

超一様分布列を用いた損傷度解析

A Fragility Analysis by Low Discrepancy Sequence

吉田郁政*, 佐藤忠信**

Ikumasa YOSHIDA and Tadanobu SATO

*工博 東電設計(株), 次長, 地盤・構造部 (〒110-0015 東京都台東区東上野3丁目3番3号)

**工博 京都大学防災研究所, 教授, 地震災害部門耐震基礎分野 (〒611-0011 宇治市五ヶ庄)

A fragility analysis by Low Discrepancy Sequence (hereafter referred as LDS) is proposed and demonstrated. Discrepancy is a measure of uniformity for the distribution of points in a multi-dimensional space. LDS is a group of points of which discrepancy is low, in other words, the uniformity is high. Numerical integral with LDS is applied to the fragility analysis with limit acceleration which is defined as PGA when a limit state is exceeded. Numerical study is performed with a simple limit state function. A failure probability is also estimated by the numerical integral by LDS for a bridge pier model.

Key Words: Discrepancy, Monte Carlo simulation, fragility curve, failure probability

キーワード: ディスクレパンシー, モンテカルロシミュレーション, 損傷度曲線, 損傷確率

1. はじめに

近年, 構造物の安全性照査, 評価において確率手法を用いた定量的安全性評価に対する必要性が高まってきた。損傷確率の算定には限界状態関数を近似化した上で理論解を求める FOSM (first-order and second moment method) 的なアプローチがあり^{1), 2)}, 広く使われてきたが, 非線形性が強い場合や非ガウス分布の問題では精度や安定性に問題がある。数値積分による方法もあるが, 次元が高くなると計算量が膨大になり^{2, 3} 次元程度の低次元の問題にしか適用することができないという, 次元の呪い(curse of dimensionality)として知られる難点がある。一方, モンテカルロシミュレーション(以下, MCS と略記する)は, 計算時間の問題を除けば基本的にはどんな問題にも適用することができ有用性は高い。特に最近の計算機能力の向上を考えると, MCS は様々な問題に対して現実的な選択肢となってきた。しかし, MCS には収束が鈍いという難点があり, たとえば, 誤差の標準偏差を一桁小さくするためには 100 倍の計算量が必要になる。

最近, MCS よりも収束効率がよく, 数値積分よりも次元に対する依存度が低い方法として超一様分布列を用いた計算法^{3), 4)}が金融工学を中心として注目されている。MCS においても, 全くの乱数を用いるよりもある程度均質に分布する乱数を用いた方が計算効率がよく, 効率化テクニックとして層別サンプリング^{5), 6)}, ラテン方格法⁷⁾などが知られている。しかし, 層別サ

ンプリングは次元が高くなってくると数値積分と同様に層区分の個数が膨大となり現実的ではない。そこで, ラテン方格法では各次元について独立に層別サンプリングを行い, それらをランダムに組み合わせることでサンプルを作成している。そのため, 各次元個別には均質なサンプルとなるものの, 多次元空間の均質性に対する工夫はない。それに対して, 超一様分布列は多次元空間における均質さが保障される点列である。

これまでに著者らは限界指標の考え方をを用いた効率的な損傷度曲線及び損傷確率のMCSによる計算法の提案を行い, 橋脚の耐震性評価⁸⁾, 斜面の地震時安定性評価⁹⁾, 防波護岸の耐波性能評価¹⁰⁾など, 各種問題への適用を行ってきた。本論文ではこの限界指標を用いる方法においてMCSの替わりに超一様分布列を用いた損傷度解析の有効性について基本検討を行う。最初に超一様分布の概念と構成法を簡単に示した後, 単純な限界状態関数を用いた数値計算による有効性検討, 最後に橋脚の損傷確率の試算を行う。

2. 超一様分布列(Low Discrepancy Sequence)³⁾

2.1 discrepancyの概念と超一様性

多次元空間における点列の均質性を表す概念としてdiscrepancyがある。図-1, および式(1)にその定義を示す。

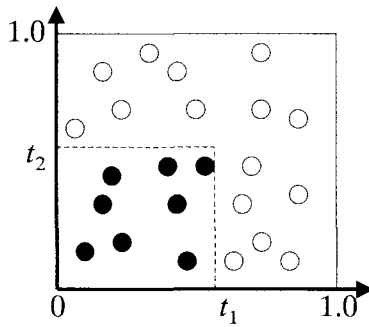


図-1 discrepancy の概念

$$D_N^{(k)} = \sup_{t \in [0,1]^k} \left| \frac{A([0,t]; N)}{N} - \prod_{i=1}^k t_i \right| \quad (1)$$

ここで、 $D_N^{(k)}$ は k 次元単位立方体 $[0,1]^k$ の中で定義される点列 x_n の均質さを表す概念であり、 N は点の総数、 $A([0,t]; N)$ は総数 N のうち区間 $[0,t]$ に入っている点の数を表している。ここで、 $t = (t_1, t_2, \dots, t_k)$ である。

図-1に示したように2次元空間で考えると面積と同じ比率だけ指定区間に点が入っていれば D_N は0、偏りが大きくなると D_N も大きくなる。 $N \rightarrow \infty$ のとき $D_N \rightarrow 0$ であれば点列 x_n は一様分布列であるという。さらに、点列 x_n が次の条件を満たすとき超一様分布列(low discrepancy sequence)という。

$$\left| \int_{[0,1]^k} f(x) dx - \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N f(x_n) \right| \leq V_f D_N^{(k)} \quad (2)$$

$$D_N^{(k)} = O\left(\frac{(\log N)^k}{N}\right) \quad (3)$$

ここで、 V_f は被積分関数の変動の大きさを表している。ランダムな点列、すなわちMCSの場合は、

$$D_N^{(k)} = O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right) \quad (4)$$

であり、超一様分布列の方が次元が低い場合には早く収束することがわかる。

2.2 FAURE列の構成法

超一様分布列の構成法はいくつか知られているが、ここではFAURE列について簡単に示す。 k 次元問題の n 番目の実現値ベクトル

$$x_n^T = (x_n^{(1)}, x_n^{(2)}, \dots, x_n^{(k)}) \quad (5)$$

の決め方について簡単に示す。詳細については文献3), 4)等を参照されたい。

基数 b を次元 k 以上の最小の素数とする。基数 b による整数 n のdigit展開を次式で表す。

$$n = a_r b^r + a_{r-1} b^{r-1} + \dots + a_1 b^1 + a_0 \quad (6)$$

1次元目の値は

$$x_n^{(1)} = \frac{a_0}{b} + \frac{a_1}{b^2} + \dots + \frac{a_{r-1}}{b^r} + \frac{a_r}{b^{r+1}} \quad (7)$$

で与えられる。 $i (> 2)$ 次元の値は

$$x_n^{(i)} = \frac{a_0^{(i)}}{b} + \frac{a_1^{(i)}}{b^2} + \dots + \frac{a_{r-1}^{(i)}}{b^r} + \frac{a_r^{(i)}}{b^{r+1}} \quad (8)$$

となる。ここで、

$$\begin{pmatrix} a_0^{(i)} \\ a_1^{(i)} \\ a_2^{(i)} \\ \vdots \\ a_r^{(i)} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} {}_0C_0 & {}_1C_0 & {}_2C_0 & \cdots & {}_rC_0 \\ & {}_1C_1 & {}_2C_1 & \cdots & {}_rC_1 \\ & & {}_2C_2 & \cdots & {}_rC_2 \\ & & & \ddots & \vdots \\ & & & & {}_rC_r \end{bmatrix}^{i-1} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_r \end{pmatrix} \quad (9)$$

ただし、 $a_j^{(i)}$ が b よりも大きくなった場合には b に対する剰余とする。以上の手順により、超一様分布列となる x_n が得られる。

3. 簡単な限界状態関数による数値計算

3.1 限界指標を用いた損傷度解析

以下、限界指標を用いて損傷確率あるいは損傷度曲線を算定するための式を要約して示す⁹⁾。限界状態関数 g を用いて損傷領域を以下のように定義する。

$$g(S, x) < z_0 \quad (10)$$

ここで、 S, x, z_0 はそれぞれ分離する指標、その他の不確定変数、損傷を定義する閾値である。ここでは S は地震動指標を表し、基盤最大加速度PGAを表すとする。 x, z_0 が確定的に与えられたときに $g(S, x) = z_0$ が成り立つ S を逆算する関数が $R(z_0, x)$ で与えられるとすると、式(10)で与えられる損傷領域は次式でも表現できることになる。

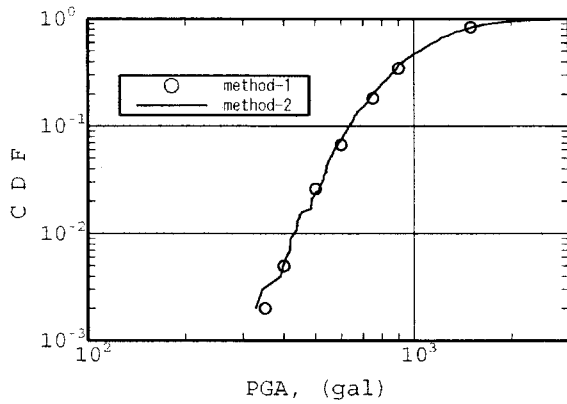


図-2 2種類の方法の比較
method-1: 条件付確率による算定
method-2: 限界指標による算定

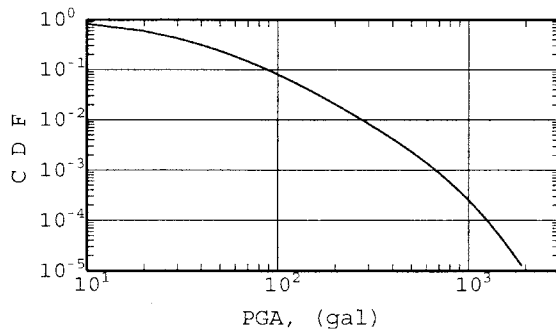


図-4 地震危険度曲線

$$R(z_0, \mathbf{x}) < S \quad (11)$$

ここで、指標 S とその他の不確定変数に関する確率密度関数が独立と仮定する。以上の条件のもとで損傷確率を求める次式が誘導される。

$$P_f = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left(1 - F_S \left(R(z_0, \mathbf{x}^{(j)}) \right) \right) \quad (12)$$

ここで、 $F_S(S)$ は基盤加速度に関する累積分布関数を表す。同様にして、次式で損傷度曲線が求められる。

$$F_R(S) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n U \left(S - R(z_0, \mathbf{x}^{(j)}) \right) \quad (13)$$

ここで、 U はステップ関数を表しており、 $()$ 内が負であれば 0.0, そうでなければ 1.0 である関数である。計算手順としては、確率密度関数 $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$ に従って発生させたサンプルから単純に R を求め、 S 以下となる比率を算定すればよい。

3.2 限界状態関数と限界指標

次に示す簡単な限界状態関数を用いて超一様分布列（以下、LDSと記す）による数値積分の有効性の検

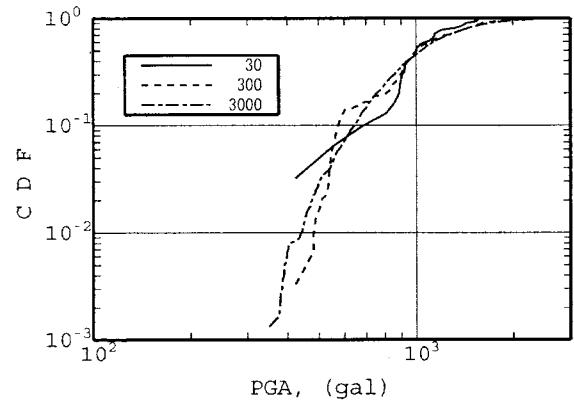


図-3 超一様分布列による損傷度曲線

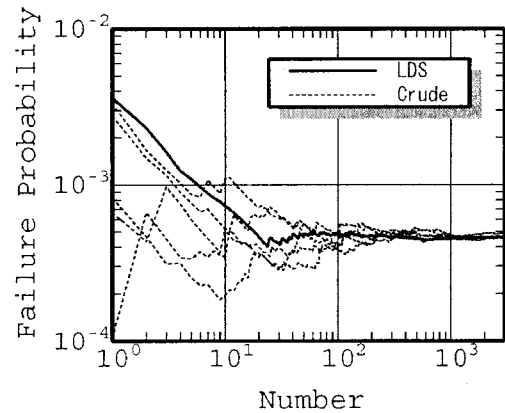


図-5 損傷確率とサンプルサイズの関係

討を行う。

$$g(\mathbf{x}, S) = \sum_{i=1}^5 x_i - \left(1 + \frac{x_1}{2500} \right) S \quad (14)$$

ここで、 x_i は対数正規分布に従う、互いに独立な確率変数で平均 250, 変動係数 1.0 とする。損傷確率は $P(g < 0)$ で定義するとする。この場合、 R は以下の陽な形で定義できる。

$$R = \frac{2500 \sum_{i=1}^5 x_i}{2500 + x_1} \quad (15)$$

しかし、 S が 5 次以上の高次やより複雑な形の場合には陽な形では表現できないので、バイナリーサーチなどの収束計算が必要になる^{9), 10)}。

与えられた各基盤加速度 S に対して条件付確率 $P(g < 0 | S = a)$ を求める方法 (method-1) と式(13)から求める方法 (method-2) を用いて損傷度曲線を算定する。method-1 ではサンプルサイズ 1000 の MCS を 7 回行っている。それぞれ、サンプルはラテン方格法（以下、

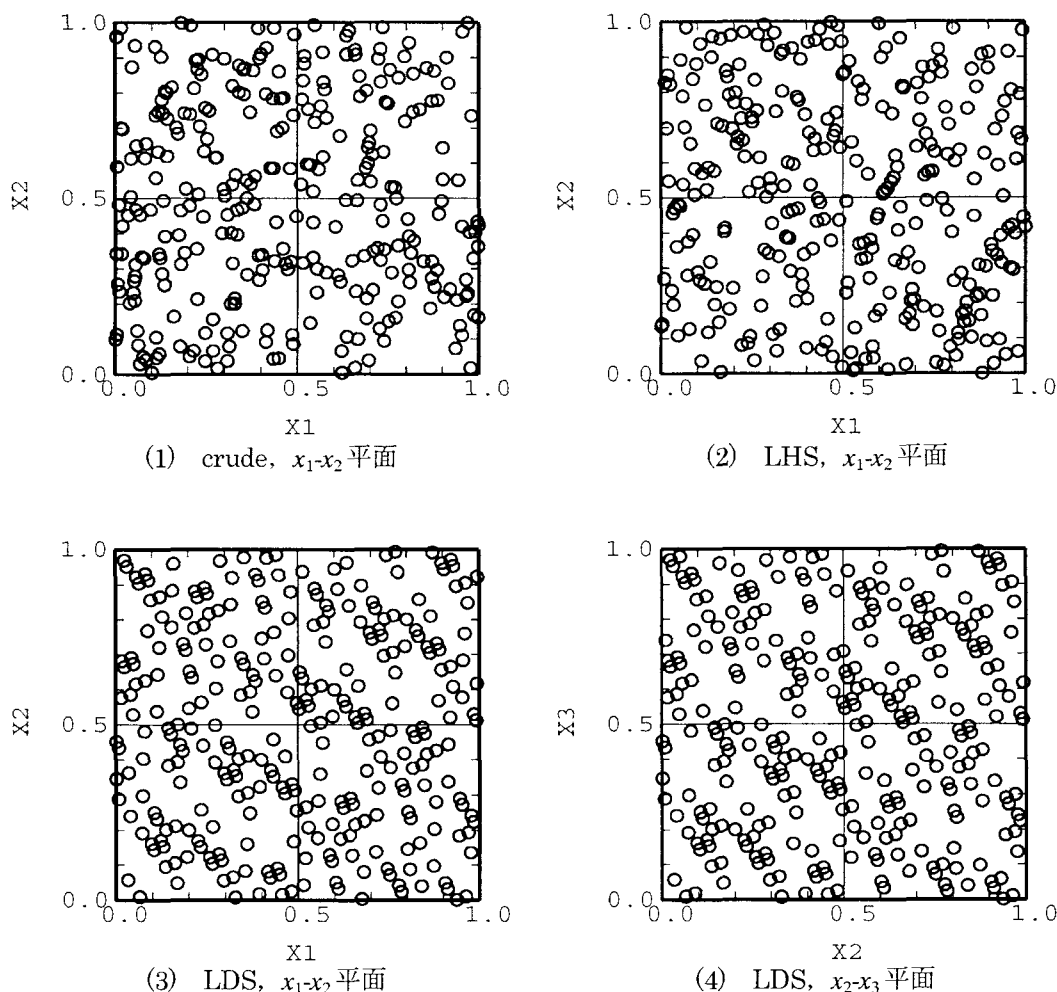


図-6 発生させたサンプルの比較

LHS と記す) によって発生させた。それぞれの方法で得られた結果を図-2 に示す。当然のことながら両者はよい一致を示している。

3.3 LDSによる損傷度解析

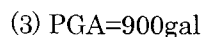
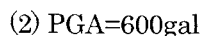
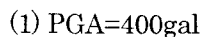
method-2 と LDS を用いて損傷度曲線を算定した。LDS は (0-1) の範囲の点列であるので、それを対数正規分布に変換して用いた。サンプルの数 100, 300, 1000 について計算した結果を図-3 に示す。サンプルの数が大きくなるにつれて滑らかな分布になっていることがわかる。

次に図-4 に示す地震危険度曲線 (変数 S の累積分布関数) と算定した損傷度曲線を用いて年損傷確率を算定する。LDS は任意の点数で均質性が保障されているので、点数に応じて逐次的に損傷確率を算定することができる。ランダムなサンプリング (以下, crude と記す) も同様にして逐次的に算定できるが, LHS はサンプル総数に応じて区分が決まるので逐次的には評価できない。そこで, crude と LDS の比較を図-5 に示す。crude については乱数の種を変えて 5 回計算した。サンプルサイズが大きくなると両方ともほぼ同じ点に収束

している。LDS は確定的に算定結果が得られるので精度の比較は難しいが, 少なくともこの例題では crude に比べると収束が早い。

サンプル数 300 の場合について, 通常の独立に発生させたサンプル (crude), LHS により発生させたサンプル及び LDS で発生させた点列を図-6 に示す。図には対数正規分布に変換する前の一様分布で示している。crude, LHS については x_1 - x_2 平面についてそれぞれ示す。crude に比べると LHS によるサンプルの方がやや均質に分布している。LDS については x_1 - x_2 平面と x_2 - x_3 平面について示す。LHS よりもさらに規則的に点列が決められている。格子点で積分点を決める場合はどの平面 (部分空間) でも同じ配置になるが, LDS では図-4(3)(4) に示されているように微妙に異なる配置になっている。また, 格子点の場合は各次元 10 点としても, 5 次元の問題に対しては 10 万の点が必要となり, 次元が高くなると実質的に不可能になる。それに対して LDS では各次元に同じ数値はひとつしか存在しないため, 各部分空間でみると図に示されているとおり偏りなく高い密度で分布していることがわかる。

条件付確率で比較する場合には次式で crude の精度,



誤差の標準偏差を評価できる。

$$\sigma = \sqrt{\frac{P_f(1-P_f)}{N}} \quad (16)$$

表-1 不確定要因の統計量

不 確 定 要 因			平均値 μ	標準偏差 σ	変動係数
構造物の 材料特性	コンクリート	圧縮強度 (N/mm^2)	31.0	1.2	0.04
		引張強度 (N/mm^2)	$f_{ct}=0.23f_{ck}^{2/3}$ f_{ct}^* : 圧縮強度	0.093μ	0.093
	呼び強度 24.0(N/mm^2)	弾性係数 (kN/mm^2)	$E_c=8.39f_{ck}^{1/3}$ E_c^* : 圧縮強度	0.12μ	0.12
		鉄 筋 SD295	降伏強度 設計300(N/mm^2)	370.0	18.5
		弾性係数 設計210(kN/mm^2)	195.0	2.0	0.01
耐力算定式(靱性率評価式)			$1.0 \times \text{計算値}$	0.51μ	0.51

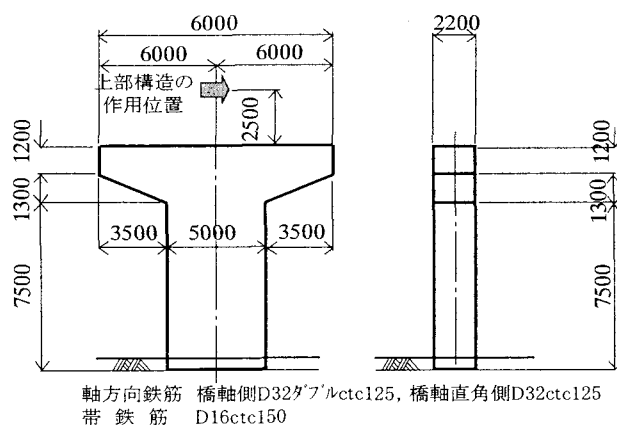


図-8 例題とした橋脚の概要

4. 橋梁の地震時損傷確率の算定

RC 橋脚を対象に地震時損傷確率の算定を行う。検討に用いたモデルを図-8 に示す⁸⁾。橋脚の限界状態としては、降伏耐力、せん断耐力及び変形性能が考えられるが、ここでは一例として変形性能に注目して損傷度曲線の算定を行う。限界加速度は次の手順に従って求めた。まず、2次元非線形フレーム解析を用いてブッシュオーバー解析を行い、作用荷重と橋脚の水平変位の関係を算定する。次にエネルギー一定則の考え方や許容塑性率を用いて、荷重-変位関係より橋脚に損傷を生じさせる最小の水平荷重を算定する。限界状態の照査法はコンクリート標準示方書¹¹⁾に従った。求められた水平荷重及び橋脚の固有周期、重量により限界等価水平震度を求め、それを加速度に置換えて限界加速度を算定する。エネルギー一定則の考え方には設計上の配慮があり安全側となることからやや大きめの損傷確率が算定される。

ばらつき要因としてはコンクリート、鉄筋の材料特性と限界状態照査式を考慮した。各変数は互いに独立と仮定している。これらについてまとめて表-1に示す。検討モデルや限界加速度算定法の詳細については文献8)を参照されたい。

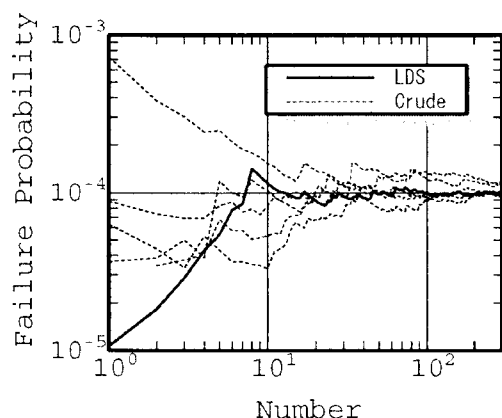


図-9 橋脚の損傷確率とサンプルサイズの関係

crude によるサンプルあるいは LDS より損傷曲線を求め、図-4 に示した地震危険度曲線から損傷確率を算定した。その結果を図-9 に示す。MCS については乱数の種を替えて5回計算をした結果を示した。図-5と同様に LDS の結果は比較的安定している。既往の研究⁸⁾で行った crude, LHS による損傷確率の精度評価によるとサンプル数 30 の時は、crude の場合、変動係数 0.3 程度、LHS では 0.1 程度であった。LDS の結果は確定的なので誤差評価の比較は難しいが、点列数 30 の時の偏差はほぼ 0.1 以下である。

5. おわりに

一般に実務で対象とする問題は非線形で次元もある程度高いことが多い。そのため、理論解や近似解は非線形性によって、数値積分は次元の高さによって限界があり、適用できる問題は限られる。そこで最近では計算機能力の発達も追い風となってMCSを使うことが多くなってきた。ここで示した LDS(Low Discrepancy Sequence)を用いた数値積分は、高次元の問題に対しても有効であり、例題を通して示したとおり新しい選択肢となりえる。効率化MCSに対しての優位性はさらに検討を行う必要があるが、MCSに代わる手法となる可能性は十分にある。また、比較的簡易に適用できることも利点である。MCSの乱数の代わりに LDSを使うだけでMCS用に開発したソフトがそのまま使える。

本論文では触れなかったがLDSに乱数を取り込んだ方法(スクランプリングと呼ばれる)も提案されており、さらに精度が高い方法とされている。今後ともこうした新しい技術の適用性について検討を行っていききたい。

参考文献

- 1) Melcher, Robert E., Structural Reliability Analysis and Prediction, 2nd, John Wiley & Sons Ltd, 1999
- 2) 星谷勝, 石井清, 構造物の信頼性設計法, 鹿島出版会, 1986
- 3) 手塚集, 計算統計 I, 第II部超一様分布列の数理, 岩波書店, 2003
- 4) 手塚集, 離散構造とアルゴリズムIV, 3. 点列の discrepancy について, 近代科学社, 1995
- 5) 伏見正則, 確率的方法とシミュレーション, 岩波講座応用数学, 1994
- 6) 津田孝夫:モンテカルロ法とシミュレーション(三訂版), 培風館, 1995
- 7) 応用力学シリーズ6, 構造物系の非線形・不確定モデリング, 日本建築学会, 1998.
- 8) 吉田郁政, 鈴木修一:限界地震動指標を用いた損傷確率の効率的な算定方法, 構造工学論文集, pp.201-206, 2003
- 9) 大島靖樹, 吉田郁政, 石川博之, 武田智吉:限界地震動指標による土構造物の年損傷確率評価, 第5回構造物の安全性・信頼性に関する国内シンポジウム, 講演論文集, pp.695-700, 2003
- 10) 興野俊也, 赤石沢総光, 吉田郁政, 鈴木修一, 長舩徹:ケーソン堤の滑動破壊モードに着目した効率的損傷確率算定手法について, 海岸工学論文集, 第50巻, pp.896-900, 2003
- 11) 土木学会:コンクリート標準示方書(平成8年制定)耐震設計編, 1996

(2004年9月17日 受付)