

ケーブル構造の等張力場における形状決定と構造解析

Shape finding based on equi-tension field and structural analysis for cable structures

Dang Tung Dang*・岩崎英治**・長井正嗣***

Dang Tung DANG, Eiji IWASAKI and Masatugu NAGAI

*学生会員 工修 長岡技術科学大学大学院 博士後期課程 (〒 940-2188 新潟県長岡市上富岡町 1603-1)

**正会員 工博 長岡技術科学大学助教授 工学部環境・建設系 (〒 940-2188 新潟県長岡市上富岡町 1603-1)

***正会員 工博 長岡技術科学大学教授 工学部環境・建設系 (〒 940-2188 新潟県長岡市上富岡町 1603-1)

A cable element is developed in this paper for flexible cable structures with pulley. This element is formulated by modified functional of variational principle and has the same features as usually finite element based on the displacement method in which displacements are unknown variables. A few numerical examples are to show the accuracy and efficiency of the proposed cable element.

Key Words : cable element, shape finding, pulley

キーワード：ケーブル要素，形状決定，滑車

1. はじめに

ケーブル部材を有限要素法で解析する場合には，直線要素を多数用いた方法が簡便であるが，自重や風荷重のような分布荷重が作用し，大きなサグが生じるような柔ケーブル構造の場合には，多数の要素を必要とする．このため，中間節点を設けた曲線ケーブル要素が開発されている^{1),2)}．中西と波田¹⁾は，ケーブル要素を多数の領域に分け，それぞれの領域で応力が一定となるような混合法の定式化による3節点ケーブル要素と，変位法による3節点ケーブル要素を誘導し，二つの領域に分けたケーブル要素の有効性を示している．また，謝ら²⁾は，更新ラグランジュの手法による4節点ケーブル要素を誘導している．これらの研究のように，中間節点を多数設けた高次要素を用いれば，少ない自由度で精度の良い解析が可能になるが，通常のラグランジュ多項式を用いた要素では，剛性行列の条件数が大きくなり，次数をあまり高くできない．

一方，ケーブル部材の応力状態は非常に単純で，平衡方程式の一般解を容易に誘導できる．このため，応力法に基づいたケーブル構造の解析法³⁾が開発されている．この手法は，ケーブル端での適合条件式を解く方法であり，一般の有限要素法とは異なり汎用性に欠ける．また，ケーブル形状の解析解を用いて，変位法による剛性方程式に相当する式を誘導する方法が示されている^{4),5)}．これらの方法は，少ない自由度で高精度の解を得ることができるが，ケーブルの自重に相当する等分布荷重の基での解析解を用いていることから，汎用性の面で若干の制限を受ける．

ところで，ケーブル構造には，架設途中には支点や，他のケーブル上を滑動し，完成時に固定する形式のものが少なくなく，この完成前のケーブルの変形や反力

を把握しておく必要がある．このような状態は，ケーブル要素端部に滑車を導入することで表現できる．このような滑車を有するケーブル構造の解析には，真柄ら⁶⁾，McDonaldら⁷⁾やAufaure⁸⁾の研究がある．真柄ら⁶⁾は，混合法の手法によりケーブルの滑動を許す場合の解析法を示している．しかし，ケーブル要素は直線要素によるリンクケーブルとして扱い，自重などの分布荷重は，等価な節点力に置き換えている．Aufaure⁸⁾は，滑車と隣接するケーブルを含んだ3節点の滑車要素を誘導している．このときケーブル部は直線として扱っている．McDonaldら⁷⁾は，ケーブルを懸垂曲線として扱った滑車要素を誘導し，たるんだ状態のケーブルと滑車の系には複数の平衡状態が存在することを指摘している．しかし，自重のような一方向の等分布荷重に釣り合うケーブル形状の解析解を用いているために，他の荷重条件への適用が困難である．

ケーブル構造の形状は，自重やプレストレス，外力等が作用するまで確定しないので，形状決定の問題も重要である．このような形状決定の問題は，つり合い状態での形状やケーブル軸力などが予め設定された目標値に近くなるように，初期ケーブル長やケーブル交点の座標値を決めることになり，そのような解を，最適値問題として解く方法^{9),10)}や，ケーブル長や変位前の節点位置の関数として，ケーブル軸力やつり合い状態での座標値を表して解く方法^{3),11)}などがある．

形状決定の条件は種々あるが，各ケーブルの軸力が等しくなるような条件を考える場合には，プレストレスや自重などの荷重が作用する間は，支点や他のケーブル上の交点で移動可能な状態になっていると，これらの点で隣接するケーブル部材の軸力を等しくすることが可能である．このような状態は見かけ上，ケーブルが滑車を通して支点や他のケーブルに接続している

ものと見なすことで表現できる。

このような等張力場での形状決定、ただし、厳密には自重によりケーブル軸に沿って張力は変化するため、ケーブルの交差部において隣接するケーブル軸力が等しくなるような張力のもとでの形状決定を行えるような、滑車を有するケーブル要素が共著者らにより誘導されている¹²⁾。この滑車を有するケーブル要素を用いることにより、等張力場での形状決定がなされた後、滑車として扱った節点での滑り変位を拘束し、通常の節点として扱うことで、形状決定後のケーブル構造に作用した荷重による構造解析が行え、形状決定と構造計算のための解析手法を同一の手法により行える特長を有している。

この要素は、応力型ハイブリッド要素に相当し、独立な変分量は、要素両端の変位と要素内の平衡方程式を解いた時に生じる積分定数(軸力)であるが、積分定数は各要素に独立な値であるので、これを消去すると、通常の変位法に基づいた剛性方程式に相当する式が得られる利点があり、また、要素内の平衡方程式を満たしているので、一つの要素で非常にたわんだケーブルの解析も可能な要素である。しかし、軸力の逆数が式中に含まれるなど、数値計算上の扱いに注意を要する。

そこで、本論文では、文献¹²⁾に示されたケーブル要素の再検討を行ったものである。具体的には、数値計算上の留意点について考察を行い、また、被積分関数に軸力の逆数が含まれているために、その積分を正確に行うための手法を提案し、数値計算によりその有効性を確認している。さらに、滑車部において、滑車内のケーブルに直接、力が作用するような式を誘導している。

なお、本論文では、更新型ラグランジュの手法を用い、ケーブル要素を誘導する上で、通常用いられる以下の仮定を設けている。

- 1) ケーブルには軸力のみ生じる。
- 2) ケーブルの曲げ剛性は無視できる。
- 3) ケーブルの断面積は、軸力の大きさによらず一定である。

また、滑車の誘導において以下の仮定を設ける。

- 4) 滑車とケーブルとの間の摩擦は小さく無視できる。

2. ケーブル要素

ここでは、文献¹²⁾に誘導したケーブル要素の基礎式を示す。

2.1 汎関数

ある増分ステップにおいて平衡条件および適合条件を満たした解が得られているものとして、独立変分量に要素両端の変位増分ベクトル $\Delta u_a, \Delta u_b$ と要素中央の軸力増分ベクトル ΔN_c を用いたときの次の増分ス

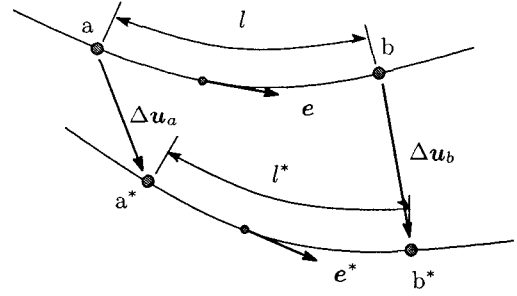


図-1 適合条件

テップまでの汎関数は、次式のように表される。

$$\Pi_C = \int_0^l \left\{ -\frac{\Delta N^2}{2EA} + (F_x^* - N^*) \right\} dx + [(N^* - n_x Q^*)^T \Delta u]_0^l \quad (1)$$

ここで、 Q^* は次の増分ステップでのケーブル要素端の集中荷重ベクトル、 N^* は次の増分ステップでの軸力ベクトル、 n_x はケーブル端部の断面の外向き法線ベクトルとケーブルに沿った x 軸との間の方向余弦、 ΔN は軸力増分、 EA は伸び剛性、 l は前増分ステップでのケーブル長である。また、 F_x^* と N^* は軸力ベクトル N^* から次式のように与えられる。

$$F_x^* = e^T N^*, \quad N^* = |N^*|, \quad \Delta N = N^* - N \quad (2)$$

ここで、 e は、前増分ステップでのケーブルの単位接線ベクトルである。なお、次の増分ステップでの単位接線ベクトル e^* は、 $N^*/|N^*|$ で与えられる。

式(1)において、 N^* は要素内での平衡方程式を満たしている必要があり、要素中央での軸力ベクトル N_c^* と分布荷重ベクトル q^* から次式のように表す。

$$N^* = N_c^* - \int_{l/2}^x q^* dx \quad (3)$$

なお、文献¹²⁾では、 N^* を要素端部の軸力ベクトルと分布荷重で表したが、要素中央での軸力を用いた方が数値計算が安定するため、本文では上式のように表す。

2.2 停留条件式

汎関数 Π_C の停留条件は次のようになる。

$$\int_0^l \left\{ e - \left(1 + \frac{\Delta N}{EA} \right) e^* \right\} dx + [\Delta u]_0^l = 0 \quad (4a)$$

$$-N_a^* - Q_a^* = 0 \quad (4b)$$

$$N_b^* - Q_b^* = 0 \quad (4c)$$

ここで、 $N_a^*, Q_a^*, N_b^*, Q_b^*$ は、 N^* や Q^* の a 端 ($x=0$) や b 端 ($x=l$) での値を表している。

式(4)の第1式中の $\int_0^l e dx$ は前増分ステップでの a 端から b 端までのベクトルを、 $\int_0^l (1 + \Delta N/EA) e^* dx$ は次の増分ステップでの a^* 端から b^* 端までのベクトルを表しており、式(4a)は増分変位前後のケーブルの適合条件を表していることが分かる。また、第2式、3式はそれぞれ両端での力の釣り合いを表している。

2.3 汎関数の解法

式 (4) を増分量に関して線形化すると、次式のようになる。

$$\begin{pmatrix} -H & -I & I \\ -I & O & O \\ I & O & O \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta N_c \\ \Delta u_a \\ \Delta u_b \end{Bmatrix} = \Delta \lambda \begin{Bmatrix} -\bar{u}_c \\ \bar{p}_a \\ \bar{p}_b \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} O \\ Q_a + N_a \\ Q_b - N_b \end{Bmatrix} \quad (5)$$

ここで、荷重 Q や q は、基準荷重 $\bar{Q}$, $\bar{q}$ と荷重倍率 λ の積で表現する¹³⁾ことにし、増分荷重も基準荷重と荷重倍率増分 $\Delta \lambda$ の積で表している。

$$\bar{u}_c = \int_0^l \left(\frac{ee^T}{EA} + \frac{I - ee^T}{N} \right) \int_{l/2}^x \bar{q} dx dx \quad (6a)$$

$$\bar{p}_a = \bar{Q}_a + \int_0^{l/2} \bar{q} dx \quad (6b)$$

$$\bar{p}_b = \bar{Q}_b + \int_{l/2}^l \bar{q} dx \quad (6c)$$

$$H = \int_0^l \left(\frac{ee^T}{EA} + \frac{I - ee^T}{N} \right) dx \quad (6d)$$

なお、線形化に際して、軸力は $N \neq 0$ と扱っている。

式 (5) を、全ケーブル要素について組み立てた方程式から求められる解は、増分量に関して線形化したことによる誤差を含んでいる。そこで、この値を初期値 $\Delta N_{c(0)}$, $\Delta u_{a(0)}$, $\Delta u_{b(0)}$ として、反復計算により正確な解を求める必要がある。式 (4) のニュートン法による反復公式は、次式のようになる。

$$\begin{pmatrix} -H_{(k)} & -I & I \\ -I & O & O \\ I & O & O \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \hat{N}_c \\ \Delta \hat{u}_a \\ \Delta \hat{u}_b \end{Bmatrix} = \Delta \hat{\lambda} \begin{Bmatrix} -\bar{u}_{c(k)} \\ \bar{p}_a \\ \bar{p}_b \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\Delta v_{c(k)} \\ Q_{a(k)}^* + N_{a(k)}^* \\ Q_{b(k)}^* - N_{b(k)}^* \end{Bmatrix} \quad (k \geq 0) \quad (7)$$

ここで、

$$\bar{u}_{c(k)} = \int_0^l h_{(k)} \int_{l/2}^x \bar{q} dx dx \quad (8a)$$

$$\Delta v_{c(k)} = \int_0^l \left\{ e - \left(1 + \frac{\Delta N_{(k)}}{EA} \right) e_{(k)}^* \right\} dx + [\Delta u_{(k)}]_0^l \quad (8b)$$

$$H_{(k)} = \int_0^l h_{(k)} dx \quad (8c)$$

$$h_{(k)} = \frac{e_{(k)}^* e_{(k)}^{*T}}{EA} + \left(1 + \frac{\Delta N_{(k)}}{EA} \right) \frac{I - e_{(k)}^* e_{(k)}^{*T}}{N_{(k)}^*} \quad (8d)$$

これらより、

$$\Delta N_{c(k+1)} = \Delta N_{c(k)} + \Delta \hat{N}_c \quad (9a)$$

$$\Delta u_{a(k+1)} = \Delta u_{a(k)} + \Delta \hat{u}_a \quad (9b)$$

$$\Delta u_{b(k+1)} = \Delta u_{b(k)} + \Delta \hat{u}_b \quad (9c)$$

これらの式 (5) や (7) において、 ΔN_c は個々の要素に独立な値であるので、構造全体の式を組み立てる前に、消去することができる。

ここに示した基礎式において、分布荷重 q が等分布荷重の場合のように x に関して単純な式で表される場合には、多少式が煩雑になるが、文献^{3),5)}などのように解析的に積分が行える。しかし、本文では、一般性を考慮して、これらの積分計算には、数値積分法を用いる。

3. 数値計算上の配慮

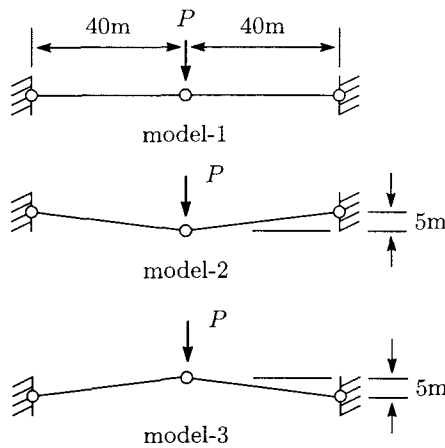
本ケーブル要素は、要素内での平衡方程式を満足するような応力仮定のハイブリット型の有限要素であり、通常の変位法に基づいた有限要素のような要素内での変位を仮定する必要がないため、少ない自由度数でも精度の良い解析が行える特長を有している。一方、通常の有限要素法では必要のない数値計算上の配慮すべき事柄がある。また、ケーブルは引張軸力が発生するまで構造が安定しないことや、非抗圧性のために、数値計算上の配慮も必要になる。ここでは、そのような数値計算上の留意点を示す。

3.1 ケーブルの接線ベクトル

本ケーブル要素は、ケーブルの形状を表すベクトル e を軸力 N から求めているため、ケーブル要素の形状を節点での位置から補間する必要が無い。しかし、ケーブルに軸力が作用していない解析初期の段階では、軸力に代わる別の方法で、ベクトル e を表す必要がある。これには種々の方法が考えられるが、ここでは、解析初期のケーブルは両節点を結んだ直線形状になっているものとし、解析初期のベクトル e には、両節点を結んだ直線の単位接線ベクトルを用いる。

3.2 ケーブルの非抗圧性の表現

ケーブルには、圧縮力は発生せず、実際に自重などの分布荷重が作用している場合には、圧縮力は発生しない。しかし、収束計算の途中には、圧縮力が発生する場合がある。接線ベクトルを軸力から、 $e = N/|N|$ で表すと、軸力が圧縮の場合に、接線ベクトルの向きが逆転することになる。ケーブルの接線方向が逆転していると、要素端部での適合条件を満足できなくなり、正しい解が得られないので、計算上は、軸力ベクトル N は、その大きさ N と接線方向の単位ベクトル e として値を保持しておく必要がある。また、増分計算と収束計算の途中で、軸力ベクトルの値を更新する際には、接線ベクトルの向きの逆転が生じていないかどうか



$E=200\text{GN/m}^2$, $A=0.02\text{m}^2$, $P=5\text{MN}$
図-2 集中荷重の作用した水平ケーブル

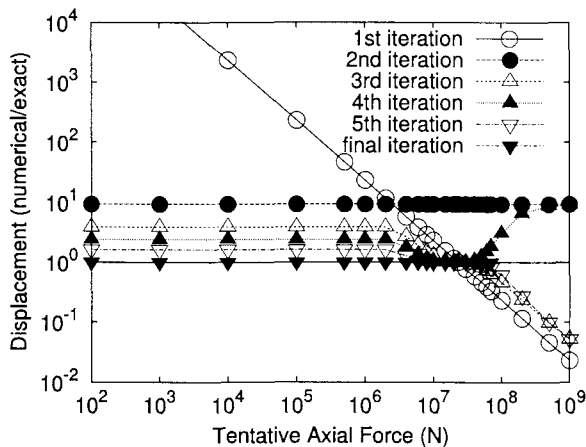


図-3 仮の軸力による収束性 (model-1)

か確認する必要がある。また、ケーブルの非抗圧性を表現するために、計算途中において圧縮力が生じた場合には、収束解として引張力が得られるようにするために、伸び剛性 EA を仮の値として、実際の伸び剛性よりも小さな値を与える必要がある。

3.3 初期段階での仮の軸力の設定

計算を始める最初のステップでは、プレストレスが作用していなければ、軸力がゼロのため、 $\mathbf{H}$ と $\bar{\mathbf{u}}_c$ が不定になる。そこで、数値計算上では、適当な仮の軸力を与える必要がある。不平衡と不適合の誤差を表す式 (5) や (7) の右辺第 2 項目には軸力の逆数が含まれないので、 $\mathbf{H}$ と $\bar{\mathbf{u}}_c$ の値を求めるときにだけ使用しても、このような取り扱いは収束回数には影響を与えるが最終的な収束値には影響を与えない。

3.4 数値計算での有効性の確認

図 2 のような両端が水平な位置で支持された水平ケーブルについて、ケーブル中央の節点が両支点と同じ高さにある場合 (model-1)、5m 下方にある場合 (model-2)、5m 上方にある場合 (model-3) の 3 ケースについて、

表-1 仮の軸力による収束性 (model-1)

仮の軸力 $N_0(\text{N})$	反復 回数	変位 (数値解/解析解)	
		1 回目	2 回目
1.0e+09	—	2.314e-02	9.262e+00
5.0e+08	—	4.628e-02	9.262e+00
2.0e+08	—	1.157e-01	9.262e+00
1.0e+08	—	2.314e-01	9.262e+00
7.0e+07	72	3.306e-01	9.262e+00
6.0e+07	43	3.857e-01	9.262e+00
5.0e+07	27	4.628e-01	9.262e+00
4.0e+07	18	5.785e-01	9.262e+00
3.0e+07	11	7.714e-01	9.262e+00
2.3e+07	4	1.006e+00	9.262e+00
2.0e+07	6	1.157e+00	9.262e+00
1.5e+07	7	1.543e+00	9.262e+00
1.0e+07	8	2.314e+00	9.262e+00
8.0e+06	8	2.893e+00	9.262e+00
6.0e+06	9	3.857e+00	9.262e+00
4.0e+06	10	5.785e+00	9.262e+00
2.0e+06	11	1.157e+01	9.262e+00
1.0e+06	11	2.314e+01	9.262e+00
5.0e+05	11	4.628e+01	9.262e+00
1.0e+05	11	2.314e+02	9.262e+00
1.0e+04	11	2.314e+03	9.262e+00
1.0e+03	11	2.314e+04	9.262e+00
1.0e+02	11	2.314e+05	9.262e+00

表-2 仮の軸力による収束性 (model-2)

仮の軸力 $N_0(\text{N})$	反復 回数	変位 (数値解/解析解)	
		1 回目	2 回目
1.0e+09	—	8.098e-02	2.204e+01
1.0e+08	—	5.295e-01	3.157e+00
4.0e+07	—	8.395e-01	1.370e+00
3.0e+07	30	9.302e-01	1.158e+00
2.0e+07	9	1.043e+00	1.021e+00
1.6e+07	4	1.096e+00	1.000e+00
1.0e+07	5	1.187e+00	1.005e+00
1.0e+06	6	1.355e+00	1.038e+00
1.0e+05	6	1.375e+00	1.042e+00
1.0e+04	6	1.376e+00	1.042e+00
1.0e+03	6	1.377e+00	1.042e+00
1.0e+02	6	1.377e+00	1.042e+00

ケーブルに発生している軸力が小さい ($N \approx 0$) 場合の仮の軸力の設定値による収束性、および、計算途中に圧縮力が生じた場合の伸び剛性の値の設定値による収束性の違いを数値計算により確認する。なお、ニュートン法の収束判定には、各反復計算での変位と力の修正量のノルムが、変位と力のそれぞれの合計量のノルムの 10^{-6} 以下としている。また、100 回繰り返しても収束解が得られない場合には、計算を中止している。

図 3 および表 1 は、 $\mathbf{H}$ 、 $\bar{\mathbf{u}}_c$ を求めるために指定する仮の軸力の値を変えて、図 2 の model-1 のような鉛直荷重の作用したケーブルの変位を求めたものである。なお、軸力がゼロの場合に $\mathbf{H}$ や $\bar{\mathbf{u}}_c$ の計算が行えないために仮の軸力を設定するものであるが、数値計算上では、仮の軸力の設定値より小さな軸力が発生した場合に、仮の軸力で置き換えている。図には、最初の 5 回の反復計算でのたわみの数値解/解析解の値と、最終的な収束値を、表には最初の 2 回の反復計算でのたわみの数値解/解析解の値と収束回数を、仮の軸力が $N_0 = 10^2\text{N}$ から 10^9N まで変えて示している。平衡状態でこのケー

表-3 計算途中に圧縮力が発生する場合の収束性 (model-3)

圧縮時の伸び剛性		EA		$10^{-1} \times EA$		$10^{-2} \times EA$		$10^{-3} \times EA$		$10^{-4} \times EA$	
仮の軸力 $N_0(N)$	変位 1回目	反復 回数	変位 2回目	反復 回数	変位 2回目	反復 回数	変位 2回目	反復 回数	変位 2回目	反復 回数	変位 2回目
4.0e+09	2.252e-03	—	-3.154e+00	—	-3.133e+00	—	-2.931e+00	—	-9.041e-01	—	1.936e+01
1.0e+09	8.609e-03	—	-1.866e+00	—	1.382e+00	—	-1.303e+01	—	-9.792e+00	—	-9.098e+00
1.0e+08	5.629e-02	—	-3.979e-02	—	-1.323e+00	—	-8.474e-01	—	-6.452e-01	—	1.122e+00
1.6e+07	1.165e-01	—	1.193e-01	8	-1.630e+00	7	-4.781e-01	6	1.586e+00	6	2.185e+01
1.0e+07	1.262e-01	—	1.498e-01	6	-1.078e+00	9	-3.824e-01	9	1.670e+00	8	2.194e+01
1.0e+06	1.441e-01	—	2.083e-01	8	-6.452e-01	11	-2.438e-01	11	1.796e+00	11	2.206e+01
1.0e+05	1.461e-01	—	2.157e-01	8	-6.142e-01	11	-2.302e-01	11	1.809e+00	11	2.207e+01
1.0e+04	1.463e-01	—	2.165e-01	8	-6.112e-01	11	-2.288e-01	11	1.810e+00	11	2.208e+01
1.0e+03	1.464e-01	—	2.165e-01	8	-6.109e-01	11	-2.287e-01	11	1.810e+00	11	2.208e+01
1.0e+02	1.464e-01	—	2.165e-01	8	-6.108e-01	11	-2.287e-01	11	1.810e+00	11	2.208e+01
1.0e+01	1.464e-01	—	2.165e-01	8	-6.108e-01	11	-2.287e-01	11	1.810e+00	11	2.208e+01
1.0e+00	1.464e-01	—	2.165e-01	8	-6.108e-01	11	-2.287e-01	11	1.810e+00	11	2.208e+01

ブル部材に発生する軸力は、おおよそ $2.3 \times 10^7 N$ であり、これらの結果より仮の軸力として、平衡状態の軸力に近い値を与えると少ない反復計算で収束解が得られていることが分かる。また、平衡状態での軸力より大きな値を仮の軸力として与えた場合には、各反復計算での値が振動し、収束解が得られていないことがわかる。これは、各繰返し計算での軸力が、仮の軸力より小さい場合には、仮の軸力を用いているためである。

これらの図表より、平衡状態での軸力より小さな値を仮の軸力として与えても、多少収束計算の反復回数が増えるが、正確な値が得られることが分かる。ただし、このモデルは軸力が生じるまでは不安定構造であるため、平衡状態での軸力より小さい値を仮の軸力として与えた場合には、最初の反復計算での変位は、非常に大きな値が得られる。この計算例では、変位自由度数の少ない問題のため、非常に大きな変位が得られても反復計算を進めると正解に収束しているが、自由度数の大きな問題では、別の解に収束してしまう可能性がある。

表2は、図2の model-2 のようにケーブル中央が下に5m下がった位置にあるケーブル構造の変位を求めたものである。平衡状態での軸力に近い $N_0 = 1.6 \times 10^7 N$ の値を仮の軸力として与えると少ない反復回数で収束解を得ている。また、安定構造であるため、平衡状態での値より少ない値を与えても同様に、少ない反復回数で収束解を得ていることが分かる。一方、大きな値を仮の軸力として与えた場合には、急激に収束性が悪化し、解が振動し収束解が得られていない。

表3は、図2の model-3 のようにケーブル中央が上に5m上がった位置にあるケーブル構造の変位を求めたものである。反復計算の1回目の値は、圧縮力が発生した場合の伸び剛性の設定値には関係せず、仮の軸力の値の影響だけを受ける。圧縮力が発生した場合の伸び剛性を変えない場合には、収束解が得られていないことが分かる。一方、伸び剛性を0.1倍すると収束解が得られることが分かる。しかし、ケーブル中央の位置がさらに上がったモデルでは、圧縮力が作用した

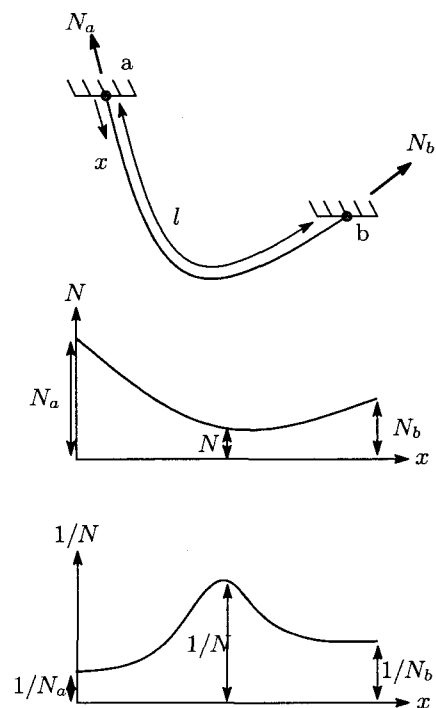


図-4 自重作用下でのケーブルの軸力とその逆数

場合の伸び剛性には、さらに小さな値を与える必要がある。また、前述の計算例と同様に、仮の軸力が平衡状態での軸力に近い場合には少ない反復回数で収束解を得ていることが分かる。

4. 数値積分法

式(6),(8)の被積分関数には、軸力の逆数が含まれている。図4には代表的なケーブル部材の自重による軸力とその逆数を示している。両支点間の距離に比べてケーブルが長い場合には、ケーブル途中での軸力が小さくなり、その逆数の値は、非常に大きな値になることが予想できる。したがって、そのような非常にたわんだ、弛緩に近いケーブルでは数値積分を正確に行うために積分方法に工夫を要する。

4.1 積分区間の分割

このような被積分関数の値が大きく変動する関数の積分方法には、種々の方法が考案されているが、ここでは、比較的簡単な方法として、被積分関数の関数形に応じて積分区間を幾つかに分割して、それぞれの積分区間内を通常の数値積分法により求める方法を用いる。積分区間の分割場所を固定すると、ケーブル形状によっては精度の高い積分が行えないことが考えられるので、ここでは、軸力の逆数が極値、すなわち、 $d(1/N)/dx = 0$ となる点での分割、さらに、軸力逆数の曲線の曲率が極値、すなわち、 $d^3(1/N)dx^3 = 0$ となる点などを積分区間の区切りとする。1/N が極値となる位置で積分区間を分割することは合理性があるが、 $d^3(1/N)dx^3 = 0$ となる位置での分割については、1/N の曲線の変曲点 $d^2(1/N)dx^2 = 0$ の位置では、1/N の極値の近くに積分の区切りが表れることがあり、精度が向上しないことがあるために採用している。

軸力の逆数が極値となる位置と曲率が極値となる位置は以下のようにして求められる。

1/N の 1 階微分と、3 階微分は次のように表される。

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{N} \right) = \frac{1}{N^2} (q^T e) \quad (10a)$$

$$\frac{d^3}{dx^3} \left(\frac{1}{N} \right) = \frac{3}{N^4} (q^T e) [5(q^T e)^2 - 3(q^T q)] \quad (10b)$$

なお、 $d^3(1/N)dx^3 = 0$ となる分割位置は、合理性の面から正確に求める必要はないことから、式の簡便さを優先し、荷重 q が等分布の場合の位置を示している。

これより、軸力の逆数が極値となる位置と曲率が極値となる位置は、次の条件を満足した点にある。

- $q^T e = 0$ となる位置で、軸力の逆数は極値となる。
- $q^T e = 0$ 、および $\pm q\sqrt{3/5}$ となる位置で、軸力逆数の曲線の曲率が極値となる。

なお、 q は分布荷重の大きさを表し $q = \sqrt{(q^T q)}$ である。

ケーブルの単位接線ベクトル e と分布荷重ベクトル q が上述の関係を満たすケーブル要素内の位置で積分区間を区切り、個々の積分区間内では通常の数値積分を用いる。 e には直前の計算により得られた値を用い、ケーブル変形とともに積分区間を動的に変更しながら計算を行う。

4.2 数値積分法の精度の確認

(1) 水平ケーブル

図 5 のような自重の作用した水平ケーブルを対象に、積分次数、積分区間数の違いによる解の精度を調べる。ケーブルのヤング係数は $E=200\text{GN/m}^2$ 、断面積は $A=0.02\text{m}^2$ 、ケーブル長は $L=100\text{m}$ である。ケーブル両端の距離 B を 5m から 100m まで変えたときのサグ f を解析解と比較する。

ケーブルは荷重が作用するまで形状が確定しないため、図 (a) のようにケーブル長が L になるように、節

点 2 の位置を決めている。図 (b) のように距離 B が短くなると軸力の逆数 $1/N$ の値がケーブル中央で非常に大きくなる。ケーブル要素には、この軸力の逆数が含まれるために、 B が小さくなるほど剛性行列を精度良く求めるためには多くの積分次数や積分区間を要することになる。

図 6 は Gauss-Legendre の数値積分法を用いて、積分次数を変えたときの精度を表している。図 (a) は、一要素内の積分区間を等間隔な 2 分割、図 (b) はケーブルに沿って軸力逆数の曲線の曲率が極値となる点で積分区間を区切った場合の結果である。したがって、曲率の極値がない場合には、積分区間は 1 区間、要素内に極値がある場合には、2 区間になっている。これより、曲率が極値となる位置で積分区間を区切ることで、精度の向上していることが分かる。

(2) 傾斜ケーブル

図 7 のような支点間の鉛直距離が 60m 、水平距離 B の間に、長さ 100m のケーブルが斜めに接続された場合のケーブルの変形後の形状を求める。このとき、ケーブル要素は 2 要素を用い、節点 2 はサグ f を求めるために、変形後も 2 節点間の中間に位置するように、水平方向変位を拘束した滑車を有する節点としている。

図 8(a) は、ケーブル要素内に、軸力逆数が極値となる点があると、その位置で積分区間を分割した場合のサグ f の解析解に対する比を示している。 $B=10\text{m}$ の場合に、積分点数が 4 点以下では収束解が得られなかった。また、同図 (b) は、軸力逆数の曲線の曲率が極値になる点で積分区間を分割した場合の結果である。これらの図より、軸力逆数の曲線の曲率が極値になる点で積分区間を分割した結果が高精度の解を得ていることがわかる。

(3) 大きくたわんだケーブル

自重の作用した大きくたわんだケーブルの下端に水平方向の鉛直荷重を作用させたときの変形を求める。図 9 は、ケーブル長 $L=100\text{m}$ 、ヤング係数 $E=200\text{GN/m}^2$ 、断面積 $A=7.5 \times 10^{-4}\text{m}^2$ のケーブルに自重に相当する等分布荷重 $q=50\text{N/m}$ を作用させ、さらに水平荷重を作用させたときのそれぞれの変形図とケーブルに沿った軸力逆数の分布を示している。ここでは、数値積分法として、ケーブル軸力逆数の曲線の曲率が極値となる位置で積分区間を分割し、それぞれの区間を Gauss-Legendre の 5 点積分を用いている。また、この問題の伸び剛性 EA と平衡状態での発生軸力 N は小さいので、仮の軸力には $N_0 = 10^{-3}\text{N}$ 、収束計算の途中で圧縮力が発生した場合の伸び剛性として $10^{-6}EA$ を用いている。また、収束判定には前述の計算例と同様の変位と不平衡力のノルムがそれぞれ、 10^{-6} 以下を用いている。図より $P=0.5\text{kN}$ の水平荷重が作用すると、ケーブルが弛緩した状態になり、このとき、図 (b) のように軸力の逆数の値は、ケーブルに沿って大きく変動している。

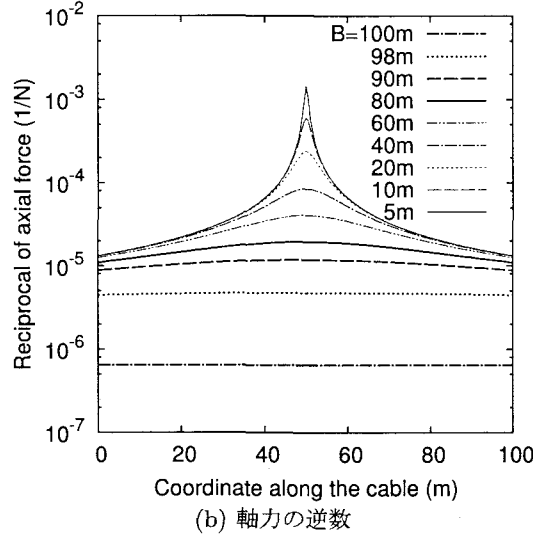
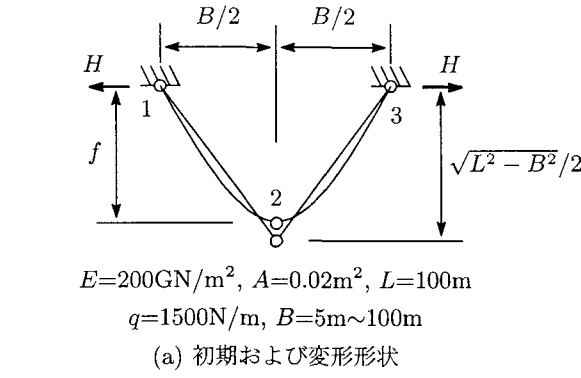


図-5 水平ケーブル

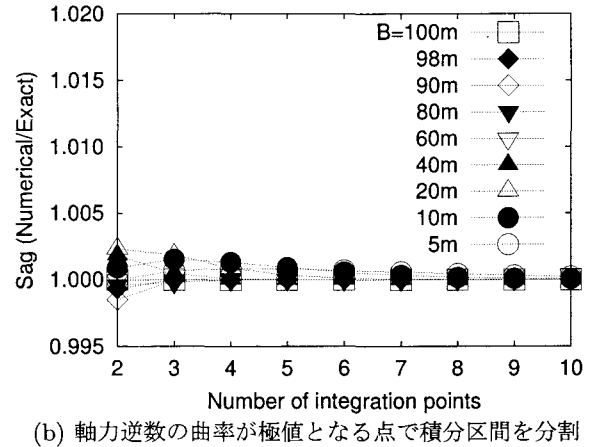
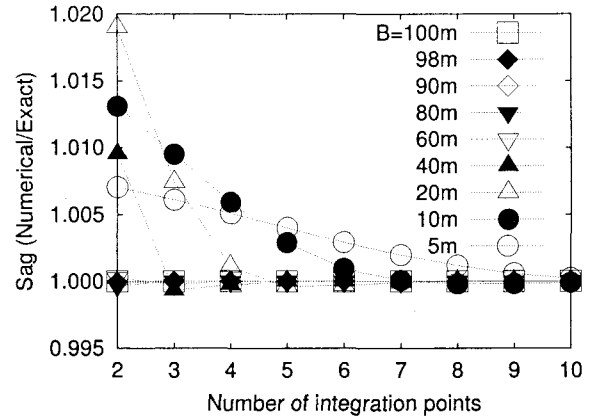


図-6 水平ケーブルでの積分方法による比較

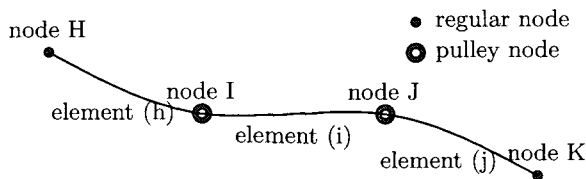


図-10 滑車を有するケーブル

このように積分区間を分割しない方法では、軸力逆数の値が大きく変化する部分を含んだ被積分関数の積分を行うには、かなりの高次の積分公式を用いる必要があり一般的ではないので、多数の積分区間に分けた方法が用いられる。この計算例では、積分区間を100分割した台形則による方法を用いると、水平荷重の増分量を小さく採ることで計算できることが確認できる。

5. 滑車を有するケーブル

5.1 ケーブル要素

図10のように、ケーブル(h), (i), (j)が節点I, Jに取り付けられた滑車を介して接続されたケーブルの系を考える。滑車を介して接続されたケーブルの軸力は、滑車の摩擦がなければ滑車部で等しくなるので、この

条件を汎関数に含めることにより、滑車を表現できる。各ケーブル要素の汎関数を $\Pi_C^{(h)}$, $\Pi_C^{(i)}$, $\Pi_C^{(j)}$ とすると、滑車を有するケーブルの汎関数は次のように表される。

$$\begin{aligned} \Pi_C &= \Pi_C^{(h)} + \Pi_C^{(i)} + \Pi_C^{(j)} \\ &+ \Delta \tilde{u}_I \{N_I^{*(h)} - N_I^{*(i)}\} \\ &+ \Delta \tilde{u}_J \{(N_J^{*(i)} - N_J^{*(j)})\} \end{aligned} \quad (11)$$

ここで、 $\Delta \tilde{u}_I$, $\Delta \tilde{u}_J$ は、ラグランジュの未定係数であるが、汎関数が停留したときには、それぞれ滑車を有する節点IとJのケーブルのずれ変位を表している。この変位は、ケーブルに沿ったx軸方向の変位を正としている。また、式中の $N_I^{*(h)}$ の添え字は、要素(h)の節点Iでの軸力を表している。

上式を変形して、要素ごとに表すと。

$$\begin{aligned} \Pi_C &= \Pi_C^{(h)} + \Delta \tilde{u}_I N_I^{*(h)} \\ &+ \Pi_C^{(i)} - \Delta \tilde{u}_I N_I^{*(i)} + \Delta \tilde{u}_J N_J^{*(i)} \\ &+ \Pi_C^{(j)} - \Delta \tilde{u}_J N_J^{*(j)} \end{aligned} \quad (12)$$

これより、要素の両端に滑車のある一般的な場合のケーブル要素の汎関数は次のように表される。

$$\tilde{\Pi}_C = \Pi_C + [\Delta \tilde{u} N^*]_0^l \quad (13)$$

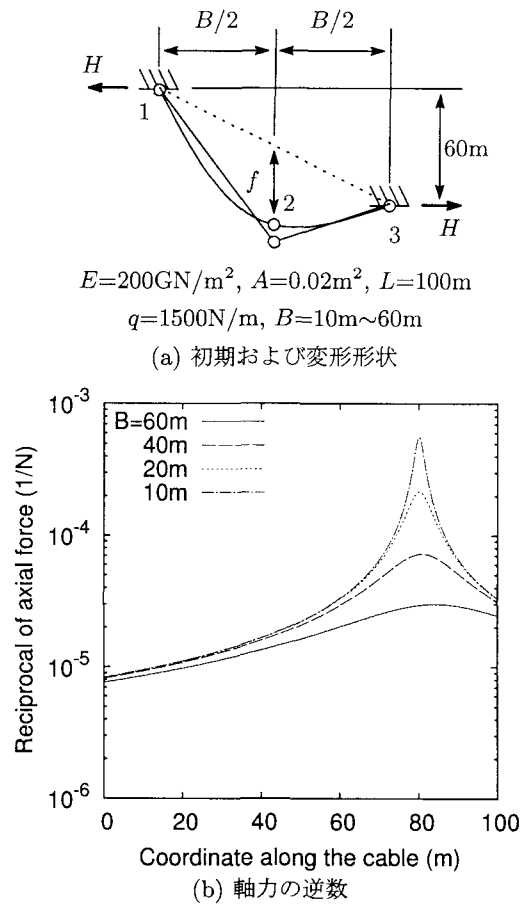


図-7 傾斜ケーブル

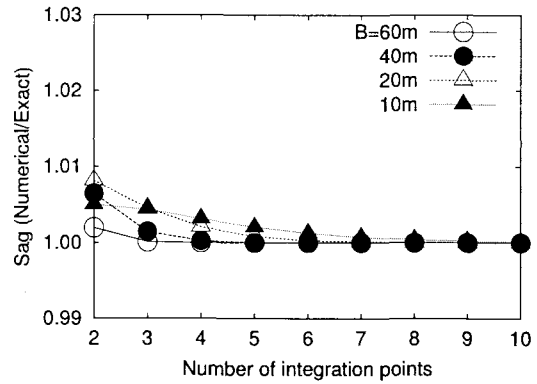
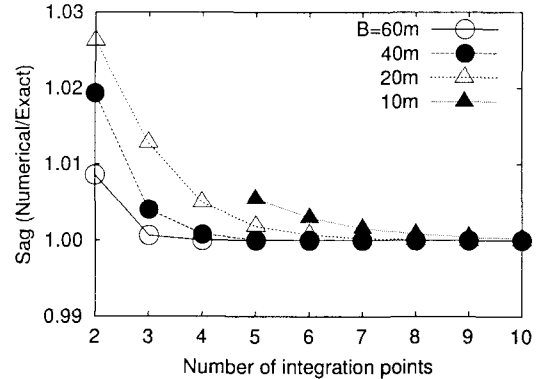


図-8 傾斜ケーブルでの積分方法による比較

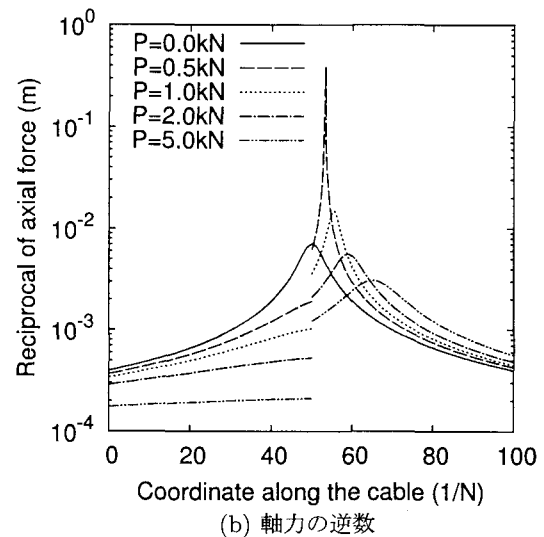
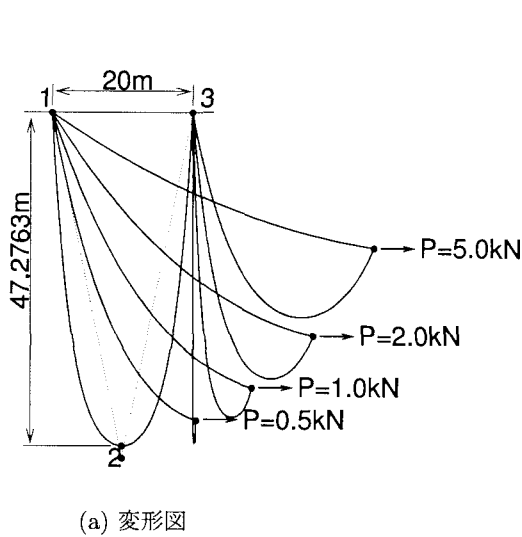


図-9 大きくたわんだケーブル^{1),4)}

上式の汎関数の停留条件は次のようになる。

$$\int_0^l \left\{ e - \left(1 + \frac{\Delta N}{EA} \right) e^* \right\} dx + [\Delta u + \Delta \tilde{u} e^*]_0^l = 0 \quad (14a)$$

$$-N_a^* - Q_a^* = 0 \quad (14b)$$

$$N_b^* - Q_b^* = 0 \quad (14c)$$

$$-e_a^{*T} N_a^* = 0 \quad (14d)$$

$$e_b^{*T} N_b^* = 0 \quad (14e)$$

上式の最後の2式は、滑車の滑り変位に関する停留条件を表し、隣接要素の軸力と等しくなることを表す式であるが、便宜上、1要素の停留条件を誘導したために右辺がゼロとなっている。実際には、構造全体に組み

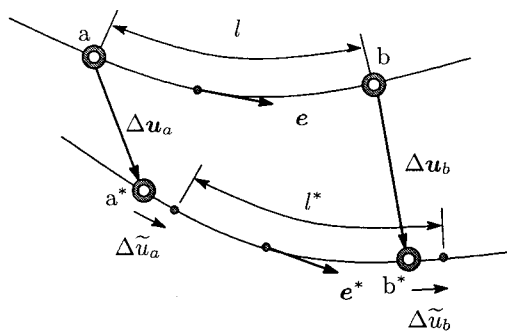


図-11 適合条件

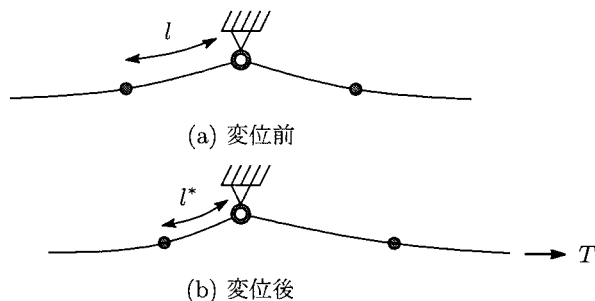


図-12 滑り変位前後のケーブル長

立てると隣接要素の軸力と等しくなる条件を表す。また、分布荷重 q^* は、ケーブルに直接作用しているが、集中荷重 Q^* は、節点 (滑車) に作用している。

滑車を含んだケーブルでは、変位前後でケーブル要素長 (a, b 間と a^*, b^* 間のケーブル長) が大きく変化するために、ケーブル要素の定式化では、更新ラグランジュの手法を用いている。しかし、各増分段階での解をニュートン法を使用して求める際には、直前の増分段階での要素形状を元にしてしているために、増分前後で滑り変位が大きく生じる場合には、収束解を求めた後で、基準とする座標系を更新して、再度、不適合量、不釣り合い力が小さいことを確認する必要がある。もし、これらの量が無視できないほど大きければ、新たな荷重増分を加えずに、座標系とケーブル長の更新を行った後に、再度、収束解を求め直す必要がある。特に、滑車を含んだケーブル要素に分布荷重が作用している場合には、ケーブル長の変化により荷重の合計が変化するために、大きな不適合量や不釣り合い力が生じている。

滑車内をケーブルが滑ると、図 12 のように滑車の隣の通常の節点は、滑った分だけ滑車に近づき、通常の節点と滑車間のケーブル長は短くなる。ケーブル長がゼロ、または負になると計算は破綻するため、表現可能な滑り変位の大きさは、滑車と隣接する節点の長さに依存することになる。したがって、一つのケーブル要素で大きなケーブル長を表現できることが、滑車を有するケーブル構造への適用可能性を広げる上で重要な役割を担っている。

5.2 2 径間ケーブルでの初期形状の影響

図 13 のように、中間支点到に滑車に取り付けられ、等分布荷重の作用した 2 径間ケーブルについて、解析を始める前の初期形状を変えた場合の解析を行う。この問題では中間支点到に滑車に取り付けられているので、支点到に隣接するケーブルは、この点で軸力が等しくなるような滑り変位が生じることになる。中間支点的の両側のケーブル長が等しくなるように、初期形状を決めた場合には、等分布荷重が作用しても滑車部に滑り変位は発生しない。しかし、両側のケーブル長が異なる場合には、滑車部に滑り変位が生じることになる。図 13 の破線で示しているものは初期形状を表している。このケーブルに等分布荷重として、 $q=50\text{N/m}$ を鉛直下向きに作用させたときの変形後の形状が図中の実線である。なお、これらの計算では、両支点到間のケーブル長は $L=230\text{m}$ 、伸び剛性は $EA=150\text{MN}$ である。また、表 4 は、それぞれの初期形状におけるケーブルに分布荷重が作用した後のケーブル中間部のサグ f_1, f_2 、滑り変位後の各支点到間のケーブルの無応力時に相当する長さ、支点到での軸力を示している。

これらより、初期形状によって、最終的な変位状態が複数現れていることがわかる。Case-3 のように左右対称な初期形状を与えた場合には、分布荷重作用後の形状も左右対称になっている。しかし、Case-1 や 2 のように左右の対称性を崩した初期形状を与えた場合には荷重作用後の形状も対称性のない状態になっている。また、Case-2 のようにわずかに対称性を崩した初期形状を与えた場合でも、荷重作用後の形状は Case-3 のような対称な状態にはならず、Case-1 のような形状になっている。

図 14 は、ケーブル両支点到間の距離 80m の水平ケーブルに、鉛直下向きの等分布荷重 $q=50\text{N/m}$ を作用させたときの、ケーブル長 L と支点到での軸力 T の関係を示している。ケーブル長を支点到間距離 80m より大きくすると、当初、軸力は減少するが、ケーブル長が $L=100.7\text{m}$ を超えると増加に転じている。これより、同一の軸力に対して 2 種類のケーブル長が存在することがわかる。

同じ支点到間距離に取り付けられたケーブルについてのこのようなケーブル長と支点到での軸力の関係より、中間支点到に滑車の取り付けられたケーブルの荷重作用後の形状が 2 種類存在しうることがわかる。

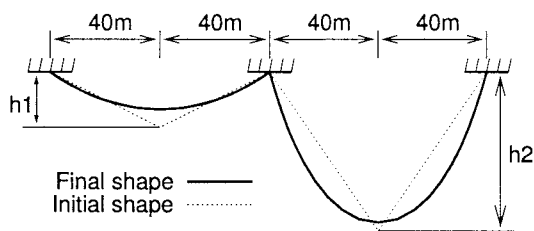
5.3 滑車部でケーブルに力が作用する場合

図 15 のように、ケーブル要素 (i) が節点 I, J に取り付けられた滑車を介して接続されたケーブルの系において、滑車部 I, J に滑りを起こさせるような力 T_I^* と T_J^* が作用した場合を考える。この状態を表す汎関数は次のようになる。

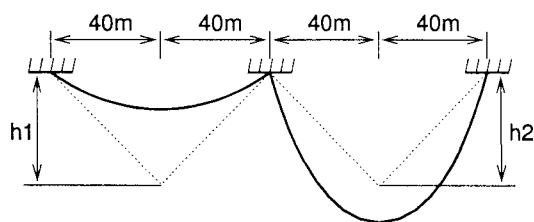
$$\tilde{\Pi}_C = \Pi_C + [\Delta \tilde{u}(N^* - n_x T^*)]_0^l \quad (15)$$

表-4 滑車を有する 2 径間ケーブル

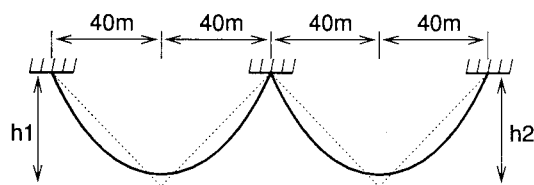
Case	初期状態		分布荷重作用後				
	中間部の高さ		サグ		ケーブル無応力長		支点部の軸力
	h_1 (m)	h_2 (m)	f_1 (m)	f_2 (m)	L_1 (m)	L_2 (m)	
1	20.0000	57.7848	13.5075	54.7453	85.7870	144.2130	3.74308
2	41.0000	41.6125	13.5075	54.7453	85.7870	144.2130	3.74308
3	41.3068	41.3068	37.0079	37.0079	115.0000	115.0000	3.15874



(a) Case-1 ($h_1=20.0\text{m}$, $h_2=57.7848\text{m}$)



(b) Case-2 ($h_1=41.0\text{m}$, $h_2=41.6125\text{m}$)



(c) Case-3 ($h_1=h_2=41.3068\text{m}$)

図-13 中間支点部に滑車を有する 3 径間ケーブルの計算例

ここで, n_x はケーブル断面の外向き法線と x 軸との方向余弦を表す。

上式の汎関数の停留条件は次のようになる。

$$\int_0^l \left\{ e - \left(1 + \frac{\Delta N}{EA} \right) e^* \right\} dx + [\Delta u + \Delta \tilde{u} e^*]_0^l = 0 \quad (16a)$$

$$-N_a^* - Q_a^* = 0 \quad (16b)$$

$$N_b^* - Q_b^* = 0 \quad (16c)$$

$$-e_a^{*T} N_a^* - T_a^* = 0 \quad (16d)$$

$$e_b^{*T} N_b^* - T_b^* = 0 \quad (16e)$$

これらの停留条件を用いて, 図 16 の 2 ケースの反力と断面力を求めてみる。

図 16(a) のように節点 2 の滑車が固定され, ケーブルに力 T が作用しているケーブルの節点 2 の平衡方程

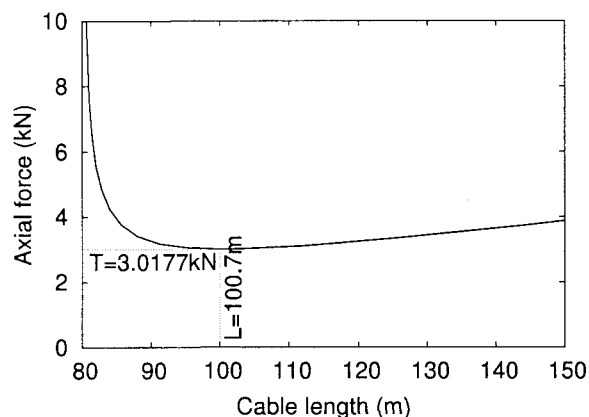


図-14 ケーブル長と支点軸力の関係 (支点間距離 80m)

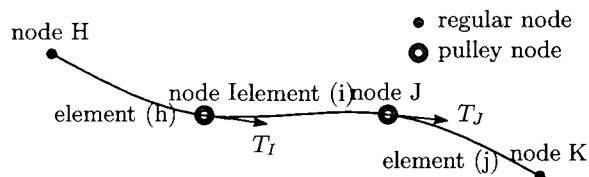


図-15 滑車部でケーブルに力が作用する場合

式は次のようになる。

$$N - R_2 = 0 \quad (17a)$$

$$N - T = 0 \quad (17b)$$

これより, 節点 2 には次のような反力が生じる。

$$R_2 = Te \quad (18)$$

また, 図 (b) のようにケーブルの両端が梁要素に接続され, 滑車部でケーブルに力 T が作用しているケーブルの節点 2 の平衡方程式は次のようになる。

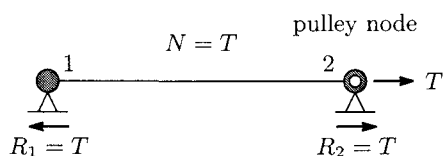
$$N_c + N_b = 0 \quad (19a)$$

$$N_c - T = 0 \quad (19b)$$

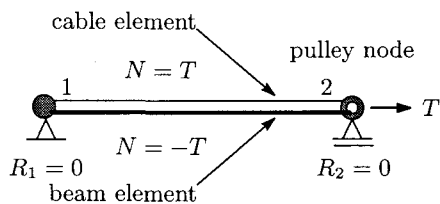
ここで, N_c はケーブルの, N_b は梁要素の断面力ベクトルである。これよりこれらの断面力は次のようになる。

$$N_c = Te, \quad N_b = -Te \quad (20)$$

このように, 滑車部でのケーブルに直接作用させる力 T は, ケーブルのプレストレスに相当している。

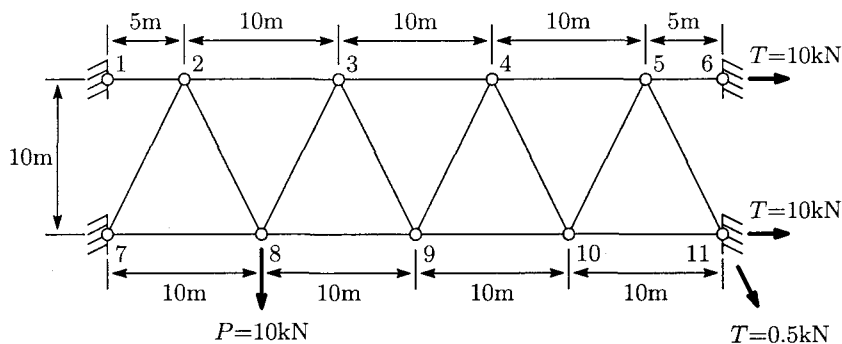


(a) 両端が固定されたケーブル



(b) 梁部材と両端が結合したケーブル

図-16 滑車部でケーブルに力 T が作用した場合



Main cables : $E=140\text{GN/m}^2$, $A=758\text{mm}^2$, $q=63.0\text{N/m}$
 Diagonal cable : $E=140\text{GN/m}^2$, $A=39.4\text{mm}^2$, $q=3.27\text{N/m}$

図-17 ケーブルトラスの初期形状

5.4 ケーブルトラスの計算例

図 17 のような水平距離 40m, 高さ 10m の 4 箇所
 に支点があり, 2 本の主ケーブルと 1 本の斜めケー
 ブルから構成されたケーブルトラスの解析を行う。これ
 はケーブルに荷重の作用する前の無応力状態での初期
 形状を表している。これらのケーブルは図示のように
 ヤング係数が $E=140\text{GN/m}^2$, 主ケーブルの断面積は
 $A=758\text{mm}^2$, 斜めケーブルの断面積は $A=39.4\text{mm}^2$ で
 ある。また, プレストレス力として, 主ケーブルには
 $T=10\text{kN}$, 斜めケーブルには $T=0.5\text{kN}$ の引張力を作用
 させる。

このケーブルトラスに, プレストレス力 T と自重 q お
 よび集中荷重 P が作用したときのケーブル形状とケー
 ブルに生じる軸力を, 以下の計算手順により求める。

- 各ケーブルに所定のプレストレス力 T を作用させ
 ために, 節点 1 と 7 以外の全ての節点に滑車を
 導入する。また, 主ケーブルと斜めケーブルが接
 続する節点, たとえば, 節点 2, 3, 8 などの節点で
 は, 主ケーブルと斜めケーブルの両方が滑車内を
 通るようにモデル化する。これは図 18 のように同
 一の節点に 2 個の滑車を導入し, 隣接する主ケー
 ブル同士, 斜めケーブル同士を接続することで表
 現できる。この状態で, 節点 6 と 11 の滑車を通る
 主ケーブルと斜めケーブルに, 所定の力 T を与え
 て, 平衡状態を求める。
- 次に, 自重に相当する鉛直下向きの等分布荷重 q を
 作用させてケーブルの平衡状態を求める。この段
 階で, 所定のプレストレス力 T と自重 q の作用し
 たケーブルトラスの形状が決定されたことになる。
- 最後に, 全ての滑車の滑り変位を拘束して, 集中
 荷重 P を作用させて平衡状態を求める。

図 19 に, 各計算ステップでのケーブルトラスの変形
 図を示す。また, 表 5 に節点座標値, 表 6 に, 各ケー
 ブル要素の軸力および無応力時に相当するケーブル長
 を示す。

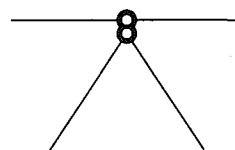


図-18 同一節点上の 2 つの滑車

6. あとがき

文献¹²⁾に示されたケーブル要素について, 数値計算
 上の留意点について考察を行い, また, 被積分関数に
 軸力の逆数が含まれているために, その積分を正確に
 行うための手法を提案し, さらに, 滑車部において, 滑
 車内のケーブルに直接, 力が作用するような式を誘導
 した。また, 数値計算により, これらの手法の有効性
 を示した。

これにより, 等張力の条件下でのケーブルトラスの
 形状決定と引き続く荷重による構造解析が行えたこと
 になる。このように, 滑車を有するケーブル要素を用
 いることで, 形状決定のための特別な計算手法を用い
 なくても, 形状決定が行え, 形状決定と構造解析が同
 一手法で行える。

参考文献

- 1) 中西 宏, 波田凱夫: 曲線要素を用いた有限要素法による
 ケーブル構造の大変形解析, 土木学会論文報告集, 第 318
 号, pp.41-50, 1982.
- 2) 謝 旭, 伊藤 学, 山口広樹: Updated Lagrangian
 手法に基づく柔ケーブルの非線形解析, 構造工学論文集,
 Vol.41A, pp.427-434, 1995 年 3 月.
- 3) 阿井正博, 西岡 隆, 奥村敏恵: ケーブル構造に関する
 一理論解析, 土木学会論文報告集, 第 260 号, pp.17-32,
 1977.
- 4) 後藤茂夫: 柔ケーブル材の接線剛性方程式について, 土
 木学会論文報告集, 第 270 号, pp.41-49, 1978.
- 5) M. Ai and Y. Ohsumi: The elastic catenary as a
 displacement-method element, *J. Struct. Mech. Earth-
 quake Eng., JSCE*, No. 661/I-53, pp.241-246, 2000.
- 6) 真柄栄毅, 国田二郎, 川股重也: 混合法によるケーブルネッ

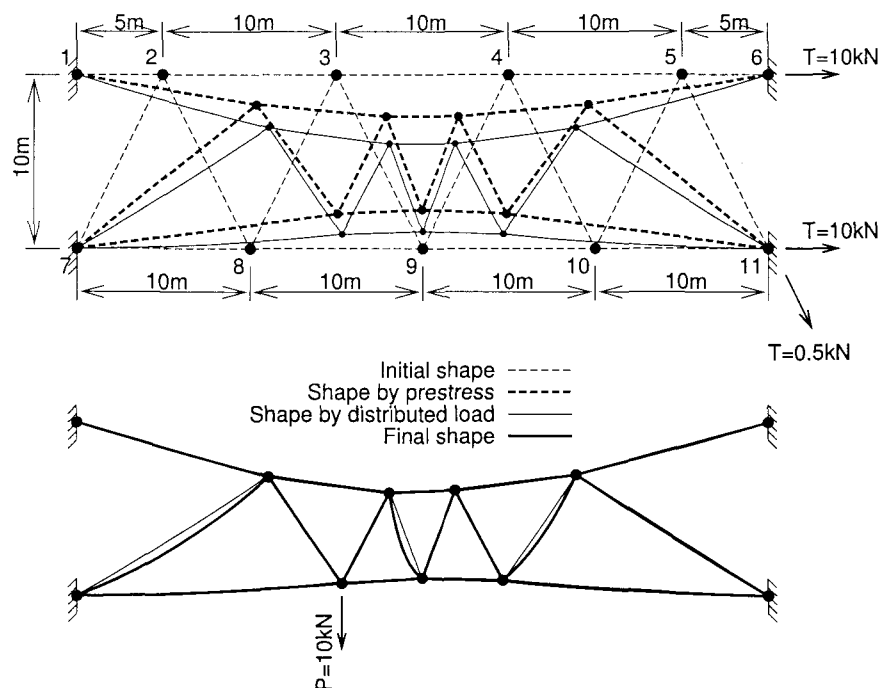


図-19 ケーブルトラスの計算例

表-5 ケーブルトラスの節点座標値

節点 番号	初期形状		プレストレス作用後	
	X(m)	Y(m)	X(m)	Y(m)
1	0.0000	10.0000	0.0000	10.0000
2	5.0000	10.0000	10.3849	8.2898
3	15.0000	10.0000	17.8983	7.6011
4	25.0000	10.0000	22.1017	7.6011
5	35.0000	10.0000	29.6151	8.2898
6	40.0000	10.0000	40.0000	10.0000
7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
8	10.0000	0.0000	15.0932	1.9991
9	20.0000	0.0000	20.0000	2.2278
10	30.0000	0.0000	24.9068	1.9991
11	40.0000	0.0000	40.0000	0.0000
節点 番号	自重作用後		集中荷重作用後	
	X(m)	Y(m)	X(m)	Y(m)
1	0.0000	10.0000	0.0000	10.0000
2	11.0932	6.9763	11.0705	6.8752
3	18.0804	6.0454	18.0637	5.9743
4	21.9196	6.0454	21.9013	6.1179
5	28.9068	6.9763	28.8981	6.9915
6	40.0000	10.0000	40.0000	10.0000
7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
8	15.3173	0.8315	15.3249	0.7413
9	20.0000	0.9815	20.0003	1.0456
10	24.6827	0.8315	24.6838	0.9135
11	40.0000	0.0000	40.0000	0.0000

表-6 ケーブルトラスの軸力とケーブル長

要素	要素中央の軸力 (kN)			ケーブル長 (m)	
	プレスト レス作用後	自重作用後	集中荷重 作用後	プレスト レス作用後	自重作用後
1-2	10.0000	9.8986	37.1997	10.5238	11.4992
2-3	10.0000	9.7771	32.4843	7.5442	7.0489
3-4	10.0000	9.7501	34.8994	4.2030	3.8390
4-5	10.0000	9.7771	35.1671	7.5442	7.0489
5-6	10.0000	9.8986	31.0434	10.5238	11.4992
7-8				40.3390	40.9352
8-9	10.0000	10.0146	13.1509	15.2235	15.3444
9-10	10.0000	10.0560	14.1710	4.9117	4.6848
10-11	10.0000	10.0560	13.5484	4.9117	4.6848
				15.2235	15.3444
				40.2705	40.0583
7-2	0.5000	0.5111	0.0982	13.2867	13.1060
2-8	0.5000	0.5127	6.4318	7.8568	7.4562
8-3	0.5000	0.5112	5.7369	6.2646	5.9003
3-9	0.5000	0.5115	0.0114	5.7692	5.4151
9-4	0.5000	0.5115	1.7138	5.7692	5.4151
4-10	0.5000	0.5112	1.2305	6.2646	5.9003
10-5	0.5000	0.5127	0.0325	7.8568	7.4562
5-11	0.5000	0.5111	5.8516	13.2867	13.1060
				66.3543	63.7553

トの解析 その(2) 幾何学的非線形問題の厳密解, 日本建築学会論文報告集, 第220号, pp.35-45, 1974.

- 7) B. M. McDonald and A. H. Peyrot : Analysis of Cable Suspended in Sheaves, *J. Struct. Engng., ASCE*, Vol.114, No.3, 1988.
- 8) M. Aufaure : A Finite Element of Cable Passing Through a Pulley, *Computers & Structures*, Vol.46, No.5, pp.807-812, 1993.
- 9) 中西 宏, 波田凱夫 : 最適値問題の手法による吊構造の形状決定解析, 日本建築学会論文報告集, 第238号, pp.13-23, 1975.
- 10) Y. Namita and H. Nakanishi : Optimum design analysis of structural cable networks, *Proc. of JSCE*,

No.432/I-16, pp.21-30, 1991.

- 11) M. Ai and H. Imai : A shape-finding analysis of suspended structures on the displacement-method equilibrium, *J. Struct. Mech. Earthquake Eng., JSCE*, No. 752/I-66, pp.27-41, 2004.
- 12) 岩崎英治, 長井正嗣 : 滑車を有する柔ケーブル構造に適用可能な有限要素の開発, 構造工学論文集, Vol.48A, pp.151-158, 2002.3.
- 13) 岩崎英治, 松野純一, 長井正嗣 : 弧長法のための一反復解法と弧長自動設定法, 応用力学論文集, Vol.5, pp.207-216, 2002.8

(2004年9月17日 受付)