

超大型浮体の波浪回折問題に対する OSP-ILUC の有効性

Effectiveness of OSP-ILUC for wave diffraction analysis of a Very Large Floating Structure (VLFS)

巻幡憲俊*・宇都宮智昭**・渡邊英一***

Noritoshi MAKIHATA, Tomoaki UTSUNOMIYA and Eiichi WATANABE

*学生員 京都大学大学院 工学研究科社会基盤工学専攻 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町)

**正会員 工博 京都大学助教授 大学院工学研究科社会基盤工学専攻 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町)

***フェロー Ph.D. 工博 京都大学教授 大学院工学研究科社会基盤工学専攻 (〒 606-8501 京都市左京区吉田本町)

This paper presents the performance of preconditioners for the non-Hermitian dense linear systems arising from the boundary value problem related to the diffraction wave field around a Very Large Floating Structure (VLFS). The generalized minimal residual method (GMRES) is a well-known iterative method for solving large non-Hermitian linear systems of equations. It is well known that the number of iterations needed by GMRES can be reduced significantly using preconditioning techniques. The operator splitting preconditioner (OSP) is an effective technique in solving dense linear systems arising from the boundary element method (BEM). OSP splits the dense matrix into the sparse matrix of the near field interactions and the dense matrix of the far field interactions. Out of the sparse matrix, the preconditioner is constructed using the Crout version of incomplete LU factorization (ILUC). Matrix-vector products are approximated by utilizing the fast multipole method (FMM), which need not calculate the dense matrix of the far field interactions directly. The OSP-ILUC preconditioner does not require the dense matrix of the far field interactions. Therefore, it is expected that the boundary element method using FMM will be further accelerated by OSP-ILUC. Numerical results from the pontoon-type VLFS of which length is 2000m are presented.

Key Words : preconditioning, operator splitting, incomplete LU factorization, GMRES, dense linear systems, fast multipole method, VLFS

1. はじめに

超大型浮体まわりの回折波浪場に関する境界値問題の解析においては、流体に対しては境界要素法 (BEM) が、構造物に対しては有限要素法 (FEM) が適しており、流体と構造物の境界における速度の法線成分の連続性により両手法が結合される¹⁾。最終的には、非エルミートかつ密行列を係数とする大規模連立 1 次方程式

$$Ax = b \quad (1)$$

を解くことに帰着する。

大規模かつ非エルミート行列を係数とする連立 1 次方程式の反復解法として、the generalized minimal residual method (GMRES)²⁾がよく知られているが、GMRES は収束に到るまでの反復回数の増加とともに必要とする記憶容量も増加する欠点を有する。このため、通常リスタート版 GMRES が使用されるが、残差ノルムの収束が悪化する。リスタート版 GMRES は、the implicitly restarted GMRES (GMRES-IR)³⁾、the GMRES with deflated restarting (GMRES-DR)⁴⁾と改良され、本問題に対してもこれらの手法が有効であることを実証した^{5), 6)}。

GMRES (または GMRES-DR) の収束率には、係数行列の固有値分布が強く影響することが知られている。与えられた連立 1 次方程式を、より好ましい固有値分

布を持った連立 1 次方程式に変換しようと試みる方法として前処理という手法がある。大規模疎行列に対する前処理として、the dual threshold incomplete LU factorization (ILUT)⁷⁾が提案されているが、ILUT よりもさらに高速に前処理行列を構築する the Crout version of the incomplete LU factorization (ILUC)⁸⁾が開発され、大規模密行列である本問題に対してこれらの手法の適用を試み、その比較も行った⁹⁾。反復法における行列-ベクトル積は、the fast multipole method (FMM)¹⁰⁾を用いて近似され、遠方点に対応する行列成分は計算されない。このため、前処理行列の構築に係数行列の全成分を必要とするこの前処理では、収束性は改善されるものの、FMM を用いたとき、前処理行列の構築に要する時間もあわせた全計算時間に関しては、これを大きく還元することはできなかった⁹⁾。

一方、境界要素法から得られた連立 1 次方程式に対する前処理として、the operator splitting preconditioner (OSP)¹¹⁾が知られている。係数行列は近傍点からなる疎行列と遠方点からなる密行列に分解され、近傍点からなる疎行列から ILUC により前処理行列が構成される。OSP-ILUC による前処理は、遠方点からなる密行列を必要としないため、FMM を用いた境界要素法がさらに高速化されると期待できる。

そこで本研究では、ポンツーン型超大型浮体まわりの回折波浪場に関する境界値問題の解析に OSP-ILUC

を適用し、その数値実験結果から、本手法の有効性について検討する。

2. 定式化及び解析モデル

解析モデルは、図-1に表される、一定水深 h の無限海域に設置される、長さ L 、幅 B 、喫水 d の箱形ポンツーン浮体である。平均自由水面上に xy 平面をとり、 z 軸は鉛直上向きが正の向きとなるように定義する。これに、波振幅 A 、角周波数 ω の微小振幅波が入射するものとする。入射波方向 β を、 $\beta = 0$ の時に x 軸の正の方向から負の方向へ進行する波となり、 $\beta = \pi/2$ の時に y 軸の正の方向から負の方向へ進行する波となるような方向として定義する。

流体を非粘性、非圧縮性の完全流体とし、流体運動を非回転的とするとき、全ての流体運動は速度ポテンシャル Φ で表現することができる。また、流体運動、浮体運動いずれも定常的な角周波数 ω の調和振動を行っているものとする。このとき、全ての時間依存項について、以下のように表す。

$$\Phi(x, y, z, t) = \text{Re}[\phi(x, y, z)e^{i\omega t}] \quad (2)$$

ただし、 i は虚数単位を、 t は時間を表す。

流体運動は微小であるとし、微小振幅波理論が適用できるものとする。この前提のもとで、本研究で扱う問題を、速度ポテンシャル ϕ に関する境界値問題として定式化する。

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (3)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = K\phi \quad \text{on } S_F \quad (4)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad \text{on } B_0 \quad (5)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \quad \text{on } S_H \quad (6)$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \sqrt{r} \left(\frac{\partial(\phi - \phi_I)}{\partial r} - ik(\phi - \phi_I) \right) = 0 \quad \text{on } S_\infty \quad (7)$$

$$\phi_I = 1 \frac{gA \cosh k(z+h)}{\omega \cosh kh} e^{ik(x \cos \beta + y \sin \beta)} \quad (8)$$

ここで、 ϕ_I は入射波ポテンシャルである。また、 Ω は流体領域を、 S_F は自由水面を、 B_0 はベースとなる $z = -h$ の一定水深面を、 S_H は浮体の没水表面を、 S_∞ は無限遠境界を表す。 K は無限水深時波数($=\omega^2/g$ ： g は重力加速度)を、 k は波数を表し、次式の分散関係式を満たす。

$$k \tanh kh = K \quad (9)$$

また、 n は流体から外向き方向を正とする単位法線ベクトルを表す。 r は原点からの水平距離である。

速度ポテンシャル ϕ に関する境界条件式を積分方程式に代入すると次式が得られる。

$$4\pi\phi(x) + \int_{S_H} \phi(\xi) \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial n_\xi} d\xi = 4\pi\phi_I(x) \quad (10)$$

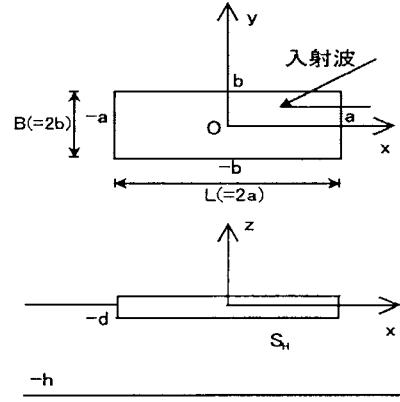


図-1 ポンツーン型浮体

ここで、 $G(x, \xi)$ は水波 Green 関数と呼ばれる、境界条件式(4)、(5)、(7)を満たす、ラプラス作用素 ∇^2 の基本解である。

上式は、 S_H の表面上に配置される N 個の節点における未知ポテンシャル $\phi_i (i = 1, \dots, N)$ を未知数とする連立1次方程式に帰着される^{10), 12)}。

3. 前処理について

GMRESは前処理という手法により、反復回数を大幅に減らすことができる場合がある。

前処理行列を M とする。連立1次方程式(1)を次式のような連立1次方程式

$$AM^{-1}y = b, \quad x = M^{-1}y \quad (11)$$

に変換し、 AM^{-1} に対してGMRESを実行することにより解を求める場合、(右)前処理と呼ばれている。 M として、その逆行列 M^{-1} がすぐに計算でき、さらに AM^{-1} のすべての固有値が1の近くに集まるようなものが望ましく、次の不等式¹³⁾から反復回数が減少すると期待される。

$$\frac{\|r_m\|_2}{\|r_0\|_2} \leq \frac{L}{2\pi\epsilon} \inf_{p_m \in P_m, p_m(0)=1} \|p_m\|_{\Lambda_\epsilon} \quad (12)$$

ただし、 ϵ は適当に与えた正の実数であり、 Λ_ϵ は AM^{-1} の ϵ -pseudospectrum¹³⁾全体、 L は Λ_ϵ の境界の長さ、 P_m は m 次多項式全体、 r_m はGMRESによる近似解 x_m の残差である。

4. Operator splitting preconditioners

水波 Green 関数 $G(x, \xi)$ は、 S_H 上の各点 x に対して

$$\lim_{\xi \rightarrow x} |G(x, \xi)| = +\infty \quad (13)$$

であるから、係数行列 A の成分は、各節点 x_i に対して、節点 x_j が節点 x_i に近いとき $|a_{ij}|$ は大きな値を取る。

正の実数 r に対して、 $A_{\text{near}}(r) = \{a_{ij} \in \mathbb{C} : \|x_i - x_j\|_2 < r\}$ 、 $A_{\text{far}}(r) = \{a_{ij} \in \mathbb{C} : \|x_i - x_j\|_2 \geq r\}$ により

$$A = A_{\text{near}}(r) + A_{\text{far}}(r) \quad (14)$$

と分解する.

r は $A_{\text{near}}(r)$ が疎行列となるように定められる. 前処理行列 M は, 疎行列 $A_{\text{near}}(r)$ から構成され,

$$AM^{-1} \approx \{A_{\text{near}}(r) + A_{\text{far}}(r)\}A_{\text{near}}(r)^{-1} \quad (15)$$

$$= I + A_{\text{far}}(r)A_{\text{near}}(r)^{-1} \quad (16)$$

であるから, $\|A_{\text{far}}(r)A_{\text{near}}(r)^{-1}\|_2$ が小さくなるように r を選べば, AM^{-1} のすべての固有値は 1 の近くに集まることが期待される. このような前処理は the operator splitting preconditioner (OSP)¹¹⁾ と呼ばれている.

r を大きくすると $\|A_{\text{far}}(r)\|_2$ の値は減少するが, $\|A_{\text{near}}(r)^{-1}\|_2$ の値は増加するため, r を大きく選んでも収束性の改善は期待できないと思われる.

5. Crout version of ILU

ここでは, 疎行列 $A_{\text{near}}(r)$ から, the Crout version of the incomplete LU factorization (ILUC)⁸⁾を用いて, 前処理行列 M を構築する.

ILUC のアルゴリズムは以下のとおりである. ここでは break down を避けるために, U の対角成分 d_k がマシンイプシロン eps より小さいときは 10^{-3} で置き換えることにする.

ILUC

```

do  $k = 1, \dots, n$ 
  do  $j = k, \dots, n$ 
     $z_j = a_{kj}$ 
  end do
  do  $i = 1, \dots, k-1; l_{ki} \neq 0$ 
    do  $j = k, \dots, n; u_{ij} \neq 0$ 
       $z_j = z_j - l_{ki}u_{ij}$ 
    end do
  end do
  do  $j = k+1, \dots, n$ 
     $w_j = a_{jk}$ 
  end do
  do  $i = 1, \dots, k-1; u_{ik} \neq 0$ 
    do  $j = k+1, \dots, n; l_{ji} \neq 0$ 
       $w_j = w_j - l_{ji}u_{ik}$ 
    end do
  end do
  if ( $|z_k| < \text{eps}$ ) then
     $z_k = 10^{-3}$ 
  end if
   $d_k = z_k$ 
  do  $j = k+1, \dots, n$ 
    if ( $|z_j| \geq \tau$ ) then
       $u_{kj} = z_j$ 
    end if
  end do
  do  $j = k+1, \dots, n$ 
    if ( $|w_j| \geq \tau$ ) then
       $l_{jk} = w_j/d_k$ 
    end if
  end do
end do

```

end do

ILUC は 2 つのパラメータ τ, p により制御され, τ は L, U の成分の絶対値の最小の値を, p は L の各列当たりの最大の個数, および U の各行当たりの最大の個数を表す.

6. 数値実験結果

図-1 において $L = 2000\text{m}$, $B = 400\text{m}$, $d = 1.5\text{m}$, $h = 20\text{m}$ としたモデルについて入射角を x 軸から 60° , 入射波長 λ を 88.770m または 55.034m としてベンチマーク解析を行う.

要素としては 4 節点 1 次要素¹⁴⁾を用いる. 底面を $5\text{m} \times 5\text{m}$ のパネルで, 側面を $5\text{m} \times 1.5\text{m}$ のパネルで分割し, 要素数 32960, 節点数 33441 である. 反復はすべて初期値 $x_0 = 0$ から始め, 京都大学学術情報メディアセンターのスーパーコンピュータ HPC2500 において倍精度でスレッド並列計算 (32CPU) を行った. なお, the fast multipole method (FMM)¹⁰⁾の並列化においては西村, 宗像 (2004)¹⁵⁾を参照し, 行列-ベクトル積の計算における上向き pass 及び下向き pass に対して適用した.

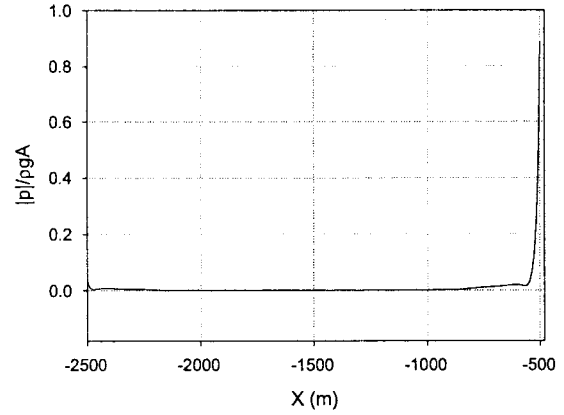


図-2 ポンツーン底面圧力分布 入射波長=88.770m

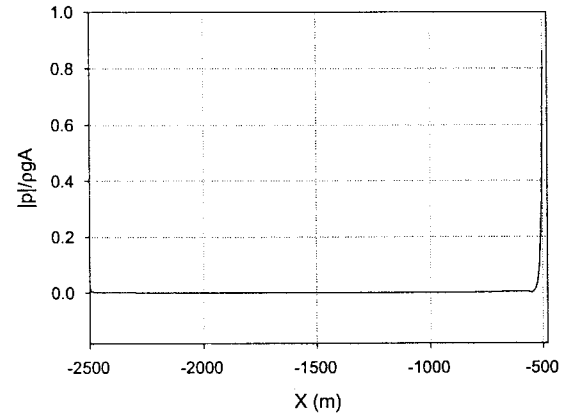


図-3 ポンツーン底面圧力分布 入射波長=55.034m

図-2, 3 は, 浮体底面 ($z = -1.5$) の x 軸上における圧力分布 $p(x, 0, -1.5)$ を図にしたものである. また, 前

処理を適用した場合と適用しなかった場合とで圧力分布がほぼ完全に一致することを確認している。

表-1 r を変化させたときの OSP-ILUC の計算結果. $\lambda = 88.770\text{m}$, $N = 33441$.

$r(\text{m})$	Ratio _A	Ratio _M	Its	Pre(s)	It(s)	Tot(s)
0	0.000	0.000	412	0	3994	3994
20	0.002	0.007	296	183	2779	2962
40	0.007	0.034	191	608	2212	2820
60	0.014	0.048	169	698	1691	2389
80	0.024	0.049	206	752	2068	2820
20	0.002	0.022	296	450	3755	4205
40	0.007	0.089	191	2110	2623	4733
60	0.014	0.180	169	8053	2750	10803

表-2 r を変化させたときの OSP-ILUC の計算結果. $\lambda = 55.034\text{m}$, $N = 33441$.

$r(\text{m})$	Ratio _A	Ratio _M	Its	Pre(s)	It(s)	Tot(s)
0	0.000	0.000	664	0	8121	8121
20	0.002	0.010	326	247	3990	4237
40	0.007	0.043	240	787	3110	3897
60	0.014	0.049	441	932	5817	6749
20	0.002	0.028	326	645	3954	4599
40	0.007	0.116	240	2717	2718	5435

ILUC(τ, p) において, $\tau = 10^{-5}$, $p = 0.025 \times N$ に固定した. r は遠方点の最小距離 (m) を表すパラメータである. “Ratio_A” は $A_{\text{near}}(r)$ の 0 でない成分の個数を係数行列 A の成分の個数 ($= N^2$) で割った比率を, “Ratio_M” は ILUC により得られた L と U の 0 でない成分の個数を係数行列 A の成分の個数 ($= N^2$) で割った比率を表し, $2p/N (= 0.05)$ がその上限となる. “Its” は反復回数を, “Pre” は前処理行列の構築に要する時間 (s) を, “It” は反復に要した時間 (s) を, “Tot” は全計算時間 (s) を表す. 但し, いずれも経過時間である. また, 収束回数は $\|r\|_2 \leq 10^{-5} \|b\|_2$ が満たされる最小の数とした.

表-1, 2 は, それぞれ入射波長 λ を 88.770m, 55.034m としたとき, パラメータ r を変化させたときの OSP-ILUC の計算結果を表にしたものである. λ が 88.770m のときは r が 60m まで, λ が 55.034m のときは r が 40m まで, 全計算時間が単調に減少している. したがって, パラメータ r は比較的容易に設定できることが分かる. また, ILUC(τ, p) のパラメータを $\tau = 10^{-16}$, $p = 0.5 \times N$ に設定した結果を, 表-1 の最後の 3 行, 表-2 の最後の 2 行に加えてある. これは, $A_{\text{near}}(r)$ に対して, 通常の LU 分解を実行することにより前処理行列を構築することを意味する. $\tau = 10^{-5}$, $p = 0.025 \times N$ に設定した結果と比較して, 収束回数に変化がなかったため, $A_{\text{near}}(r)$ に対して ILUC を適用し, 疎行列格納形式により前処理行列を構築した方が, 計算時間及び記憶容量において経済的であることが分かる.

図-4, 5 は, それぞれ入射波長 λ を 88.770m, 55.034m としたとき, OSP-ILUC を適用したときと前処理を適用

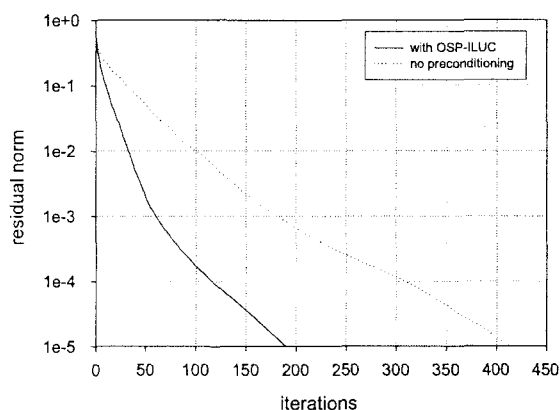


図-4 OSP-ILUC を適用したときと, 前処理を適用しなかったときの収束特性の比較. $\lambda = 88.770\text{m}$, $N = 33441$, $r = 40\text{m}$.

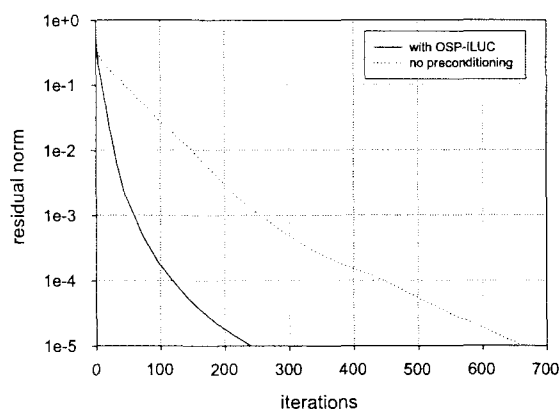


図-5 OSP-ILUC を適用したときと, 前処理を適用しなかったときの収束特性の比較. $\lambda = 55.034\text{m}$, $N = 33441$, $r = 40\text{m}$.

しなかったときの GMRES の収束特性を比較して図にしたものである. パラメータ r は 40m に固定している. これらの図から, OSP-ILUC の適用により, GMRES の収束回数が大幅に減少させられることが分かる.

表-3 τ を変化させたときの ILUC の計算結果. $\lambda = 88.770\text{m}$, $N = 33441$.

τ	Ratio _A	Ratio _M	Its	Pre(s)	It(s)	Tot(s)
∞	0.0	0.0000	412	0	3994	3994
1.00	1.0	0.0001	364	1041	3475	4516
0.40	1.0	0.0005	339	1159	3349	4508
0.20	1.0	0.0044	172	1067	1632	2699
0.10	1.0	0.0905	124	2701	1326	4027
0.08	1.0	0.1883	90	7520	1129	8649

表-3, 4 は, OSP を用いず, 密行列 A に対して ILUC を適用したときの結果である. τ が ∞ であるとは, 前処理を適用しない通常の GMRES を意味する. 行列ベクトル積においては, FMM の適用により A_{far} の成分を計算する必要はないものの, ここでは M を構築するためだけに A の全成分を計算しなければならず, M の

表-4 τ を変化させたときの ILUC の計算結果. $\lambda = 55.034m, N = 33441$.

τ	Ratio _A	Ratio _M	Its	Pre(s)	It(s)	Tot(s)
∞	1.0	0.0000	664	0	8121	8121
1.0	1.0	0.0002	543	1135	6447	7582
0.8	1.0	0.0004	465	1138	5511	6649
0.6	1.0	0.0012	308	1143	3643	4786
0.4	1.0	0.0115	569	1236	7011	8247
0.2	1.0	0.1358	326	5758	5093	10851

構築に多くの時間がかかっている。また、 A の全成分を保存するメモリも必要となる。さらに、 A は密行列であるため、 M の構築に要する時間を考慮すると τ の値を非常に大きくする必要がある、 M は A を十分に近似しないことが起こる。そのため、OSP を適用しない ILUC は、 τ の減少とともに反復回数がほぼ単調に減少するという利点があるものの、全計算時間が減少するような τ の最適値を見つけることは困難であることが分かる。

7. おわりに

本解析例に対して、OSP-ILUC に関するパラメータ r を 40 ぐらいに、すなわち Ratio_A が 0.007 ぐらいに固定できることが分かった。他のモデルに対しても同様にパラメータ r が固定できるものと思われる。そのことにより、密行列 A そのものに対して ILUC を適用したときの問題点である、 A の全成分を計算及び保存する必要があることと、パラメータ τ の設定の困難さを解決した。以上より、Performance 面及びパラメータ設定の容易さの両面から、FMM と組み合わせた場合における OSP-ILUC の有効性を実証した。

8. 付録

ここでは、the operator splitting preconditioner (OSP)¹¹⁾ により分解される、近傍点からなる有界作用素¹⁶⁾ と遠方点からなる有界作用素の性質を記述する。

まず、積分方程式 (10) を書き直し、連立 1 次方程式 (1) の係数行列 A は非エルミート行列であることを示す。

$$K(x, \xi) = \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial n_\xi} \quad (17)$$

とおくと、 $K(x, \xi)$ は $S_H \times S_H$ で 2 乗可積分な関数である。すなわち

$$\int_{S_H} \int_{S_H} |K(x, \xi)|^2 dx d\xi < +\infty \quad (18)$$

このとき、 $X = L^2(S_H)$ における積分作用素 T を

$$(Tu)(x) = \int_{S_H} K(x, \xi) u(\xi) d\xi \quad (x \in S_H) \quad (19)$$

によって定義すると、 T は X 上のコンパクト作用素¹⁶⁾ である。ここで、 $L^2(S_H)$ は S_H 上の複素数値 2 乗可積

関数からなる Hilbert 空間¹⁶⁾ である。このとき、積分方程式 (10) は

$$(4\pi I + T)\phi = 4\pi\phi_I \quad (20)$$

と表される。このとき、 $\overline{K(\xi, x)} \neq K(x, \xi)$ であるから、 T は X 上の自己共役作用素¹⁶⁾ ではない。したがって、式 (20) の離散化方程式である連立 1 次方程式 (1) の係数行列 A は非エルミートであることが分かる。

次に、コンパクト作用素 $T_{\text{near}}(r)$, $T_{\text{far}}(r)$ を定義し、前処理行列 M により変換された行列 AM^{-1} の全固有値が 1 の近くに集まることが期待できることを示す。 r を正の実数とする。 $E(r) = \{(x, \xi) \in S_H \times S_H : \|x - \xi\| < r\}$ とおき、 X における積分作用素 $T_{\text{near}}(r)$ を

$$(T_{\text{near}}(r)u)(x) = \int_{S_H} \chi_{E(r)}(x, \xi) K(x, \xi) u(\xi) d\xi \quad (x \in S_H) \quad (21)$$

によって定義する。ここで、 $\chi_{E(r)}(x, \xi)$ は $E(r)$ 上の点で 1 の値を、その他の点で 0 の値をとる関数である。 $F(r) = \{(x, \xi) \in S_H \times S_H : \|x - \xi\| \geq r\}$ とおき、 X における積分作用素 $T_{\text{far}}(r)$ を

$$(T_{\text{far}}(r)u)(x) = \int_{S_H} \chi_{F(r)}(x, \xi) K(x, \xi) u(\xi) d\xi \quad (x \in S_H) \quad (22)$$

によって定義する。ここで、 $\chi_{F(r)}(x, \xi)$ は $F(r)$ 上の点で 1 の値を、その他の点で 0 の値をとる関数である。 $T_{\text{near}}(r)$, $T_{\text{far}}(r)$ はともにコンパクト作用素であり、有界作用素 T は

$$T = T_{\text{near}}(r) + T_{\text{far}}(r) \quad (23)$$

と分解される。このとき、OSP による前処理行列 M は、 X 上の有界作用素 $M(r) = 4\pi I + T_{\text{near}}(r)$ を離散化したものである。

r をあまり大きく選ばなければ $M(r)$ は単写像となり、 $T_{\text{near}}(r)$ はコンパクトより $M(r)$ は全写像、さらに開写像定理¹⁶⁾ より $M(r)^{-1}$ は有界となる。このとき、 $M(r)$ により変換された有界作用素は

$$(4\pi I + T)M(r)^{-1} = I + T_{\text{far}}(r)M(r)^{-1} \quad (24)$$

となり、 $M(r)^{-1}$ は有界であったから $T_{\text{far}}(r)M(r)^{-1}$ はコンパクトであり、 $T_{\text{far}}(r)M(r)^{-1}$ のスペクトルは原点以外には集積点を持たない。したがって、(24) の左辺を離散化した行列 AM^{-1} のすべての固有値が 1 の近くに集まることが期待できる。

参考文献

- 1) T. Utsunomiya, and E. Watanabe: Wave response analysis of hybrid-type VLFS by accelerated BEM, *Proc. 3rd Int. Conf. Hydroelasticity in Marine Technology*, pp.297-303, 2003.
- 2) Y. Saad, and M. H. Schultz: GMRES: a generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems, *SIAM J. Sci. Statist. Comput.*, 7, pp.856-869, 1986.

- 3) R. B. Morgan: Implicitly restarted GMRES and Arnoldi methods for nonsymmetric systems of equations, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 21, pp.1112-1135, 2000.
- 4) R. B. Morgan: GMRES with deflated restarting, *SIAM J. Sci. Comput.*, 24, pp.20-37, 2002.
- 5) 巻幡憲俊, 宇都宮智昭, 渡邊英一: 波浪回折問題のための境界要素法への GMRES-IR の適用, 土木学会応用力学論文集, Vol.6, pp.275-281, 2003.
- 6) 巻幡憲俊, 宇都宮智昭, 渡邊英一: 超大型浮体の波浪応答解析への GMRES-DR の適用, 土木学会構造工学論文集, Vol.50A, pp.179-185, 2004.
- 7) Y. Saad: ILUT: a dual threshold incomplete LU factorization, *Numer. Linear Algebra Appl.*, 1, pp.387-402, 1994.
- 8) N. Li, Y. Saad, and E. Chow: Crout version of ILU for general sparse matrices, *SIAM J. Sci. Comput.*, 25, pp.716-728, 2003.
- 9) 巻幡憲俊, 宇都宮智昭, 渡邊英一: 波浪回折問題のための境界要素法への ILUC の適用, 土木学会応用力学論文集, Vol.7, pp. 279-286 , 2004.
- 10) T. Utsunomiya, E. Watanabe, and N. Nishimura: Fast multipole algorithm for wave diffraction/radiation problems and its application to VLFS in variable water depth and topography, *Proc. 20th Int. Conf. on Offshore Mech. & Arctic Eng.*, OMAE01-5202, 2001.
- 11) K. Chen: An analysis of sparse approximate inverse preconditioners for boundary integral equations, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 22, pp.1058-1078, 2001.
- 12) 宇都宮智昭, 渡邊英一: 超大型浮体の波浪応答解析のための高速化グリーン関数法の開発, 第 16 回海洋工学シンポジウム, pp.313-320, 2001.
- 13) N. M. Nachtigal, S. C. Reddy, and L. N. Trefethen: How fast are nonsymmetric matrix iterations?, *SIAM J. Matrix Anal. Appl.*, 13, pp.778-795, 1992.
- 14) 田端正久: 微分方程式の数値解法 II 「岩波講座, 応用数学」, 岩波書店, 1994.
- 15) 西村直志, 宗像秀紀: 多重極境界積分方程式法の簡易並列化について, 京都大学学術情報メディアセンター広報, Vol.3, pp.30-34, 2004.
- 16) W. Rudin: Functional analysis, McGraw-Hill Book Company, 1991.

(2004 年 9 月 17 日 受付)