

k - ε モデルにおける Logarithmic form の有効性の検討と 非定常流れへの適用

Investigation of the advantages of the logarithmic form for the k - ε model and its application to unsteady flow

長谷部 寛*, 野村 卓史**

Hiroshi Hasebe, Takashi Nomura

*修士 (工学), 日本大学助手, 理工学部土木工学科 (〒101-8308 東京都千代田区神田駿河台 1-8-14)

**工博, 日本大学教授, 理工学部土木工学科 (〒101-8308 東京都千代田区神田駿河台 1-8-14)

The natural logarithmic of turbulence variables k and ε of the k - ε model guarantees positivity of these variables. This logarithmic form approach can exclude clipping or limiter. We incorporated the logarithmic form into finite element flow analysis. We simulated a backward-facing step flow using the standard k - ε model and a flow around the 2D square-cylinder using the modified k - ε model (Kato-Launder model). It is shown that logarithmic form effectively keeps adequate balance of turbulence variables during transient and unsteady process, resulting in stable flow computation.

Key Words: logarithmic form, k - ε model, finite element method, clipping

キーワード: logarithmic form, k - ε モデル, 有限要素法, clipping

1. はじめに

土木・建築構造物周りの流れなど, 乱流場を解析する際に用いられる乱流モデルの代表的なものに, k - ε モデルがある¹⁾. k - ε モデルは流速, 圧力の平均成分 U, P および, 乱流エネルギー k , エネルギー散逸率 ε を変数として構成される²⁾.

乱流エネルギー k とエネルギー散逸率 ε を数値解析的に扱う際, 計算過程で解の under shoot が起こったときなど, 物理的には非負の量であるこの2つの変数が負の値をとることがある. 変数 k, ε の値が負になった場合, そのまま計算を続けると, 運動方程式に負の渦粘性を与えることとなり, 計算に支障をきたす. そこで変数 k, ε の値を負にさせないためにとられる処置として, clipping や limiter と呼ばれる操作がある³⁾. clipping は変数が負の値になった場合, 計算に支障をきたさない適切かつ正の小さな値に置き換える, という方法である. limiter は変数の正の下限値を設定し, それ以下の値になった場合は, 値を下限値に修正にする, という方法である. どちらの操作も変数の非負性は確保される. しかし, これらの操作は物理的に全く意味を持たず, 局所的に k, ε の保存則を犯していることになるので, 数値計算から取り除かれることが好ましい.

Ilinca らは clipping や limiter の欠点を, 解の振動やノイズの混入, 局所的に過大な勾配や曲率の生成, としており, それにより解の収束性の低下や計算の破綻が引き起こされる, と指摘している^{3) 4)}. そして, clipping や limiter を回避するための手段として, logarithmic form を提案している⁴⁾. これは, k - ε モデルを例に挙げると, k および ε の対数を取り, それを新たな変数 K, E として, K, E の輸送方程式を解く. そして求めた K, E の指数をとり, k, ε の値を決定する手法である. K, E の指数をとっているため本来の変数 k, ε が負になることはない. よってこの方法は clipping や limiter を用いず変数の非負性を保証する. Ilinca らはこの方法を定常 k - ε モデルに適用し, 誤差の最小を規範とする adaptive remeshing 解析を行っている^{4) 5)}. Adaptive 法の誤差評価において, clipping や limiter による解の勾配や曲率の変動は, 解の収束性を低下させる原因となるので, 回避すべきである.

本論文では, 筆者らがこれまで構築してきた k - ε モデルを用いた有限要素法による乱流解析手法^{6) 7)} に logarithmic form を適用し, その効果を検討し考察する. 解析は, 乱流モデルのベンチマークテストによく用いられるバックステップ流れ, および Ilinca らが試みていない非定常流れへの適用を目的に, 2 次元正方形柱周りの流れの2つの問題を扱った. その結果得られた知見を報告する.

2. 基礎方程式と logarithmic form

2.1 k - ε モデル

構造物周りの流れを対象とした場合、通常は非圧縮性の流れであり、なおかつ乱流状態を呈している。このような流れを扱うために乱流モデルがよく用いられるが、その代表的なモデルに k - ε モデルがある。 k - ε モデルの運動方程式 [式 (1), (2)], 連続条件式 [式 (3)] を以下に示す。

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \boldsymbol{\Sigma} + \mathbf{f} \quad (1)$$

$$\boldsymbol{\Sigma} = -P\mathbf{I} + \mu(\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T) - \rho \overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{U} = 0 \quad (3)$$

ここで、 $\mathbf{U}$, P はそれぞれ流速、圧力の平均成分、 ρ は空気密度、 $\boldsymbol{\Sigma}$ は流体の応力を表す項、 $\mathbf{I}$ は単位行列、 μ は分子粘性係数、 $\mathbf{f}$ は外力項、 $\overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'}$ は流速の変動成分 $\mathbf{u}'$ の相関により表される Reynolds 応力である。標準 k - ε モデルでは Reynolds 応力を以下のように表す。

$$\overline{\mathbf{u}' \otimes \mathbf{u}'} = -\nu_t (\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T) + \frac{2}{3} k \mathbf{I} \quad (4)$$

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (5)$$

ここで ν_t は渦動粘性係数、 C_μ はモデル定数 (=0.09)¹⁾、 k は乱流エネルギー、 ε はエネルギー散逸率である。乱流エネルギー k 、エネルギー散逸率 ε の定義式および輸送方程式は以下のとおりである。

$$k = \frac{1}{2} \overline{\mathbf{u}' \cdot \mathbf{u}'} \quad (6)$$

$$\varepsilon = \nu \overline{\nabla \mathbf{u}' : \nabla \mathbf{u}'} \quad (7)$$

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla k = \nabla \cdot \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \nabla k \right] + P_k - \varepsilon \quad (8)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla \varepsilon = \nabla \cdot \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla \varepsilon \right] + C_{\varepsilon 1} \frac{\varepsilon}{k} P_k - C_{\varepsilon 2} \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (9)$$

ここで生産項 P_k は、無次元スカラー量 S を次のように定義し、

$$P_k = C_\mu \varepsilon S^2 \quad (10)$$

$$S = \frac{k}{\varepsilon} \sqrt{\frac{1}{2} (\nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T)^2} \quad (11)$$

と表される。モデル定数には以下の値が用いられる¹⁾。

$$C_{\varepsilon 1} = 1.44, C_{\varepsilon 2} = 1.92, \sigma_k = 1.0, \sigma_\varepsilon = 1.3 \quad (12)$$

以上が標準 k - ε モデルの基礎方程式である。

k - ε モデルには他にも RNG k - ε モデル⁸⁾、低 Re 型 k - ε モデル⁹⁾ などある。そのうち、構造物周りの流れによく用いられるモデルに Kato-Launder による修正 k - ε モデル^{10) 11)} がある。修正 k - ε モデルは標準 k - ε モデルの基礎方程式において式 (10) で定義された生産項 P_k を、無次元スカラー量 Ω を用いて次のように修正したものである。

$$P_k = C_\mu \varepsilon S \Omega \quad (13)$$

$$\Omega = \frac{k}{\varepsilon} \sqrt{\frac{1}{2} (\nabla \mathbf{U} - \nabla \mathbf{U}^T)^2} \quad (14)$$

2.2 Logarithmic form

式 (6), (7) に定義されるように、乱流エネルギー k とエネルギー散逸率 ε はどちらも非負性の変数である。これらの変数の非負性を保証するため、Ilinca らは logarithmic form を提案している⁴⁾。

logarithmic form は変数の対数を新たな変数とし、新たな変数に関する方程式を解く。 k - ε モデルの変数である k, ε に対する新たな変数は、

$$K = \ln(k), E = \ln(\varepsilon) \quad (15a, b)$$

と定義される。対数型の変数 K, E がたとえ負になったとしても k, ε は正の値をとることが保証される。

対数型変数 K, E の輸送方程式を導出する際に、以下の微分関係を用いる。

$$\frac{\partial K}{\partial t} = \frac{1}{k} \frac{\partial k}{\partial t}, \quad \nabla K = \frac{1}{k} \nabla k \quad (16a, b)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial t}, \quad \nabla E = \frac{1}{\varepsilon} \nabla \varepsilon \quad (16c, d)$$

式 (8) を k で、式 (9) を ε で除し、式 (16a-d) を用いることで、対数型変数 K, E の輸送方程式は以下のように導かれる。

$$\frac{\partial K}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla K = \nabla \cdot \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \nabla K \right] + \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) (\nabla K)^2 + e^{-K} P_k - \frac{C_\mu}{\nu_t} e^K \quad (17)$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} + \mathbf{U} \cdot \nabla E = \nabla \cdot \left[\left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla E \right] + \left(\nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) (\nabla E)^2 + C_{\varepsilon 1} e^{-K} P_k - C_{\varepsilon 2} e^{E-K} \quad (18)$$

ここで、 K 方程式 [式 (17)] の消散項に対して式 (5) の関係を用い、 E を消去している。式 (17), (18) の右辺に新たに勾配の 2 乗の項が現れるが、これらは k, ε 方程式の拡散項から得られる項で、本論文ではこれを第 2 拡散項と呼ぶこととする。方程式に第 2 拡散項が加わることが logarithmic form と変数の対数をとらない方程式との大きな違いである。なお本論文では、変数の対数をとらない方程式を normal form と呼んで区別する。

2.3 境界条件

式 (1), (3), (17), (18) の境界条件として、流速、乱流エネルギー、エネルギー散逸率の値を規定する境界 Γ_1 、およびトラクションおよび変数の勾配を規定する境界 Γ_2 にはそれぞれ、

$$\mathbf{U} = \bar{\mathbf{U}}, \quad k = \bar{k}, \quad \varepsilon = \bar{\varepsilon} \quad \text{on } \Gamma_1 \quad (19a-c)$$

$$\boldsymbol{\Sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t}_U, \quad \frac{\partial K}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{t}_K, \quad \frac{\partial E}{\partial \mathbf{n}} = \mathbf{t}_E \quad \text{on } \Gamma_2 \quad (20a-c)$$

を与え、固体境界 Γ_3 に対しては壁関数¹²⁾を用いる。本研究で用いた壁関数に関しては 3.2 に述べる。

3. 解析アルゴリズム

3.1 有限要素法による離散化

本論文では 2 次元解析を対象とし、空間の離散化に有限要素法を用いた。用いた要素は双線形四角形要素である。平均流速 $\mathbf{U}$ 、対数型の乱流エネルギー K 、エネルギー散逸率 E の重み関数および試行関数に関しては、要素内双線形分布の補間関数を用い、重み関数を $\mathbf{w}_h$ 、試行関数をそれぞれ $\mathbf{U}_h$ 、 K_h 、 E_h と表わす。平均圧力 P は、要素内一定の補間関数を用い、重み関数を q_h 、試行関数を P_h とする。渦動粘性係数 ν_t は要素内一定評価とし、これを ν_{th} で表す。また、安定化手法として SUPG (Streamline Upwind / Petrov-Galerkin) 法¹³⁾を用いた。

以上に従い標準 $k-\varepsilon$ モデルの logarithmic form の基礎方

程式のうち、式 (1), (3) の重み付き残差方程式の弱形式を導くと以下のように表される。

・運動方程式

$$\begin{aligned} & \int_V \mathbf{w}_h \cdot (\dot{\mathbf{U}}_h + \mathbf{U}_h \cdot \nabla \mathbf{U}_h - \mathbf{f}_h) dV \\ & + \int_V \nabla \mathbf{w}_h \cdot \left\{ P_h + (\nu + \nu_{th}) (\nabla \mathbf{U}_h + \nabla \mathbf{U}_h^T) \right\} dV \\ & + \sum_e \int_{V_e} \tau_u \mathbf{U}_h \cdot \nabla \mathbf{w}_h \cdot (\dot{\mathbf{U}}_h + \mathbf{U}_h \cdot \nabla \mathbf{U}_h) dV \\ & = \int_{\Gamma_2} \mathbf{w}_h \cdot \left\{ -P_h + (\nu + \nu_{th}) (\nabla \mathbf{U}_h + \nabla \mathbf{U}_h^T) \cdot \mathbf{n} \right\} d\Gamma \end{aligned} \quad (21)$$

・連続条件式

$$\int_V q_h \nabla \cdot \mathbf{U}_h dV = 0 \quad (22)$$

ここで V は有限要素で離散化する解析対象領域を表す。式 (21) の V_e は各々の要素を表し、左辺第 3 項は要素ごとの積分の和をとることを意味する。 Γ_2 は領域 V の境界 Γ のうち、自然境界条件 [式 (20a-c)] が与えられる境界を表わす。 τ_u は SUPG 法¹³⁾における安定化パラメータである。

さらに、式 (17), (18) の重み付き残差方程式の弱形式は次のように表される。

・ K 方程式

$$\begin{aligned} & \int_V \mathbf{w}_h \cdot \left\{ \dot{K}_h + \mathbf{U}_h \cdot \nabla K_h - \left(\nu + \frac{\nu_{th}}{\sigma_k} \right) \nabla K_h \cdot \nabla K_h \right\} dV \\ & + \int_V \nabla \mathbf{w}_h \cdot \left(\nu + \frac{\nu_{th}}{\sigma_k} \right) \nabla K_h dV \\ & + \sum_e \int_{V_e} \tau_K \mathbf{U}_h \cdot \nabla \mathbf{w}_h \cdot \left\{ \dot{K}_h + \mathbf{U}_h \cdot \nabla K_h \right. \\ & \quad \left. - \left(\nu + \frac{\nu_{th}}{\sigma_k} \right) \nabla K_h \cdot \nabla K_h - P_{kh} \cdot \left(e^{-K} \right)_h + \frac{C_\mu}{\nu_{th}} \left(e^K \right)_h \right\} dV \\ & = \int_V \mathbf{w}_h \cdot \left\{ P_{kh} \cdot \left(e^{-K} \right)_h - \frac{C_\mu}{\nu_{th}} \left(e^K \right)_h \right\} dV \\ & + \int_{\Gamma_2} \mathbf{w}_h \cdot \frac{\partial K_h}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma \end{aligned} \quad (23)$$

・E 方程式

$$\begin{aligned}
 & \int_V \mathbf{w}_h \cdot \left\{ \dot{E}_h + \mathbf{U}_h \cdot \nabla E_h - \left(\nu + \frac{\nu_{th}}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla E_h \cdot \nabla E_h \right\} dV \\
 & + \int_V \nabla \mathbf{w}_h \cdot \left(\nu + \frac{\nu_{th}}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla E_h dV \\
 & + \sum_e \int_{V_e} \tau_E \mathbf{U}_h \cdot \nabla \mathbf{w}_h \cdot \left\{ \dot{E}_h + \mathbf{U}_h \cdot \nabla E_h \right. \\
 & \quad \left. - \left(\nu + \frac{\nu_{th}}{\sigma_\varepsilon} \right) \nabla E_h \cdot \nabla E_h - C_{\varepsilon 1} P_{kh} \cdot (e^{-K})_h + C_{\varepsilon 2} (e^{E-K})_h \right\} dV \\
 & = \int_V \mathbf{w}_h \cdot \left\{ C_{\varepsilon 1} P_{kh} \cdot (e^{-K})_h - C_{\varepsilon 2} (e^{E-K})_h \right\} dV \\
 & + \int_{\Gamma_2} \mathbf{w}_h \cdot \frac{\partial E_h}{\partial \mathbf{n}} d\Gamma \quad (24)
 \end{aligned}$$

ここで、 τ_K, τ_E は SUPG 法における安定化パラメータである¹³⁾。

以上の標準 $k-\varepsilon$ モデルの logarithmic form における基礎方程式の重み付き残差方程式[式(21), (22), (23), (24)]から導かれる有限要素方程式は以下のとおりである。

$$\mathbf{M}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{N}(\mathbf{U})\mathbf{U} + \mathbf{D}\mathbf{U} - \mathbf{G}\mathbf{P} = \mathbf{f} \quad (25a)$$

$$\mathbf{G}^T \mathbf{U} = \mathbf{0} \quad (25b)$$

$$\mathbf{M}^K \dot{\mathbf{K}} + \mathbf{N}^K(\mathbf{U})\mathbf{K} + \mathbf{D}^K \mathbf{K} - \tilde{\mathbf{D}}^K(\mathbf{K})\mathbf{K} = \mathbf{S}^K \quad (25c)$$

$$\mathbf{M}^E \dot{\mathbf{E}} + \mathbf{N}^E(\mathbf{U})\mathbf{E} + \mathbf{D}^E \mathbf{E} - \tilde{\mathbf{D}}^E(\mathbf{E})\mathbf{E} = \mathbf{S}^E \quad (25d)$$

ここで、 $\mathbf{M}, \mathbf{M}^K, \mathbf{M}^E$ は質量マトリックス、 $\mathbf{N}, \mathbf{N}^K, \mathbf{N}^E$ は移流項のマトリックス、 $\mathbf{D}, \mathbf{D}^K, \mathbf{D}^E$ は拡散項のマトリックス、 $\mathbf{G}$ は空間勾配に関するマトリックス、 $\tilde{\mathbf{D}}^K, \tilde{\mathbf{D}}^E$ は第2拡散項のマトリックスである。 $\mathbf{S}^K, \mathbf{S}^E$ は生産項、消散項からなるベクトル、 $\mathbf{U}, \mathbf{P}, \mathbf{f}, \mathbf{K}, \mathbf{E}$ はそれぞれ、平均流速の節点ベクトル、平均圧力の要素ベクトル、外力、対数型の乱流エネルギー、エネルギー散逸率の節点ベクトルである。

第2拡散項のマトリックス $\tilde{\mathbf{D}}^K, \tilde{\mathbf{D}}^E$ は $(\nu + \nu_{th}/\sigma_k) \nabla K_h$ および $(\nu + \nu_{th}/\sigma_\varepsilon) \nabla E_h$ を係数とする非線形マトリックスである。ここで勾配 $\nabla K_h, \nabla E_h$ の値は、要素積分に Gauss の求積法の4点積分を用いているので、各 Gauss 点の値を用いた。

なお、式(23), (24)の生産項 P_k の算出に必要な流速勾配 $\nabla \mathbf{U}$ を求める際に若干の工夫を加えている⁶⁾。 $\nabla \mathbf{U}$ は Gauss 点で評価され、一つの要素で4つの値を持つこと

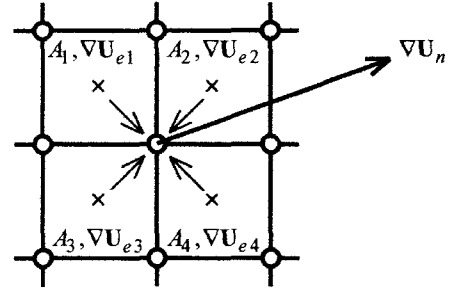


図1 生産項 P_k における流速勾配 $\nabla \mathbf{U}$ の評価方法

となる。しかし、 P_k における $\nabla \mathbf{U}$ に限り、これを節点で評価している。 $\nabla \mathbf{U}$ を節点で評価することで、 P_k 中のスカラー変数 S, Ω [式(11), (14)] の計算が容易に行える。またスカラー変数 S, Ω を節点で評価することで、修正 $k-\varepsilon$ モデルの生産項 P_k の離散化に対する見通しが良くなる。その具体的方法は、図1に示すように、着目する節点を囲む各要素 e_i の要素中心で $\nabla \mathbf{U}$ を評価し、要素面積 A_i を重みとする重み付き平均することで、 $\nabla \mathbf{U}$ の節点値 $\nabla \mathbf{U}_n$ を評価する。式で表すと以下のとおりである。

$$\nabla \mathbf{U}_n = \sum_i (A_i \cdot \nabla \mathbf{U}_{ei}) / \sum_i A_i \quad (26)$$

3.2 壁関数

壁関数は Mohammadi ら¹⁴⁾ を参考に、壁面せん断応力 τ_w を境界条件として与える方法を用いた。壁関数を用いる場合の節点位置および変数配置は加藤¹¹⁾ に従い、図2に示すとおりとした。解析メッシュにおいて固体境界を表現する節点は、物理境界から仮想的な厚さ δ_w だけ離れた位置に設置する。壁関数による境界条件の算出方法は、乱流エネルギー k の境界上節点の値を k_p とし、境界上節点において物理境界からの無次元距離 y^+ を次式(27)より求める。

$$y^+ = \frac{C_\mu^{1/4} k_p^{1/2} \delta_w}{\nu} \quad (27)$$

次に境界接線方向流速 U_{ref} を参照し、壁面せん断応力 τ_w を次式(28a)と(28b)のいずれかによって求める。

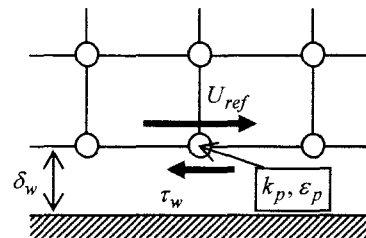


図2 壁関数における節点位置と変数配置

$$\tau_w = -\frac{\rho C_\mu^{1/4} k_p^{1/2}}{\kappa \ln(C_E y^+)} \cdot U_{ref} \quad (y^+ \geq y_c^+) \quad (28a)$$

$$\tau_w = -\mu \frac{U_{ref}}{\delta_w} \quad (y^+ < y_c^+) \quad (28b)$$

ここで ρ は密度, μ は粘性率である. κ は Karman 定数, C_E は ラフネス・パラメータであり, 本論文ではそれぞれ, 0.4187, 9.793 とし, $y_c^+ = 11.63$ とした^{1) 2) 11)}.

運動方程式, および K 方程式は壁面せん断応力 τ_w を境界条件として方程式を解く. 一方 E 方程式に対しては次式 (29) により ε の境界値 ε_p を規定し, その自然対数を取り, E 方程式の境界条件とする.

$$\varepsilon_p = \frac{C_\mu^{3/4} k_p^{3/2}}{\kappa \delta_w} \quad (29)$$

3.3 時間積分アルゴリズム

時間積分法には Predictor-Corrector 法¹³⁾ を用いた. 以下に時刻 t_n から $t_{n+1}(=t_n + \Delta t)$ への時間積分のアルゴリズムを構成する関係式を示す.

i) Predictor Phase ($i = 0$)

$$\begin{cases} \mathbf{U}_{n+1}^{(0)} = \mathbf{U}_n + \Delta t(1 - \theta)\dot{\mathbf{U}}_n \end{cases} \quad (30a)$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{U}}_{n+1}^{(0)} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (30b)$$

$$\begin{cases} \mathbf{P}_{n+1}^{(0)} = \mathbf{P}_n \end{cases} \quad (30c)$$

$$\begin{cases} \mathbf{K}_{n+1}^{(0)} = \mathbf{K}_n + \Delta t(1 - \theta)\dot{\mathbf{K}}_n \end{cases} \quad (30d)$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{K}}_{n+1}^{(0)} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (30e)$$

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{n+1}^{(0)} = \mathbf{E}_n + \Delta t(1 - \theta)\dot{\mathbf{E}}_n \end{cases} \quad (30f)$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{E}}_{n+1}^{(0)} = \mathbf{0} \end{cases} \quad (30g)$$

ii) Solution Phase ($i = 1, 2$)

$$\begin{cases} \mathbf{M}_L \Delta \dot{\mathbf{U}}^{*(i)} = \mathbf{f} - \mathbf{M} \dot{\mathbf{U}}_{n+1}^{(i)} - \mathbf{N}(\mathbf{U}_{n+1}^{(i)}) \mathbf{U}_{n+1}^{(i)} \\ \quad - \mathbf{D} \mathbf{U}_{n+1}^{(i)} + \mathbf{G} \mathbf{P}_{n+1}^{(i)} \end{cases} \quad (31a)$$

$$\begin{cases} \mathbf{U}^{*(i)} = \mathbf{U}_{n+1}^{(i)} + \Delta t \theta \Delta \dot{\mathbf{U}}^{*(i)} \end{cases} \quad (31b)$$

$$\begin{cases} \left\{ \mathbf{G}^T (\mathbf{M}_L)^{-1} \mathbf{G} \right\} \Delta \mathbf{P}^{(i)} = \mathbf{G}^T \mathbf{U}^{*(i)} / \Delta t \theta \end{cases} \quad (31c)$$

$$\begin{cases} \Delta \dot{\mathbf{U}}_{n+1}^{(i)} = \Delta \dot{\mathbf{U}}^{*(i)} + (\mathbf{M}_L)^{-1} \mathbf{G} \Delta \mathbf{P}^{(i)} \end{cases} \quad (31d)$$

$$\begin{cases} \mathbf{M}_L^K \Delta \dot{\mathbf{K}}_{n+1}^{(i)} = \mathbf{S}^K - \mathbf{M}^K \dot{\mathbf{K}}_{n+1}^{(i)} - \mathbf{N}^K(\mathbf{U}_{n+1}^{(i)}) \mathbf{K}_{n+1}^{(i)} \\ \quad - \mathbf{D}^K \mathbf{K}_{n+1}^{(i)} + \tilde{\mathbf{D}}^K(\mathbf{K}_n) \mathbf{K}_{n+1}^{(i)} \end{cases} \quad (31e)$$

$$\begin{cases} \mathbf{M}_L^E \Delta \dot{\mathbf{E}}_{n+1}^{(i)} = \mathbf{S}^E - \mathbf{M}^E \dot{\mathbf{E}}_{n+1}^{(i)} - \mathbf{N}^E(\mathbf{U}_{n+1}^{(i)}) \mathbf{E}_{n+1}^{(i)} \\ \quad - \mathbf{D}^E \mathbf{E}_{n+1}^{(i)} + \tilde{\mathbf{D}}^E(\mathbf{E}_n) \mathbf{E}_{n+1}^{(i)} \end{cases} \quad (31f)$$

iii) Corrector Phase ($i = 1, 2$)

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{U}}_{n+1}^{(i)} = \dot{\mathbf{U}}_{n+1}^{(i-1)} + \Delta \dot{\mathbf{U}}_{n+1}^{(i-1)} \end{cases} \quad (32a)$$

$$\begin{cases} \mathbf{U}_{n+1}^{(i)} = \mathbf{U}_{n+1}^{(i-1)} + \Delta t \theta \Delta \dot{\mathbf{U}}_{n+1}^{(i-1)} \end{cases} \quad (32b)$$

$$\begin{cases} \mathbf{P}_{n+1}^{(i)} = \mathbf{P}_{n+1}^{(i-1)} + \Delta \mathbf{P}^{(i-1)} \end{cases} \quad (32c)$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{K}}_{n+1}^{(i)} = \dot{\mathbf{K}}_{n+1}^{(i-1)} + \Delta \dot{\mathbf{K}}_{n+1}^{(i-1)} \end{cases} \quad (32d)$$

$$\begin{cases} \mathbf{K}_{n+1}^{(i)} = \mathbf{K}_{n+1}^{(i-1)} + \Delta t \theta \Delta \dot{\mathbf{K}}_{n+1}^{(i-1)} \end{cases} \quad (32e)$$

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{E}}_{n+1}^{(i)} = \dot{\mathbf{E}}_{n+1}^{(i-1)} + \Delta \dot{\mathbf{E}}_{n+1}^{(i-1)} \end{cases} \quad (32f)$$

$$\begin{cases} \mathbf{E}_{n+1}^{(i)} = \mathbf{E}_{n+1}^{(i-1)} + \Delta t \theta \Delta \dot{\mathbf{E}}_{n+1}^{(i-1)} \end{cases} \quad (32g)$$

計算手順は以下のとおりである. 第 1 段階として, Predictor Phase の式 (30a) ~ (30g) により予測子を求める. ここで, $\theta = 0.55$ を用いた.

次に予測子をもとに, Solution Phase の方程式を解く. ここで $\mathbf{M}_L, \mathbf{M}_L^K, \mathbf{M}_L^E$ はそれぞれ, $\mathbf{M}, \mathbf{M}^K, \mathbf{M}^E$ の lumped mass である. $\mathbf{K}, \mathbf{E}$ の時間微分の増分値 $\Delta \dot{\mathbf{K}}, \Delta \dot{\mathbf{E}}$ は, $\mathbf{K}, \mathbf{E}$ 方程式の残差より求まる [式 (31e), (31f)].

流速, 圧力に関しては, (n+1) ステップの流速 $\mathbf{U}_{n+1}$ が連続条件を満たすよう加速度増分 $\Delta \dot{\mathbf{U}}$ および圧力増分 $\Delta \mathbf{P}$ が決定される. まず式 (31a), (31b) より流速の中間値 $\mathbf{U}^*$ を計算する. 続いて, 運動方程式に連続条件を課すことで導かれる圧力方程式 [式 (31c)] を解き, 圧力増分 $\Delta \mathbf{P}$ を求める. 本論文では圧力方程式の解法には CG 法を用いた. そして圧力増分 $\Delta \mathbf{P}$ を使い, 式 (31d) により, (n+1) ステップの流速 $\mathbf{U}_{n+1}$ に対し連続条件を満足する加速度増分 $\Delta \dot{\mathbf{U}}$ を求める.

最後に Solution Phase で得られた加速度, および時間微分値の増分を用いて, Corrector Phase の式 (32a) ~ (32g) により修正子を求める. その後, 再度 ii) iii) に戻り, 方程式を解いて値を修正する. つまり Solution Phase, Corrector Phase は 1 ステップで各 2 回ずつ繰り返し計算される. また 1 ステップ中, $\mathbf{K}, \mathbf{E}$ の値が更新される毎に, 壁関数により固体境界の境界条件を更新している.

非線形項である移流項 $\mathbf{N}(\mathbf{U}_{n+1}^{(i)}) \mathbf{U}_{n+1}^{(i)}, \mathbf{N}^K(\mathbf{U}_{n+1}^{(i)}) \mathbf{K}_{n+1}^{(i)}, \mathbf{N}^E(\mathbf{U}_{n+1}^{(i)}) \mathbf{E}_{n+1}^{(i)}$ は, すべての変数を iteration 中の最新の値を用い, 第 2 拡散項 $\tilde{\mathbf{D}}^K(\mathbf{K}_n) \mathbf{K}_{n+1}^{(i)}, \tilde{\mathbf{D}}^E(\mathbf{E}_n) \mathbf{E}_{n+1}^{(i)}$ は 2 つの変数のうち 1 つを前のステップの値で固定し, もう 1 つを iteration 中の最新の値として計算している.

4. 数値解析結果

4.1 バックステップ流れの解析

Logarithmic form の効果を検討するためにバックステップ流れの計算を行った。バックステップ流れは、ステップ背後に形成される渦の再付着距離を測定することで、乱流モデルの精度を確認するベンチマークとして、数多く取り上げられる問題である。

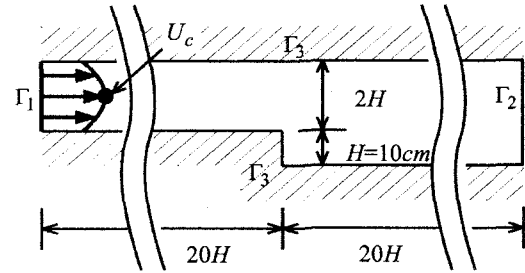
バックステップ流れの問題において、logarithmic form を適用した標準 $k-\varepsilon$ モデルと、変数の対数をとらない元のままの標準 $k-\varepsilon$ モデル（以後 normal form と呼ぶ）を解いた場合の解析精度の比較、logarithmic form により回避される clipping の影響、そして logarithmic form の効果を検討した。

本論文では Kasagi らの実験¹⁵⁾を比較対象とした。解析条件を図3に示す。図4はステップ近傍のメッシュパターンを示す。解析メッシュの総節点数は4719、総要素数は4502である。Reynolds 数は、ドライバー部であるチャネルの中心流速 U_c およびステップ高さ H を基準とし、 $Re = 5500$ となっている。流入境界 Γ_1 における流速分布は、実験におけるステップのすぐ上流断面での流速分布を与えている。上下境界は固体境界とし、壁関数を用いた。解析は標準 $k-\varepsilon$ モデルを用いて行った。また normal form では、 k, ε が負になった場合、clipping を行い、 $k = 0.01\text{cm}^2/\text{s}^2$, $\varepsilon = 0.01\text{cm}^2/\text{s}^3$ に修正している。

(1) 渦の再付着距離の比較

図5, 6に normal form および logarithmic form の定常状態における流線を示す。表1には渦の再付着距離を実験値もあわせて示した。どちらの結果も実験値と比べて渦の再付着距離が短い。Ferziger ら¹⁶⁾によれば、標準 $k-\varepsilon$ モデルを用いた場合、渦の再付着距離が15%程度短く評価されると報告されており、本論文の解析結果は、標準 $k-\varepsilon$ モデルを用いたものとしては、normal form と logarithmic form とともに良好な結果が得られたといえる。

次頁の図7, 8はそれぞれステップ後方における水平方向流速、乱流エネルギーを実験値と比較したものである。図7は流入境界中心流速 U_c で無次元化し、図8は U_c^2 で無次元化している。主流方向の流速分布（図7）は全体的に実験値とよく一致しているが、壁の近傍では実験値から外れる。乱流エネルギー（図8）は実験値を定性的にとらえているが、定量的には実験値と若干差がある。これらの分布傾向は、Avva らの解析結果¹⁷⁾においても同様にして見られる。また logarithmic form において、渦の再付着距離が normal form よりも長くなった要因は、既往の研究¹⁸⁾において述べられているように、乱流エネルギー（図8）が低下したためと考えられる。



$$\Gamma_1 : U_c = 80.37\text{cm/s}, I_u = 2\%, \nu_t = 100\nu$$

$$k_{in} = (I_u \cdot U)^2, \varepsilon_{in} = C_\mu k^2 / \nu_t$$

$$\Gamma_2 : \Sigma \cdot \mathbf{n} = \partial K / \partial \mathbf{n} = \partial E / \partial \mathbf{n} = 0$$

$$\Gamma_3 : \text{壁関数}$$

図3 バックステップ流れ解析条件

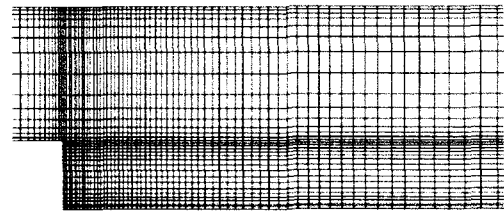


図4 ステップ近傍メッシュ図

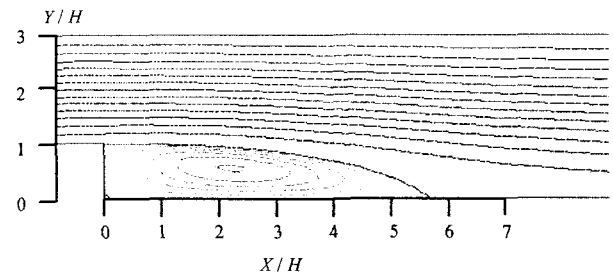


図5 normal form における流線（定常状態）

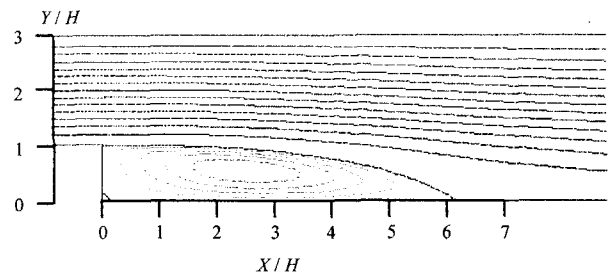


図6 logarithmic form における流線（定常状態）

表1 渦の再付着距離の比較

	normal form	logarithmic form	実験値
X/H	5.7	6.1	6.5

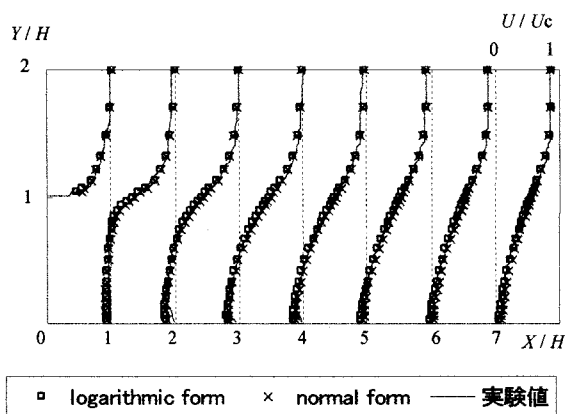


図7 水平方向流速分布（定常状態）

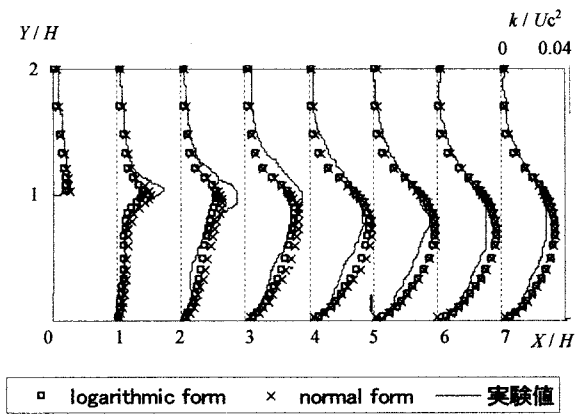
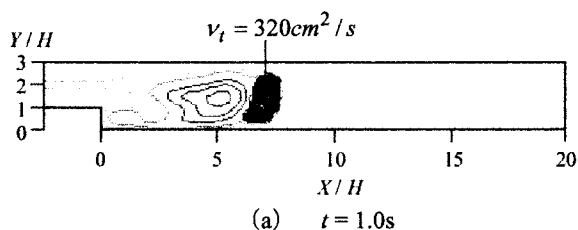
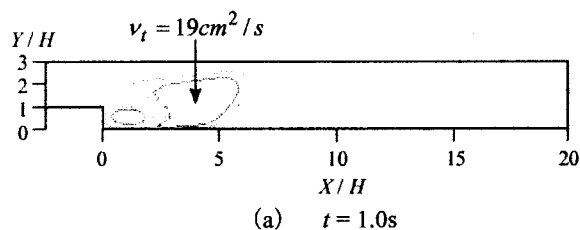


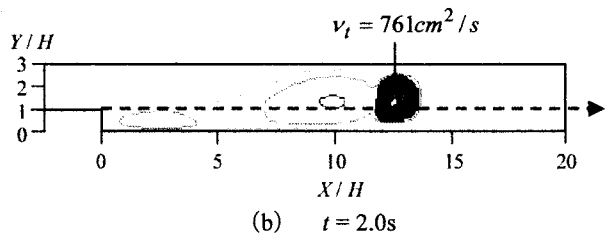
図8 乱流エネルギー分布（定常状態）



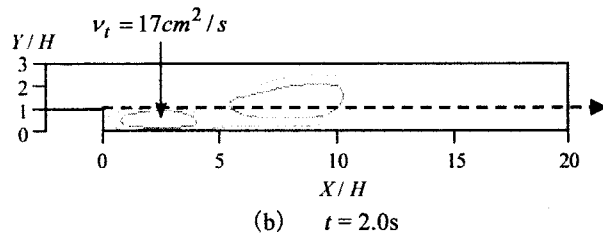
(a) $t = 1.0s$



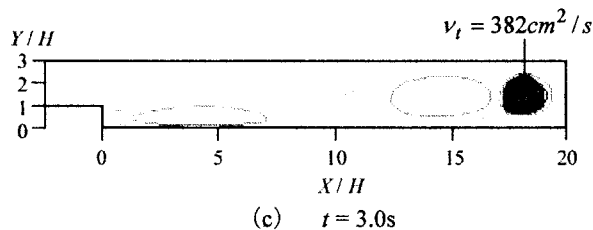
(a) $t = 1.0s$



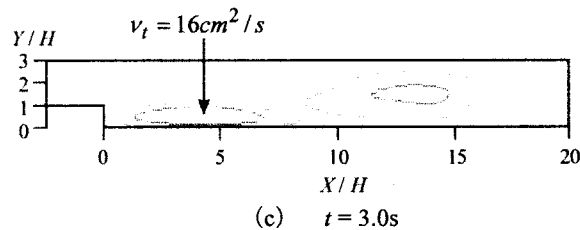
(b) $t = 2.0s$



(b) $t = 2.0s$



(c) $t = 3.0s$



(c) $t = 3.0s$

図9 1.0～3.0s での渦粘性係数分布の変化
(normal form)

図10 1.0～3.0s での渦粘性係数分布の変化
(logarithmic form)

(2) logarithmic form の効果と clipping の影響

定常状態においては normal form と logarithmic form の間には、それほど大きな差は見られなかった。ところが解が定常状態に至る過渡的な過程、特に計算初期段階での挙動に関して、大きな差が見られた。

図9, 10は計算開始から1s後, 2s後, 3s後における渦粘性係数の分布図である。コンター間隔は $5\text{cm}^2/\text{s}$ としている。logarithmic form では渦粘性係数の最大値は $v_t = 20\text{cm}^2/\text{s}$ 程度で推移しているのに対し, normal form ではその10～30倍の非常に大きな渦粘性が生じている。

図11, 12は, 図9, 10の(b) $t = 2.0s$ の図中に破線矢

印で示した $Y/H = 1$ の線上の, 乱流エネルギー k , エネルギー散逸率 ε , 渦粘性係数 v_t の水平方向分布を示したものである。 k, ε については対数目盛りでプロットしている。normal form において $X/H = 12$ 付近で v_t が非常に大きくなっているが, ここでは ε のみが周辺と比べ小さい値となっている。 k が小さくなっているのは $X/H = 15$ 付近である。乱流エネルギー k およびエネルギー散逸率 ε は, 本来 k が大きいところは ε も大きいというバランス関係がある物理量である¹⁹⁾。しかし normal form では k, ε のバランスが崩れ, その仮定が成立していない。一方 logarithmic form では $X/H = 12$ 付近で k, ε とともに周辺

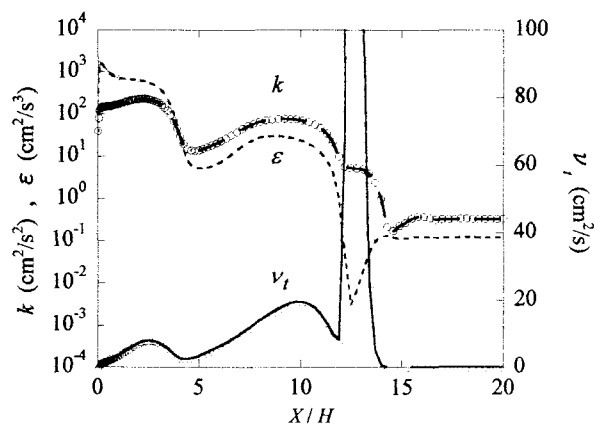


図 11 $Y/H=1$ における乱流量水平方向分布
(normal form $t=2.0s$)

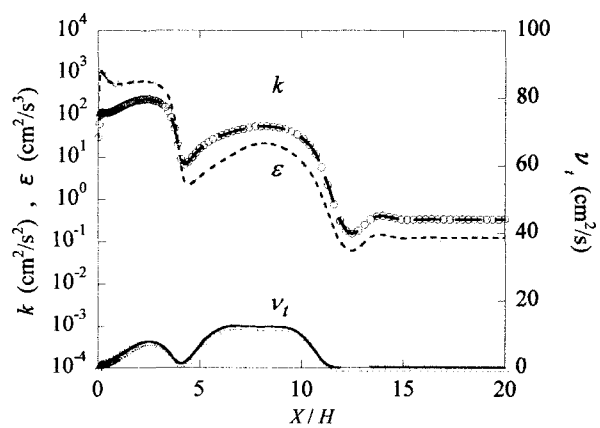


図 12 $Y/H=1$ における乱流量水平方向分布
(logarithmic form $t=2.0s$)

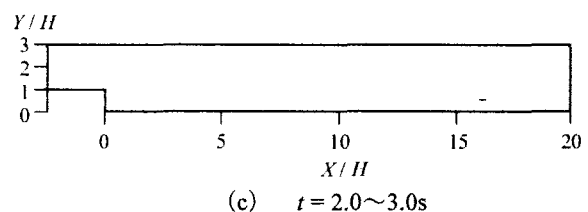
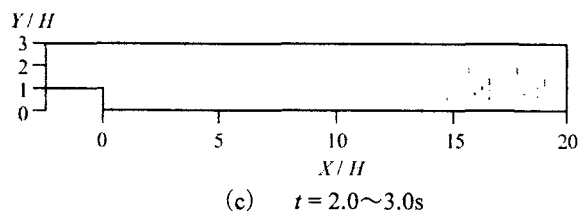
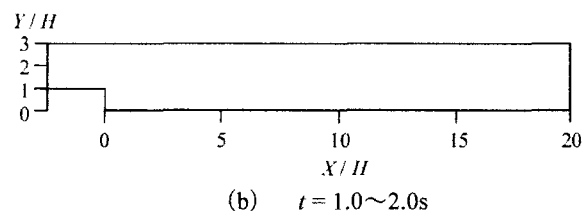
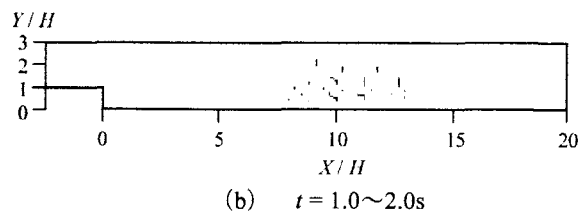
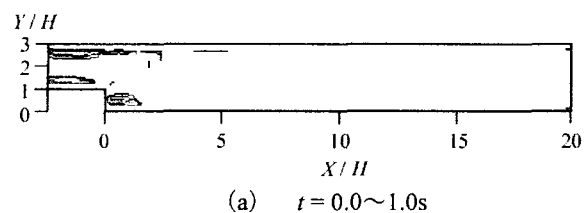
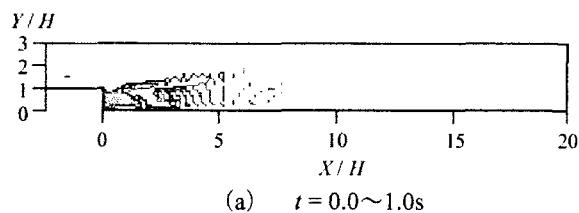


図 13 乱流エネルギー k に対し clipping が発生した箇所

図 14 エネルギー散逸率 ε に対し clipping が発生した箇所

と比べ値が減少しており、 k, ε のバランスは崩れていない。 ν_t の定義式 [式 (5)] から明らかなように、 k, ε のバランスが保たれていれば ν_t が局所的に過大になるようなことはない。

続いて、clipping の影響について検討を行った。図 13, 14 はそれぞれ k, ε に対して、 $0.0\sim1.0s$, $1.0\sim2.0s$, $2.0\sim3.0s$ の各 $1s$ の間で clipping が生じた箇所を示している。 $0.0\sim1.0s$ では、 k については、ステップ背後で発生回数が多く、最大 17 回の clipping が生じた節点があったが、ほとんどの節点で 4, 5 回程度であった。また ε に関しては、こちらもステップ近傍に clipping 発生箇所が集中

しており、こちらは 1 節点で最大 4 回、ほとんどの節点で 1 回というように、発生回数は少ない。

時間範囲 $1.0\sim2.0s$, $2.0\sim3.0s$ では ε の clipping はほとんど生じておらず、 k には clipping が若干生じたものの、その回数は 1 節点 1 回とごくわずかであった。

前述の normal form における渦粘性係数 ν_t の変化 [図 9] と合わせて図 13, 14 を見ると、局所的に過大な ν_t が発生している箇所よりも下流側では clipping は生じていない。つまり局所的に過大な ν_t が clipping を生じさせていると考えられる。よって問題は k, ε のバランスが崩れることにあるといえよう。

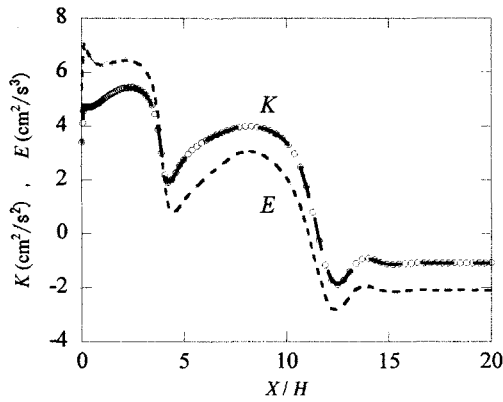


図 15 $Y/H=1$ における乱流量水平方向分布
(logarithmic form $t=2.0s$ 対数型変数表示)

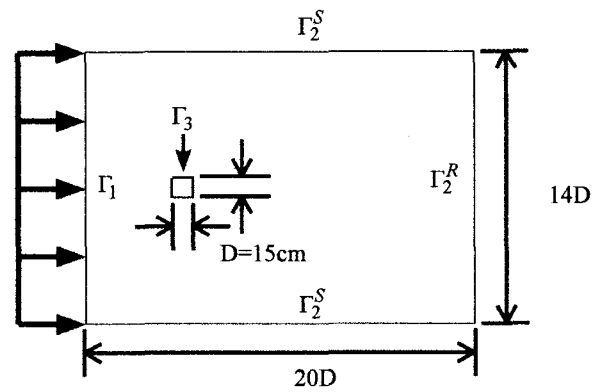
図 11, 12 から k, ε のバランスが崩れる理由を推測すると、 $X/H=12$ 付近は k, ε の発達した領域と未発達の領域のちょうど境目になっており、過渡的な流れ場となっている。また、図 11, 12 の $X/H=10$ と $X/H=15$ では k, ε の値には $O(10^2)$ の差がある。そのため $X/H=12$ 付近では変数の勾配が周辺と比べ大きい。図 15 は、図 12 に示された $Y/H=1$ の線上の、乱流エネルギー k 、エネルギー散逸率 ε の自然対数をとった logarithmic form の変数 K, E をプロットしたものである。 $X/H=10$ と $X/H=15$ での K, E の差は $O(1)$ である。

以上の結果から、流れが過渡的な段階で k, ε の勾配が大きくなる箇所において、normal form では k, ε のバランスが崩れてしまうところを、logarithmic form は k, ε の対数をとった変数 K, E の勾配が数値的に小さいために、 k, ε のバランスを保持する効果があると推測される。したがって、logarithmic form は過渡的な状態が常に生じている流れ、つまり非定常流に対して有効な手法であることが予想される。

4.2 2次元正方形角柱周りの流れの解析

4.1 で考察したように、logarithmic form は流れが過渡的な状況に対し効果的であった。そこで過渡的な状態が常に生じている非定常流での有効性を確認するために、周期的な渦放出を伴う 2 次元正方形角柱周りの流れの解析を行った。解析結果は、角柱に作用する空気力係数を加藤の解析結果および実験値¹¹⁾と比較した。

解析条件を図 16 に示す。流入境界において、流速 U 、乱流エネルギー k 、エネルギー散逸率 ε は一定分布で与え、流入流速 U および角柱辺長 D により定義される Reynolds 数は 22000 である。図 17, 18 に解析メッシュを示す。メッシュの総節点数は 6378、総要素数は 6169 である。2 次元正方形角柱周りの流れは角柱前面での衝突流を含む流れであるので、乱流モデルには Kato-Launder による修正 $k-\varepsilon$ モデル¹⁰⁾を用いた。修正 $k-\varepsilon$ モデルは式 (13) のように、標準 $k-\varepsilon$ モデルの生産項 P_k の評価方法のみを



$$\begin{aligned}\Gamma_1: U &= 214.3 \text{ cm/s}, \\ k &= 18.4 \text{ cm}^2/\text{s}^2, \varepsilon = 2.1 \text{ cm}^2/\text{s}^3 \\ \Gamma_2^S: V &= \partial K / \partial \mathbf{n} = \partial E / \partial \mathbf{n} = 0 \\ \Gamma_2^R: \Sigma \cdot \mathbf{n} &= \partial K / \partial \mathbf{n} = \partial E / \partial \mathbf{n} = 0 \\ \Gamma_3: &\text{壁関数}\end{aligned}$$

図 16 2次元正方形角柱解析条件

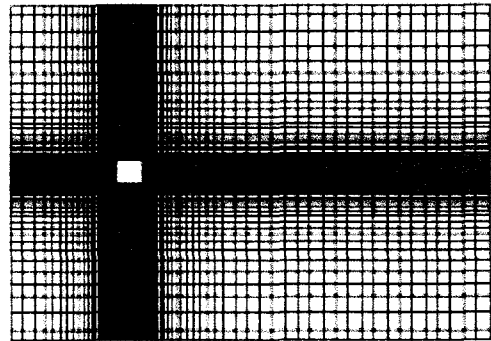


図 17 解析メッシュ

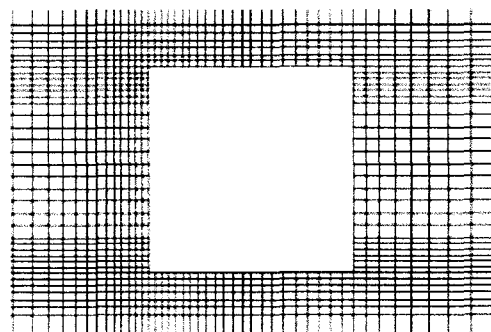


図 18 角柱近傍メッシュパターン

修正したものである。logarithmic form とした場合、生産項以外は標準 $k-\varepsilon$ モデルの logarithmic form と何ら異なる箇所はない。

(1) normal form と logarithmic form の比較

Normal form により計算を行った場合、途中で計算が発散した。図 19 は発散が生じる直前の渦粘性係数 ν_t の分

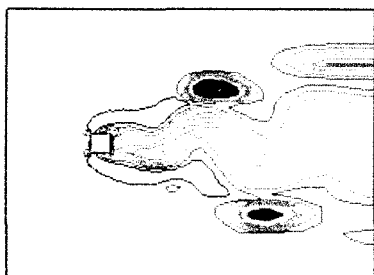
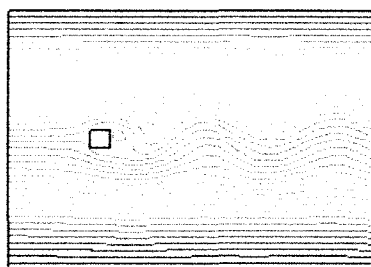


図 19 normal form 発散直前の渦粘性係数分布



(a) 流線

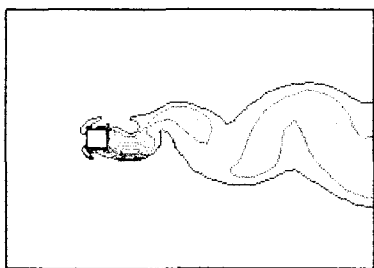
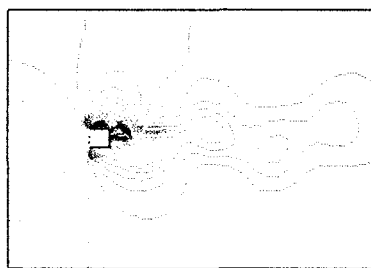


図 20 logarithmic form の渦粘性係数分布



(b) 圧力分布

布図である。一方 logarithmic form は発散が生じることはなく、周期的に渦が放出される解が得られた。図 20 は logarithmic form において定常的な渦放出が生じている段階で、揚力が最大となった瞬間の渦粘性係数分布である。

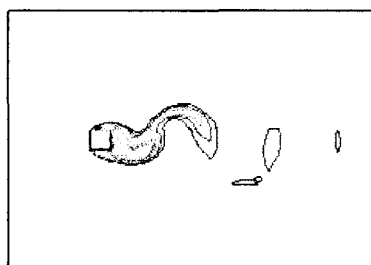
図 21 (a) ~ (d) はそれぞれ、図 20 と同じタイミングにおける流線、圧力、乱流エネルギー、エネルギー散逸率の分布図である。

図 19 と図 20 を比べると、logarithmic form では ν_t が小さい領域において、normal form の場合は ν_t が大きな値をとっている。 ν_t が大きい領域は渦の発生に伴い、前後左右に移動する。つまり渦の流下に伴い k, ε が非定常に変化するため、バックステップ流れの場合と同様、 k, ε のバランスが崩れ、局所的な過大な渦粘性性を生じさせている。しかもそれが原因で計算が発散してしまう。以上より、logarithmic form は非定常な流れ場に対し有効であることが確認された。

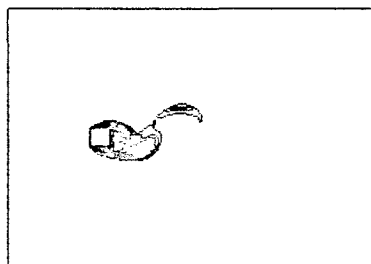
(2) 2次元正方形角柱に作用する空気力の評価

Logarithmic form を用いた本解析手法により、角柱に作用する空気力を評価した。表 2 に抗力係数の平均値 $\overline{C_D}$ 、揚力係数の標準偏差 C_{Lrms} 、揚力係数の変動の最大値 C_{Lmax} 、そして Strouhal 数 S_t の値をまとめる。比較のために加藤の解析結果および実験値¹¹⁾を示した。

加藤の解析結果と比べ、抗力係数は若干大きく評価したものの、揚力係数はそれほど大きな差はなく、妥当な結果が得られたと考えられる。



(c) 乱流エネルギー分布



(d) エネルギー散逸率分布

図 21 logarithmic form 揚力最大時の分布図

表2 2次元正方形角柱に作用する空気力係数

	$\overline{C_D}$	C_{Lrms}	C_{Lmax}	S_t
本研究	2.37	0.62	1.1	0.136
加藤 (解析値)	2.05	0.82	1.2	0.145
加藤 (実験値)	2.0 - 2.1	1.1	1.4 - 1.6	0.12 - 0.13

5. おわりに

本論文では $k-\varepsilon$ モデルに基づく乱流の数値解析において、変数が負の値をとらないように用いられる clipping や limiter といった物理的に意味を持たない操作を回避するために Ilinca らが提案した logarithmic form を適用した解析法を構築し、バックステップ流れ、および2次元正方形角柱周りの流れの解析を行い、その効果を検討した。その結果得られた結論をまとめると以下ようになる。

- Normal form によるバックステップ流れの解析より、clipping の処理が発生する状況は、流れが過渡的な段階で k, ε のバランスが崩れ、局所的に過大な渦粘性が生じるところに集中していることが示された。
- Logarithmic form を適用することで、 k, ε のバランスが崩れるのを回避することが出来た。これは変数の対数をとることで新たな変数の勾配が小さくなるためと考えられる。
- 2次元正方形角柱周りの流れの解析より、logarithmic form は clipping, limiter を回避するという利点を持つほか、時間・空間勾配の大きい非定常流に対しても有効であるということが明らかになった。

以上の知見は、本論文で用いた特定の時間積分法および空間の離散化に基づくものであるが、 $k-\varepsilon$ モデルにおいて、logarithmic form を用いることは、非定常な流れの状況に効果的で、安定に解析を可能にする方法であることが明らかになった。

謝辞

本研究を進めるにあたり、JFE 技研株式会社の加藤真志氏、村上琢哉氏に様々なご助言を頂きました。ここに記して深謝申し上げます。

参考文献

- 1) 数値流体力学編集委員会編：数値流体力学シリーズ3「乱流解析」，東京大学出版会，第2章，1995
- 2) G.Biswas, V.Eswaran : Turbulent flows Fundamentals, Experiments and Modeling, CRC Press, Chapture10, 2002
- 3) F.Ilinca, J.F.Hetu and D. Pelletier : A unified finite element algorithm for two-equation models of turbulence, Comput. Fluids, Vol.27, No.3, pp.291 - 300, 1998
- 4) F.Ilinca and D.Pelletier : Positivity Preservation and Adaptive Solution for the $k-\varepsilon$ Model of Turbulence, AIAA J., Vol.36, No.1, pp.44 - 50, 1998
- 5) L.Ignat, D.Pelletier and F.Ilinca : A universal formulation of two-equation models for adaptive computation of turbulent flows, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 189, pp1119 - 1139, 2000
- 6) 長谷部寛，野村卓史：乱流モデルを用いた2次元正方形角柱周りの流れの数値解析，第29回関東支部技術研究発表会講演概要集，pp138 - 139, 2002
- 7) 長谷部寛，野村卓史：有限要素法による壁関数の具体化と平板空気力の評価，土木学会第58回年次学術講演会，I-122, 2003
- 8) V.Yakhot, S.A. Orszag, S.Thangam, T.B.Gatski, C.G.Speziale : Development of turbulence models for shear flows by a double expansion technique, Phys. Fluids A 4 - 7, pp1510 - 1520, 1992
- 9) W.P.Jones and B.E.Launder : The prediction of laminarization with a two-equation model of turbulence, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol.15, pp.301 - 314, 1972
- 10) 加藤真志：修正生産項 $k-\varepsilon$ を用いた静止・振動角柱周りの二次元流れ解析，土木学会論文集，No.577/I-41, pp217 - 230, 1997
- 11) 加藤真志：修正2方程式乱流モデルによる角柱の基本空力特性に関する研究，名古屋大学学位論文，1997
- 12) Launder, B.E. and Spalding, D.B. : The numerical computation of turbulent flow, Comp. Meth. Appl. Eng., 3, pp269 - 289, 1974
- 13) A.N.Brooks and T.J.R.Hughes : Streamline upwind / Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 32, pp.199 - 259, 1982
- 14) B.Mohammadi and O.Pironneau : Analysis of the K-Epsilon turbulence model, Masson, 1994
- 15) N. Kasagi, S.Kawara and A.Matsunaga : Turbulence measurement in a separated and reattaching flow over a backward - facing step with the aid of three-dimensional particle tracking velocimetry, The Symposium of the Society of Instrument and Control Engineers, 1991

- 16) J.H.Ferziger, S.J.Kline, R.K.Avva, S.N.Bordalo and K.L.Tzuoo : Zonal Modeling of Turbulent Flows - Philosophy and Accomplishments, Near-Wall Turbulence, pp.800 - 817, 1990
- 17) R.K.Avva, S.J.Kline and J.H.Ferziger : Computation of Turbulent Flow over a Backward - Facing Step—Zonal Approach, AIAA-88-0611, 1988
- 18) 長野靖尚, 森西洋平, 笠木伸英 : バックステップ流れの数値解析とその検証, 流れ解析プログラム検証研究分科会 (RC104) 成果報告書, 日本機械学会, pp.239-255, 1994
- 19) 木田重雄, 柳瀬眞一郎 : 乱流力学, 朝倉書店, 第 15 章, 1999

(2004 年 9 月 17 日受付)