

## 集成材梁の横ねじれ座屈耐荷力

Lateral-torsional buckling capacity of glue-laminated wood beams

千田 知弘\*・後藤 文彦\*\*・長谷部 薫\*\*\*・薄木 征三\*\*\*\*

CHIDA Tomohiro, GOTOU Humihiko, HASEBE Kaoru, USUKI Seizo

\*秋田大学大学院, 工学資源学研究科土木環境工学専攻 (〒010-8502 秋田県秋田市手形学園町 1-1)

\*\*博(工) 秋田大学助手, 工学資源学部土木環境工学科

\*\*\*工博 秋田大学助教授, 工学資源学部土木環境工学科

\*\*\*\*工博 秋田大学教授, 工学資源学部土木環境工学科

Glue-laminated wood beams are used in various conditions and forms (like slender long-span beams) with recent progress of hybrid structures utilizing steel plates, steel bars for prestressed concrete and so on. For such slender long-span beams it is important to establish know-how to numerically analyze lateral-torsional buckling capacity of glue-laminated wood members. In this study we propose the formulation to solve elasto-plastic large-displacement problems of glue-laminated wood beams utilizing a large-displacement finite element formulation to analyze buckling, fiber element modeling to analyze elasto-plastic problems and utilizing Timoshenko's beam theory to consider shearing deformation. We show some numerical examples and discuss accuracy of the formulation.

**Key Words :** glue-laminated wood beams, lateral-torsional buckling, Timoshenko's beam

キーワード: 集成材, 横ねじれ座屈, ティモシェンコ梁

## 1. まえがき

近年は, 集成材を鋼板やPC 鋼棒などで補強したハイブリット型の構造を用いることで比較的 長スパンの小・中規模の道路橋へと集成材の利用範囲が広がってきていることもあり, 環境や景観への配慮, ランドマーク性など, 様々な面から集成材木橋が見直されてきている. それに伴い, 様々な条件で用いられる集成材部材(スレンダーなものや長スパンのもの)の面外座屈を含めた力学特性や耐荷力特性を知ることの重要性が増してきている.

集成材の力学特性を調べるための様々な実験は行われているが, 実験には条件設定や規模, 経済上・時間上の制約があるので, 数値的な解析手法も確立されることが望まれる. しかし, 集成材を数値モデル化するには, いくつかの困難があり, なかなか鋼構造の数値モデル化のようにノウハウが蓄積されていない状況である. 集成材は, 無垢材に比べれば材料特性のばらつきは小さいが, それでも一定のばらつきを持つ直交異方性材料であり, 引張に対しては破断までほぼ線形, 圧縮側には塑性域があり, 曲げを受けた場合のせん断変形は無視できないほどには大きい. こうした特性を, 梁要素などの近似を行わずに, ソリッド要素などでまともにモデル化して解析することは, 線形解析や低次非線形解析のレベルでなら, 現段階でも十分に可能かも知れないが, 座屈耐荷力などの高次非線形問題となると, コンピューターや汎用ソフトの飛躍的に進歩した現在においても, まだ多く

の困難を伴う. そこで本研究では, 鋼構造の分野では既に非線形解析のノウハウの確立している梁要素を用いた有限変位・有限要素法の定式化を拡張して, 集成材梁の耐荷力解析を試みる. 具体的には, 幾何学非線形を考慮した剛性方程式に集成材の弾塑性性状をファイバーモデルで考慮し, せん断変形をティモシェンコ梁で考慮する. 解析解の存在する弾性横ねじれ座屈の問題を解析して本定式化の精度を確認した後, 実験が試みられた集成材梁モデルに対する横ねじれ座屈の問題を試算し, 解析値と実験値の関係について考察する.

## 2. 定式化

## 2.1 剛性方程式

有限変位を考慮した梁要素の剛性方程式には, 様々な定式化があり得るが, ここでは文献<sup>1)</sup>の剛性方程式に, ねじれ率の自由度<sup>2)</sup>を加えた文献<sup>3)</sup>の定式化を用いる. 以下に, 剛性方程式と接線剛性方程式の形式を簡単に説明する.

まず, 有限な変位を伴う軸長  $\ell$  の直線梁要素 A を考える. 変形前の初期状態において, 直角座標  $(x, y, z)$  を定義する. 但し, 梁軸に沿って  $z$  軸をとり, 右手系となるように  $x, y$  軸をとる (図-1). 要素の両端は節点 1, 節点 2 と呼ぶことにする. 節点変位ベクトルを次式で定義する.

$$d \equiv [d_1^T d_2^T]^T \quad (1)$$

$d_i \equiv [u_i \ v_i \ w_i \ \alpha_i \ \gamma_i \ \phi_i \ \lambda_i]^T \quad (i=1,2)$   
 ここに  $u_i, v_i, w_i$  は  $x, y, z$  軸方向の並進変位,  $\alpha_i, \gamma_i, \phi_i$  はオイラー角<sup>1),2),3)</sup>,  $\lambda_i$  は断面のねじれ率である.  
 節点外力ベクトルを, 次式で定義する.

$$f \equiv [f_1^T f_2^T]^T \quad (2)$$

$$f_i \equiv [F_{xi} \ F_{yi} \ F_{zi} \ M_{xi} \ M_{yi} \ M_{zi} \ M_{\lambda i}]^T \quad (i=1,2)$$

ここに,  $F_{xi}, F_{yi}, F_{zi}$  はそれぞれ  $x, y, z$  軸方向の節点外力,  $M_{xi}, M_{yi}, M_{zi}$  はそれぞれ  $x, y, z$  軸右ねじ回りの節点外力モーメント,  $M_{\lambda i}$  は節点の外力そりモーメントである.

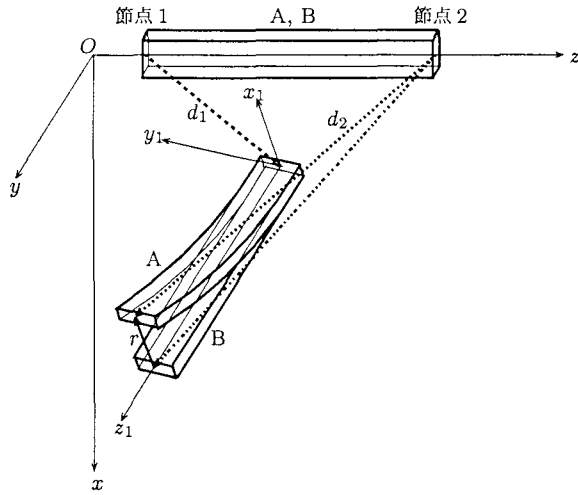


図-1 節点変位

今, 初期無载荷状態で要素 A と重なっている軸長  $\ell$  の剛体の要素 B が, 節点 1 の変位を (ねじれ率  $\lambda_1$  をのぞき) A と同じ  $[u_1 \ v_1 \ w_1 \ \alpha_1 \ \gamma_1 \ \phi_1 \ 0]^T$  に保ちながら剛体として移動していると看做する. このとき, 要素 B に対する要素 A の両端の節点相対変位  $r$  は, 次式で表される<sup>1),3)</sup>.

$$r \equiv [r_1^T \ r_2^T]^T \quad (3)$$

$$r_1 \equiv [0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ \lambda_1]^T$$

$$r_2 \equiv$$

$$\begin{bmatrix} u_2 - u_1 - \ell \cos \alpha_1 \sin \gamma_1 \\ v_2 - v_1 - \ell \sin \alpha_1 \\ w_2 - w_1 - \ell (\cos \alpha_1 \cos \gamma_1 - 1) \\ \begin{bmatrix} -\cos \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} & 0 & \sin \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \cos \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \\ 0 & 1 & \sin \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \\ -\sin \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} & 0 & \cos \frac{\gamma_1 + \gamma_2}{2} \cos \frac{\alpha_1 + \alpha_2}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_2 - \alpha_1 \\ \gamma_2 - \gamma_1 \\ \phi_2 - \phi_1 \end{Bmatrix} \\ \lambda_2 \end{bmatrix}$$

ここに,  $r_2$  の回転角 3 成分は, オイラー角成分を  $x, y, z$  軸回りの回転角成分に変換するための変換マトリクスがかけられている. オイラー角  $(\alpha, \gamma, \phi)$  で回転した局所座標系の座標値を全体座標系  $(x, y, z)$  の座標値に変換する座標変換行列  $T$  を次式で定義する.

$$T(\alpha, \gamma, \phi) = \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} \cos \phi \cos \gamma & -\sin \phi \cos \gamma & \cos \alpha \sin \gamma \\ -\sin \phi \sin \alpha \sin \gamma & -\cos \phi \sin \alpha \sin \gamma & \\ \sin \phi \cos \alpha & \cos \phi \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\cos \phi \sin \gamma & \sin \phi \sin \gamma & \cos \alpha \cos \gamma \\ -\sin \phi \sin \alpha \cos \gamma & -\cos \phi \sin \alpha \cos \gamma & \end{bmatrix}$$

各成分が局所座標系の成分で表された相対変位ベクトル  $r_\ell$  を全体座標系  $(x, y, z)$  の成分で表された相対変位ベクトル  $r$  に変換する座標変換行列  $T_o$  を次式で定義する.

$$T_o \equiv \begin{bmatrix} T_1 & O_{77} \\ O_{77} & T_1 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$T_1 \equiv \begin{bmatrix} T & O_{33} & O_{31} \\ O_{33} & T & O_{31} \\ O_{13} & O_{13} & 1 \end{bmatrix}$$

ここに  $O_{ij}$  は  $i \times j$  のゼロ行列である. 局所座標系の相対変位  $r_\ell$  は  $T_o$  を用いて

$$r_\ell = T_o^T r \quad (6)$$

と表される.

一方,  $r_\ell$  に対応する局所座標系の節点外力ベクトル  $f_\ell$  と  $r$  に対応する全体座標系の節点外力ベクトル  $f$  との関係は, 変換行列  $Q$  と  $R$  を用いて,

$$f = Q^T R^T f_\ell \quad (7)$$

で表される<sup>1),3)</sup>. まず  $Q$  は,  $x, y, z$  軸回りの回転角成分をオイラー角成分に変換する行列で<sup>1),3)</sup>, 次式で定義される.

$$Q \equiv \begin{bmatrix} q_1 & O_{77} \\ O_{77} & q_2 \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$q_i \equiv \begin{bmatrix} I & O_{33} & O_{31} \\ O_{33} & \begin{bmatrix} -\cos \gamma_i & 0 & \sin \gamma_i \\ -\sin \gamma_i \tan \alpha_i & 1 - \cos \gamma_i \tan \alpha_i \\ \sin \gamma_i / \cos \alpha_i & 0 & \cos \gamma_i / \cos \alpha_i \end{bmatrix} & O_{31} \\ O_{13} & O_{13} & 1 \end{bmatrix} \quad (i=1,2)$$

ここに  $I$  は  $3 \times 3$  の単位行列,  $O_{ij}$  は  $i \times j$  のゼロ行列である. また,  $R$  は, 仮想仕事から導かれる変換行列<sup>1),3)</sup>で, 次式で定義される.

$$R \equiv \left[ \frac{\partial T_o^T}{\partial d} r + T_o^T \frac{\partial r}{\partial d} \right] \quad (9)$$

相対変位  $r$  が微小な範囲にとどまるなら, 等方性材料に対する 2 節点 14 自由度の梁要素の線形剛性行列<sup>5)</sup>  $K$  を用いて, 局所座標系の剛性方程式は

$$f_\ell = K r_\ell \quad (10)$$

与えられる. 式 (6) を式 (10) に代入してから式 (7) に代入すると次式で表される全体座標系の剛性方程式を得

る。

$$\mathbf{f} = \mathbf{Q}^T \mathbf{R}^T \mathbf{K} \mathbf{T}_o^T \mathbf{r} \quad (11)$$

式(11)の変位 $\mathbf{d}$ についての増分式として、接線剛性方程式が次式で与えられる<sup>1),3)</sup>。

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{f} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{d}} \left[ \mathbf{Q}^T \mathbf{R}^T \mathbf{K} \mathbf{T}_o^T \mathbf{r} \right] \Delta \mathbf{d} \\ &= \left[ \frac{\partial \mathbf{Q}^T}{\partial \mathbf{d}} \mathbf{R}^T \mathbf{K} \mathbf{T}_o^T \mathbf{r} \mathbf{Q} + \mathbf{Q}^T \left[ \frac{\partial \mathbf{R}^T}{\partial \mathbf{d}} \mathbf{K} \mathbf{T}_o^T \mathbf{r} + \mathbf{R}^T \mathbf{K} \mathbf{R} \right] \mathbf{Q} \right] \Delta \mathbf{d} \\ &\equiv \mathbf{K}_1 \Delta \mathbf{d} \end{aligned} \quad (12)$$

ここに、 $\bar{\mathbf{d}}$ は、回転角成分が $x, y, z$ 軸回りの成分で与えられる節点変位ベクトルで、次式で表される。

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{d}} &\equiv [\bar{\mathbf{d}}_1^T \ \bar{\mathbf{d}}_2^T]^T \\ \bar{\mathbf{d}}_i &\equiv [u_i \ v_i \ w_i \ \theta_{xi} \ \theta_{yi} \ \theta_{zi} \ \lambda_i]^T \quad (i = 1, 2) \end{aligned} \quad (13)$$

一般に弾性問題であれば、式(11)と式(12)とを用いたニュートン-ラフソン法や弧長増分法により解析できるが、つりあい状態が載荷履歴に依存する弾塑性問題では、不釣合力の計算に式(11)が使えないため、弾塑性問題の解析には、式(12)の荷重増分 $\Delta \mathbf{f}$ を累積しながら不釣合力を計算する方法を用いる。

## 2.2 ファイバーモデル

本研究では、梁の軸方向応力に対してのみ降伏と破断を判定するいわゆるファイバーモデルによる定式化を用いる。集材材は、圧縮側のみ塑性域があり、引張側は破断まではほぼ線形なので<sup>4)</sup>、圧縮側は図-2のような除荷ありの完全弾塑性モデル、引張側は破断まで線形の軸方向応力-軸方向ひずみ関係を仮定し、梁の軸方向応力に対してのみ降伏と破断を判定する。

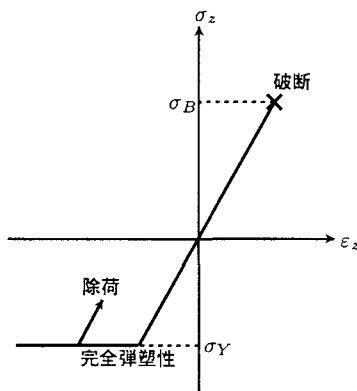


図-2 軸方向応力-軸方向ひずみ関係

降伏および破断の判定は、幅 $b \times$ 高さ $h \times$ 長さ $\ell$ の長方形断面の梁要素を図-3のように断面についてのみ $n_x \times n_y$ 分割した長さ $\ell$ のファイバー要素ごとに各荷重増分段階で行う。

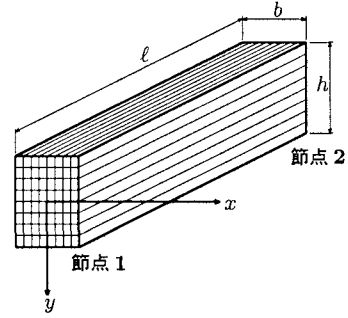


図-3 ファイバー要素

各ファイバー要素の軸方向増分ひずみ $\Delta \varepsilon_z$ は、次式で与えられる<sup>6)</sup>。

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_z &= w' - u''(x - y\theta_z) - v''(y + x\theta_z) \\ &\quad - \omega \theta_z'' + \frac{1}{2}(u'^2 + v'^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\theta_z'^2 \end{aligned} \quad (14)$$

ここに $\omega$ は長方形断面の正規化ソリ関数で、次式<sup>7)</sup>で与えられる。

$$\omega = \frac{8b^2}{\pi^3} \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{\sinh \frac{n\pi y}{b}}{\cosh \frac{n\pi h}{2b}} \sin \frac{n\pi x}{b} + xy$$

式(14)を増分変位 $\Delta \bar{\mathbf{d}}$ で補間するために、エルミート多項式を用いて<sup>5)</sup>近似すると、節点1、節点2それぞれの断面の任意点 $(x, y)$ における軸ひずみ増分 $\Delta \varepsilon_1, \Delta \varepsilon_2$ は、次式のように与えられる。

$$\Delta \varepsilon_1(x, y) = \frac{w_2 - w_1}{\ell} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} &- (x - y\theta_{z1}) \left\{ \frac{6}{\ell^2}(-u_1 + u_2) + \frac{2}{\ell}(2\theta_{y1} + \theta_{y2}) \right\} \\ &- (y + x\theta_{z1}) \left\{ \frac{6}{\ell^2}(-v_1 + v_2) + \frac{2}{\ell}(2\theta_{x1} + \theta_{x2}) \right\} \\ &- \omega \left\{ \frac{6}{\ell^2}(-\theta_{z1} + \theta_{z2}) + \frac{2}{\ell}(2\lambda_1 + \lambda_2) \right\} \\ &+ \frac{1}{2}(\theta_{y1}^2 + \theta_{x1}^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\lambda_1^2 \end{aligned}$$

$$\Delta \varepsilon_2(x, y) = \frac{w_2 - w_1}{\ell} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} &- (x - y\theta_{z2}) \left\{ \frac{6}{\ell^2}(u_1 - u_2) - \frac{2}{\ell}(\theta_{y1} + 2\theta_{y2}) \right\} \\ &- (y + x\theta_{z2}) \left\{ \frac{6}{\ell^2}(v_1 - v_2) + \frac{2}{\ell}(\theta_{x1} + 2\theta_{x2}) \right\} \\ &- \omega \left\{ \frac{6}{\ell^2}(\theta_{z1} - \theta_{z2}) - \frac{2}{\ell}(\lambda_1 + 2\lambda_2) \right\} \\ &+ \frac{1}{2}(\theta_{y2}^2 + \theta_{x2}^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2)\lambda_2^2 \end{aligned}$$

各ファイバー要素ごとに両端の $\Delta \varepsilon_1, \Delta \varepsilon_2$ を平均して軸方向ひずみ増分 $\Delta \varepsilon_z$ を求める。軸方向応力増分 $\Delta \sigma_z$ と軸方向ひずみ増分 $\Delta \varepsilon_z$ との関係は次式で与える。

$$\Delta \sigma_z = E_t \Delta \varepsilon_z \quad (17)$$

$$E_t = \begin{cases} E & (\sigma_Y < \sigma_z < \sigma_B) \\ 0 & (\sigma_z \leq \sigma_Y) \end{cases}$$

ここに、 $E_t$ は接線弾性係数、 $E$ はヤング率、 $\sigma_B$ は引張破断応力、 $\sigma_Y$ は圧縮降伏応力である。各ファイバー要素ごとに $\Delta \sigma_z$ を累積して軸方向応力 $\sigma_z$ を求め、各ファイバー要素の降伏、破断を判定する。各梁要素ごと

の断面剛性は、断面定数の面積積分の際に、降伏判定後の接線弾性係数を各ファイバー要素の座標値の関数にかけながら積分することで求める<sup>5)</sup>。

## 2.3 ティモシェンコ梁

集成材梁は曲げに対するせん断変形が比較的大きい材料なので<sup>8)</sup>、式(11),(12)中の剛性行列  $\mathbf{K}$  を3次元ティモシェンコ梁の剛性行列<sup>5)</sup>に置き換えて、2軸曲げに対するせん断変形の影響を考慮できるようにする。具体的には、 $\mathbf{K}$  の  $K_{2,2}$ ,  $K_{4,2}$ ,  $K_{11,2}$  成分を  $\frac{1}{1+12\phi_{yz}}$  倍、 $K_{1,1}$ ,  $K_{5,1}$ ,  $K_{12,1}$  成分を  $\frac{1}{1+12\phi_{xz}}$  倍、 $K_{4,4}$  成分を  $\frac{1+3\phi_{yz}}{1+12\phi_{yz}}$  倍、 $K_{11,4}$  成分を  $\frac{1-6\phi_{yz}}{1+12\phi_{yz}}$  倍、 $K_{5,5}$  成分を  $\frac{1+3\phi_{xz}}{1+12\phi_{xz}}$  倍、 $K_{12,5}$  成分を  $\frac{1-6\phi_{xz}}{1+12\phi_{xz}}$  倍し、対称成分も同様とする。ここに、 $\phi_{xz}$ ,  $\phi_{yz}$  は、それぞれ  $y$  軸回り、 $x$  軸回りの曲げによる  $xz$  面、 $yz$  面のせん断変形のしやすさを表すパラメータで、次式で与えられる<sup>5)</sup>。

$$\phi_{xz} = \frac{EI_y}{Gk_{xz}A\ell^2}, \quad \phi_{yz} = \frac{EI_x}{Gk_{yz}A\ell^2} \quad (18)$$

ここに、 $I_y$ ,  $I_x$  は、それぞれ  $y$  軸、 $x$  軸回りの断面二次モーメント、 $G$  はせん断弾性係数、 $A$  は断面積である。 $k_{xz}$ ,  $k_{yz}$  は、それぞれ  $xz$  面、 $yz$  面のせん断変形に対するせん断補正係数である。長方形断面の等方性材料に対するせん断補正係数は、次式で与えられる<sup>9)</sup>。

$$k = \frac{10 + 10\nu}{12 + 11\nu} \quad (19)$$

ここに  $\nu$  はポアソン比である。本研究では、集成材を等方性材料として扱っているので、ヤング率とせん断弾性係数から  $\nu = \frac{E}{2G} - 1$  として逆算されるポアソン比を式(19)に代入して得られる  $k$  を  $k_{xz}$ ,  $k_{yz}$  の両者に与えることで、 $xz$  面、 $yz$  面のせん断変形を考慮する。

## 3. 数値解析

### 3.1 等曲げを受ける直線梁の横ねじれ座屈

まず、横ねじれ座屈の解析解<sup>10),11)</sup>が存在する等曲げを受ける直線梁の問題を弾性域で計算してみる。

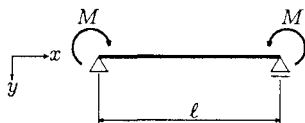


図-4 解析モデル

Vacharajittiphan ら<sup>11)</sup>の解析解  $M_{cr}^V$  は次式で与えられる。

$$M_{cr}^V = \frac{\pi}{\ell} \sqrt{\frac{EI_y GJ \left(1 + \frac{\pi^2 EI_\omega}{GJ \ell^2}\right)}{\left(1 - \frac{EI_y}{EI_x}\right) \left(1 - \frac{GJ + \frac{\pi^2 EI_\omega}{\ell^2}}{EI_x}\right)}} \quad (20)$$

この式は、座屈前の面内たわみの影響が考慮された座屈公式であるが、式中の面内剛性を  $EI_x \rightarrow \infty$  とすると、根号の中の分母が消えてティモシェンコとギアー<sup>10)</sup>による面内たわみを無視した座屈公式になる。

さて、数値計算による座屈の判定は、式(12)における接線剛性行列  $\mathbf{K}_1$  の負の固有値の数が、0個から1個に変化した荷重段階を座屈荷重とする。ヤング率は、マツなどの集成材の軸方向ヤング率のおよその値として、 $E = 10.0 \text{ GPa}$ 、せん断弾性係数は、軸に平行な二面のせん断変形に対するせん断弾性係数のおよその値として、 $G = 0.7 \text{ GPa}$  とする<sup>8)</sup>。断面は、等曲げを受ける集成材梁の横ねじれ座屈の実験例<sup>13)</sup>に合わせて、桁幅  $b = 3 \text{ cm}$ 、桁高  $h = 24 \text{ cm}$  とする。梁の軸長  $\ell = 4 \text{ m}$  の場合の数値解を  $M_{cr}^V$  で除した比率を要素数  $n = 2 \sim 128$  に対して、表-1に示す。数値解は、式(11)を用いて通常の弧長増分法で解いた場合、式(11)を用いずに式(12)の荷重増分  $\Delta f$  を  $M_{cr}^V$  の  $1/1000$  ずつ累積させた場合、 $1/100$  ずつ累積させた場合を併記する。

表-1 収束性 ( $\ell = 4 \text{ m}$ )

| 要素数 | 式(11) | $\Delta f = \frac{M_{cr}^V}{1000}$ | $\Delta f = \frac{M_{cr}^V}{100}$ |
|-----|-------|------------------------------------|-----------------------------------|
| 2   | 1.355 | 1.356                              | 1.357                             |
| 4   | 1.076 | 1.077                              | 1.079                             |
| 8   | 1.015 | 1.016                              | 1.020                             |
| 16  | 1.001 | 1.001                              | 1.000                             |
| 32  | 0.997 | 0.997                              | 1.000                             |
| 64  | 0.996 | 0.997                              | 1.000                             |
| 128 | 0.996 | 0.996                              | 1.000                             |

式(11)を用いた通常の弧長増分法による数値解は、Vacharajittiphan ら<sup>11)</sup>の解析解よりも0.4%ほど低めの解に収束している。式(11)を用いずに式(12)の荷重増分  $\Delta f$  を  $M_{cr}^V$  の  $1/1000$  ずつ累積させた場合の数値解の収束値は、式(11)を用いた通常の弧長増分法による数値解の収束値とこの精度では一致する。式(12)の荷重増分  $\Delta f$  を  $M_{cr}^V$  の  $1/100$  ずつと粗く累積させた場合の数値解は、 $1/1000$  で与えた場合よりも約0.4%高めの解に収束している（たまたま  $M_{cr}^V$  と一致するが）。この問題に関しては、有効数字3桁の精度を得るには、64要素で十分である。以後の解析はすべて64要素の結果である。

梁の軸長を1mから4mまで変化させた解析結果を表-2に示す。Vacharajittiphan ら<sup>11)</sup>の解析解  $M_{cr}^V$  については、その面内剛性を無限大にして面内たわみの影響を無視した解（ティモシェンコとギアーによる解<sup>10)</sup>）も併記する。式(11)を用いて通常の弧長増分法で解いた数値解については、その面内剛性を極端に大きく（ $10^6$ 倍）して面内たわみの影響を無視した解、せん断補正係数  $k$  を極端に大きく（ $10^{10}$ 倍）してせん断変形の影響を無視した解を併記する。式(11)を用いずに式(12)の荷重増分  $\Delta f$  を与えた数値解については、 $\Delta f$  を  $M_{cr}^V$  の  $1/1000$  ずつ累積させた場合、 $1/100$  ずつ累積させた場合を併記する。

表-2 等曲げを受ける直線梁の横ねじれ座屈

| $\frac{M_{cr}\ell}{EI_y}$ | $\ell(m)$                          | 1     | 2     | 3     | 4     |
|---------------------------|------------------------------------|-------|-------|-------|-------|
| $M_{cr}^V$                |                                    | 1.745 | 1.646 | 1.627 | 1.620 |
| 式(11)                     | $I_x \rightarrow \infty$           | 1.727 | 1.629 | 1.611 | 1.604 |
|                           | $I_x \rightarrow \infty$           | 1.737 | 1.639 | 1.621 | 1.614 |
|                           | $k \rightarrow \infty$             | 1.728 | 1.630 | 1.611 | 1.605 |
| 式(12)                     | $\Delta f = \frac{M_{cr}^V}{100}$  | 1.762 | 1.646 | 1.627 | 1.620 |
|                           | $\Delta f = \frac{M_{cr}^V}{1000}$ | 1.746 | 1.642 | 1.622 | 1.615 |
| 文献 <sup>13)</sup> の実験     |                                    | -     | 1.830 | 1.866 | 1.916 |

式(11)を用いた数値解は、Vacharajittiphanら<sup>11)</sup>の解析解  $M_{cr}^V$  より誤差1%以内でやや低めの解を与え、面内剛性を無限大にした解も  $M_{cr}^V$  で面内剛性を無限大にした解とほぼ一致する。せん断補正係数を無限大としても、座屈解には差が現れない。ちなみに  $\ell=1m$  ( $\ell/\sqrt{I_y/A}=113$ ) のときの座屈点のたわみは、通常のせん断補正係数を用いて解いた場合も、せん断補正係数を無限大とした場合も 3.393mm となり、4桁まで一致する。これは等曲げ問題ではせん断変形の影響がほとんど現れていないためと考えられる。式(12)を用いて荷重増分を累積させて解いた数値解は、式(11)を用いた数値解よりもやや高めの解を与える。荷重増分を  $M_{cr}^V$  の1/1000とした場合は、式(11)を用いた数値解に対する誤差は約0.5～0.1%以内であるが、荷重増分を  $M_{cr}^V$  の1/100とした場合は、約1.4～0.4%以内とやや誤差が大きくなる。その結果、 $\ell=2\sim4m$  では、たまたま  $M_{cr}^V$  と一致している。

材料定数などが違うので単純な比較はできないが、文献<sup>13)</sup>の実験値の平均値は梁の軸長が長くなるほど、梁の軸長と面外曲げ剛性で無次元化した座屈荷重  $\frac{M_{cr}\ell}{EI_y}$  は大きくなっている。これについては次節で考察する。

### 3.2 片持ち梁の横ねじれ座屈

小野ら<sup>12)</sup>が横ねじれ座屈の実験を行った片持ち梁のモデルに対して、弾塑性解析を試みる。断面は小野らも実験を行っている幅5cm×高さ25cmとし、ファイバー要素の断面分割は、各断面定数の面積積分値が有効数字3桁の精度を得るのを目安に  $n_x \times n_y = 100 \times 100$  とする。集成材の圧縮降伏応力  $\sigma_Y$  と引張破断応力  $\sigma_B$  は、文献<sup>4)</sup>などを参考にして、 $\sigma_Y = 20MPa$ ,  $\sigma_B = 40MPa$  とし、その他の弾性係数は前節と同様とする。

片持ち梁の横ねじれ座屈に対しては解析解は導かれていないが、Trahair<sup>14)</sup>が次式のような座屈公式を提案している。

$$P_{cr}^T = \frac{\sqrt{EI_y GJ}}{\ell^2} \left( 3.95 + 3.52 \sqrt{\frac{\pi^2 EI_w}{GJ \ell^2}} \right) \quad (21)$$

式中に面内剛性  $EI_x$  の項がないことから分かるように、

この式は座屈前の面内たわみの影響は考慮していない。

さて、梁の軸長  $\ell$  を2m～10mまで変化させて解析した結果を図-5に示す。

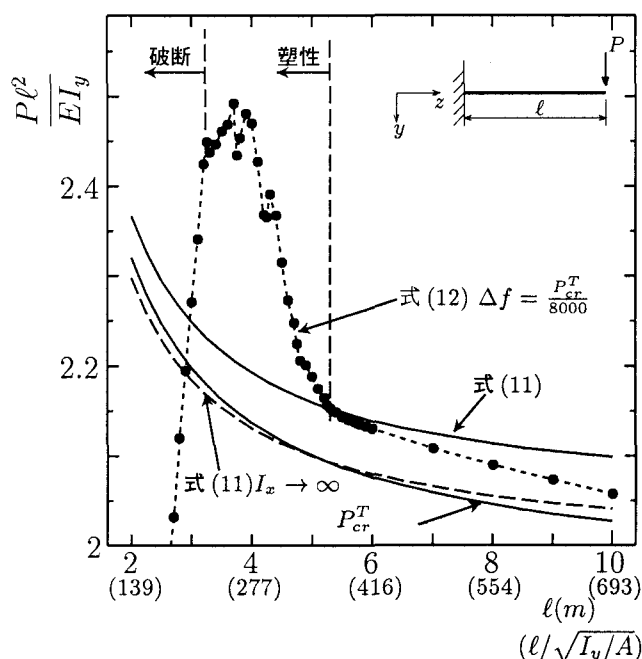


図-5 片持ち梁の横ねじれ座屈

式(12)の荷重増分  $\Delta f$  を、 $P_{cr}^T/8000$  として弾塑性解析した結果とともに、式(11)を用いた弾性解析の結果、式(11)を用いて面内剛性( $EI_x$ )を無限大とした弾性解析の結果、Trahairの解  $P_{cr}^T$  を併記する。座屈前の面内たわみの影響を考慮していないTrahairの解は、式(11)を用いて面内剛性( $EI_x$ )を無限大とした解と近い結果を示す。式(11)を用いて通常的面内剛性で解析した結果は、面内剛性を無限大とした結果よりも約2.5%ほど高い値を示すが、この差が、座屈前の面内たわみの影響と考えられる。式(12)を用いた弾塑性解は、 $\ell \geq 5.5m$  では弾性域で座屈し、 $\ell$  が大きいほど式(11)の解よりも低めの解が得られている。 $\ell \leq 5.4m$  では、軸圧縮応力が大きくなる固定端側の下部からファイバー要素が塑性化し始め、断面の剛性が低くなるためにたわみやすい梁となるため、座屈前の面内たわみも大きくなり、座屈荷重が弾性解よりも高くなるものと考えられる。但し、 $\ell$  の増加に対して、座屈荷重が単調には減少せずにギザギザと乱れが入っている。この乱れは荷重増分を粗くするほど大きくなる傾向があり、式(12)を用いて累積させた荷重を不釣合力に用いる収束アルゴリズムの影響もあるかも知れない。 $\ell \leq 3.2m$  では、固定端部引張側の破断で破壊する。

小野らの文献<sup>12)</sup>のグラフ中からおよその値が読み取れる  $\ell=3m, 3.5m, 4.5m$  の実験値を小野らの材料定数の測定値で  $P_{cr}\ell^2/EI_y$  と無次元化してみると、それぞれ、1.6, 1.8, 1.9 となり、前節の文献<sup>13)</sup>の実験と同様に

$\ell$ が大きくなるほど無次元化座屈荷重が大きくなっており、解析値とは逆の傾向を示す。ちなみにこれらの実験値は、小野らの材料定数の測定値を用いて計算した Trahair の解  $P_{cr}^T$  よりも 20% 前後低めの値ではないと思われる。

辻野の文献<sup>15)</sup>で数値が引用されている山本ら<sup>16)</sup>の行った木材の片持ち梁に対する横ねじれ座屈の実験で、梁の軸長  $\ell$  を同じ断面と断面定数で比較できるデータを以下に示す。

表-3 山本らの実験値

| $E(\text{GPa})$ | $G(\text{GPa})$ | $\ell(\text{cm})$ | $\frac{\ell}{\sqrt{I_y/A}}$ | $\frac{P_{cr}^T \ell^2}{EI_y}$ | $\frac{(\text{実験値})\ell^2}{EI_y}$ |
|-----------------|-----------------|-------------------|-----------------------------|--------------------------------|-----------------------------------|
| 14.4            | 0.83            | 30                | 1350                        | 1.679                          | 1.241                             |
| 14.4            | 0.83            | 50                | 2249                        | 1.639                          | 1.490                             |
| 11.1            | 1.02            | 70                | 2055                        | 2.299                          | 2.021                             |
| 11.1            | 1.02            | 110               | 3229                        | 2.245                          | 2.296                             |

これは細長比  $\ell/\sqrt{I_y/A}$  がかなり大きめの木材梁での実験であるが、2種の材料定数の梁について、無次元化した Trahair の解 ( $\frac{P_{cr}^T \ell^2}{EI_y}$ ) は細長比 ( $\ell/\sqrt{I_y/A}$ ) の大きい方が小さくなるのに対し、無次元化した実験値 ( $\frac{(\text{実験値})\ell^2}{EI_y}$ ) は細長比 ( $\ell/\sqrt{I_y/A}$ ) の大きい方が大きくなっている。

もっとも小野ら<sup>12)</sup>が、細長比と曲げ強度で無次元化した座屈荷重の関係で整理した実験値群 (文献<sup>13)</sup>の結果や山本ら<sup>16)</sup>の結果も含む) は、(細長比が大きいほど耐荷力が下がる) 通常の耐荷力曲線のように分布するものの、 $P_{cr}\ell^2/EI_y$  のような無次元化をした場合に、細長比 ( $\ell/\sqrt{I_y/A}$ ) の増加に対する単調増加/減少の関係が、解析値と実験値とで逆転するのは興味深い。例えば、式 (20) や式 (21) にそれぞれ  $\ell/EI_y$ 、 $\ell^2/EI_y$  をかけて無次元化した場合、 $\frac{\pi^2 EI_y}{GJ\ell^2}$  の項が根号内に残るため、 $\ell$  が大きいほど座屈荷重は小さくなる。木材の場合、そりねじり剛性  $EI_\omega$  が実は殆ど効いていないといった事情があるのだろうか。座屈実験では境界条件や載荷条件も敏感に影響するので、木材・集成材の材料特性だけの問題とは言い切れないが、これは今後の実験検証の題材になりそうである。

#### 4. まとめ

梁要素に対する有限変位・有限要素法の定式化を拡張して、集成材梁の座屈耐荷力の解析を試みた。解析解の存在する等曲げを受ける単純支持梁の横ねじれ座屈の問題に関しては、本数値解は解析解とよく一致した。実験例の存在する片持ち梁の横ねじれ座屈の問題に関しては、塑性化による断面剛性の低下の生じる領域で、本数値解は座屈前の面内たわみの影響を大きく評価しているようであるが、数値誤差による乱れのようなものが認められた。今回の解析の結果、面外曲げ剛性と梁の軸長で

無次元化した座屈荷重が、解析値では細長比が大きいほど小さくなるのに対して、実験値では逆に大きくなる傾向が複数の実験例から認められたが、この理由については、今後、解析と実験の両面から考察を続けたい。

#### 参考文献

- 1) 後藤文彦, 小林 裕, 斉木 功, 岩熊哲夫: 空間固定三軸回りの回転自由度を用いた空間梁解析, 応用力学論文集, Vol. 1, 319-327, 1998.
- 2) 後藤文彦, 小林裕, 岩熊哲夫: オイラー角を用いた簡潔な有限変位解析手法, 構造工学論文集, Vol. 43A, 333-338, 1997.
- 3) H. Gotou, T. Kuwataka, T. Nishihara and T. Iwakuma: Finite Displacement Analysis Using Rotational Degrees of Freedom about Three Right-angled Axes, Computer Modeling in Engineering & Sciences, Vol. 4, No. 2, pp.319-328, 2003.
- 4) 薄木征三, 堀江保, 亀井義典: 集成材高欄支柱の弾塑性状態における変位, 構造工学論文集, Vol.35A,1989
- 5) 土木学会: 構造工学シリーズ7 構造工学における計算力学の基礎と応用, 社団法人 土木学会, 1996.
- 6) Khaled MAALLA, Tetsuo IWAKUMA, Shigeru KURANIAHI and Yashharu FUKASAWA: A simplified spatial ultimate load analysis of members with open cross section, JSCE, No.404 I-11, pp.101-109, 1989.
- 7) 下関正義, 藤沼平一, 茅野寛奈: 反りを考慮した長方形断面アイソパラメトリック要素, ばね論文集, 第39号, p.33-39, 1994.
- 8) 後藤文彦, 麓 貴行, 薄木征三, 佐々木貴信: 曲げ試験による木材梁せん断弾性係数推定の精度, 構造工学論文集, Vol.49A, pp.875-880, 2003.
- 9) Cowper, G. R.: The shear coefficient in Timoshenko's beam theory, J. Appl. Mech., Vol.33, pp.335-340, 1966.
- 10) チモシェンコ・ギア著, 長谷川 節 訳: 弾性安定の理論上, ブレイン図書出版株式会社, 1974.
- 11) Vacharajittiphan, P., Woolcock, S. T. and Trahair, N. S.: Effect of in-plane deformation on lateral buckling, J. Struct. Mech., ASCE, Vol.3, No.1, pp.29-60, 1974.
- 12) 小野 徹郎, 井戸田 秀樹, 加藤 征宏: 集成材はりの横座屈耐力に関する考察, 日本建築学会構造系論文集 第547号, pp.121-128, 2001.
- 13) 長谷部薫・薄木征三: 集成材はりの横座屈解析と実験, 構造工学論文集, Vol. 38A, pp.963-970, 1992.
- 14) Trahair, N. S.: Flexural-Torsional buckling of structures, E & FN Spon, Chapman and Hall, London, England. 1993.
- 15) 辻野 哲司: 木質材料の応力と変形解析, 岩手大学教育学部研究年報 第41巻第1号, pp.77-107, 1981.
- 16) 山本 宏, 松本 勝彦: 木質梁の横安定性について (第1報), 北海道林産試験場研究報告, 第62号, pp.1-29, 1974.

(2004年9月17日 受付)