9) の方に代入すると

$$\langle \sigma \rangle_I = C_M \langle \epsilon \rangle_D + C_M (S - I) \epsilon^* \quad (I.12)$$

という関係が得られる。ここに I は 4 階の単位テンソルである。等価介在物の理論は、この二者の表現で得られる応力同士は等価であるとしているから、この式 (I.11) と式 (I.12) を等しく置くことによって、 ϵ^* を求めることができる、それは

$$\epsilon^* = \{C_M - (C_M - C_I) S\}^{-1} (C_M - C_I) \langle \epsilon \rangle_D \quad (I.13)$$

となる。この式 (I.13) に式 (I.5) を代入することによって、未知であるが母材中に多数の介在物が存在していることを考慮したひずみ場 $\langle \epsilon \rangle_D$ を消去すれば

$$\epsilon^* = \{C_M - (C_M - C_I) S\}^{-1} (C_M - C_I) C_M^{-1} \langle \sigma \rangle_M \quad (I.14)$$

という関係が得られる。

また、式 (I.3b) に式 (I.7) を代入すると

$$\bar{\epsilon} = f \{ \langle \epsilon \rangle_D + \gamma \} + (1 - f) \langle \epsilon \rangle_D = \langle \epsilon \rangle_D + f \gamma \quad (I.15)$$

となり、これに式 (I.5) と式 (I.10) と代入することによって

$$\bar{\epsilon} = C_M^{-1} \langle \sigma \rangle_M + f S \epsilon^* \quad (I.16)$$

という関係を得る。最後に式 (I.5) を式 (I.12) に代入すれば

$$\langle \sigma \rangle_I = \langle \sigma \rangle_M + C_M (S - I) \epsilon^* \quad (I.17)$$

と表現できる

最終的に、以上の式を連立させることによって、 $\langle \sigma \rangle_M$ 、 $\langle \sigma \rangle_I$ 、 ϵ^* を消去すると、 $\bar{\sigma}$ と $\bar{\epsilon}$ だけの関係式が得られる。それと式 (I.4) を比較することによって、複合材料全体の平均弾性テンソルが

$$\bar{C} = C_M \{ C_M - (1 - f) (C_M - C_I) S \}^{-1} [C_M - (C_M - C_I)] \{ S - f (S - I) \} \quad (I.18)$$

のように求めることができる。

また、母材と介在物中の応力は式 (I.3a) に式 (I.14)、(I.17) を代入することにより、それぞれ

$$\sigma_M = [I + f C_M (S - I) \{ C_M - (C_M - C_I) S \}^{-1} (C_M - C_I) C_M^{-1}]^{-1} \bar{\sigma} \quad (I.19a)$$

$$\sigma_I = [I + C_M (S - I) \{ C_M - (C_M - C_I) S \}^{-1} (C_M - C_I) C_M^{-1}]^{-1} \bar{\sigma}_M \quad (I.19b)$$

参考文献

- 1) 土木学会構造工学委員会 FRP 橋梁研究小委員会：FRP 橋梁 — 技術とその展望 —，構造工学シリーズ 14，2004。

- 2) 武者浩透，大熊光，大竹明朗，児玉明彦，関文夫，小林忠司：無機系複合材料 (RPC) を用いた酒田みらい橋の設計と施工，橋梁と基礎，pp.1-10，2002。
- 3) 武者浩透，大竹明朗，児玉明彦，小林忠司：超高強度コンクリート系新素材「ダクタル」を用いた PC 橋梁の設計・施工 — 酒田みらい橋 —，プレストレストコンクリート，Vol.45，No.2，pp.40-48，2003。
- 4) 田中良弘，武者浩透，下山善秀，小林忠司：PC 橋梁に用いた超高強度繊維補強コンクリートの用途開発，コンクリート工学，Vol.41，No.3，pp.26-32，2003。
- 5) 京谷孝史，谷宗行：均質化法を応用したロックボルト打設間隔の最適化，応用力学論文集，Vol.6，pp.159-166，2003。
- 6) 松井和己，寺田賢二郎，京谷孝史，岩熊哲夫：弾塑性複合材料のミクロ構造を反映した巨視的な降伏曲面の評価，土木学会論文集，No. 682/I-56，pp.335-346，2001。
- 7) Mori, T. and Tanaka, K.: Average stress in matrix and average energy of materials with misfitting inclusions, *Acta Metall.*, Vol.21, pp.571-574, 1973。
- 8) 樋口耕平，岩熊哲夫，京谷孝史，寺田賢二郎：解析的平均化手法を用いた複合材料の平面ひずみ有限要素，応用力学論文集，Vol.6，pp.107-116，2003。
- 9) 賛川拓，河原佳武，岩熊哲夫，王峰，解析的手法を利用した複合材料有限要素の確率有限要素法への応用と最適化の試行，応用力学論文集，Vol.7，pp.355-364，2004。
- 10) Eshelby, J.D.: The determination of the elastic field of an ellipsoidal inclusion, and related problems, *Proc. Roy. Soc. London*, Vol.A241, pp.376-396, 1957。
- 11) Mura, T.: *Micromechanics of Defects in Solids*, Martinus Nijhoff Publ, 1982。
- 12) Ju, J.W. and Chen, T.M.: Effective elastic moduli of two-phase composites containing randomly dispersed spherical inhomogeneities, *J. Acta Mech.*, Vol.103, pp.123-144, 1994。
- 13) Nemat-Nasser, S. and Hori, M.: *Micromechanics: Overall Properties of Heterogeneous Materials*, North-Holland, 1993。
- 14) 長井正嗣，橋梁工学 [第 2 版]，共立出版，2003。
- 15) 矢部博，八巻直一：非線形計画法，朝倉書店，1999。
- 16) 野瀬哲郎，超低熱膨張セラミックスの開発，東北大学—新日鉄シンポジウム「鉄と社会」，東北大学未来科学技術共同研究センター / 新日鉄技術開発本部，2000。
- 17) 盛川勉，岩熊哲夫，異種形式橋梁の床版連続化の一検討，構造工学論文集，Vol.47A，pp.1129-1140，2001。
- 18) 盛川勉，日比野智明，岩熊哲夫，2 主構橋梁と多主 I 桁の床版連続化における連結構造の検討，構造工学論文集，Vol.47A，pp.1141-1152，2001。

(2004 年 9 月 17 日 受付)