

直角二等辺三角形板の座屈耐荷力に関する基礎的検討

Fundamental study on Buckling and Ultimate Strength of Right-angled isosceles triangular plates

越智内士*, 松村政秀**, 北田俊行***

Nobuhito Ochi, Masahide Matsumura, Toshiyuki Kitada

*博(工), 明石工業高等専門学校講師, 都市システム工学科 (〒674-8501 兵庫県明石市魚住町西岡 679-3)

**博(工), 大阪市立大学大学院助手, 工学研究科都市系専攻 (〒558-8585 大阪市住吉区杉本 3-3-138)

***工博, 大阪市立大学大学院教授, 工学研究科都市系専攻 (〒558-8585 大阪市住吉区杉本 3-3-138)

A right-angled isosceles triangular plate is used for reinforcement at the connection part between the beam and column in a steel bridge pier with fatigue cracks, between a lateral member and a girder in a steel girder bridge, between a column and a base plate of portal marker columns and lightning poles and so on. As the thickness of the triangular plate is decided not to occur plate buckling according to restrictive value on the ratio of the plate thickness and the maximum width. This restrictive value is proposed according to the research results in 1960-70s, however, the investigation on the buckling and ultimate strength of the triangular plate is not studied recently. In this paper, the elasto-plastic and finite displacement analyses are carried out for the right-angled triangular plates to verify the buckling and ultimate strength of them by focusing on the supporting conditions of the hypotenuse, shape of initial deflection and plate thickness.

Key Words : triangular plates, buckling, ultimate strength, elasto-plastic and finite displacement analysis

キーワード : 三角形板, 座屈, 耐荷力, 弾塑性有限変位解析

1. まえがき

鋼構造物には, 柱と梁の接合部への補強板をはじめ, 補強板として, 三角形板が多用されている(図-1 参照). たとえば, 交通量の増加や構造上の応力集中が原因として考えられる疲労等による亀裂の進行を抑制, および作用応力の低減を目的として鋼製橋脚の隅角部には三角形板が高力ボルト接合により設置されている. また, プレートガーダー橋において鋼桁と横構との接合部において, ニーブレース板として三角形板が用いられる. さらに, 標識中や照明柱などの道路橋付属構造物の柱部材とベースプレートとの接合部にも三角形板が使用されている. このとき, 補剛しない三角形板の場合には, 十分な応力低減効果を得るために, 板厚をかなり厚くする必要がある. 母材と同程度の比較的薄い三角形板を用いて補強効果を得るためには, 三角形板を補剛し面外剛性を高める必要がある.

ここで, このような三角形板の寸法は, 斜辺が自由支持された三角形板に対して, 板が座屈しないように斜辺の長さや板厚の比が 60 倍以内という制限値が設けられる. 一方, それを超える場合には, 補強材により三角形板の座屈を防止する必要性についても指摘されている¹⁾.

しかしながら, 近年, このような三角形板が多用されているにもかかわらず, 1960~1970 年代の研究結果^{2)~4)}に基づく三角形板の板幅と板厚に関する制限値にしたがって設計される場合が多く, 支持条件, 初期たわみ波形, および孔の設置が, 三角形板の座屈耐荷力へ及ぼすによる影響についての検討は近年実施されていない.

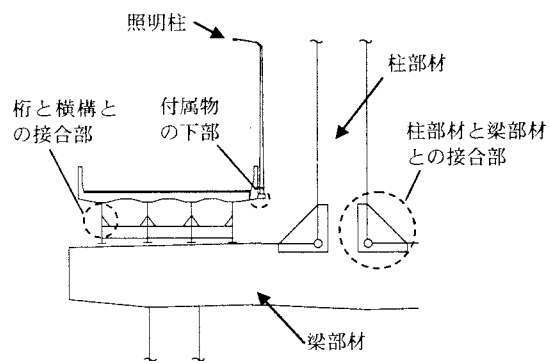


図-1 三角形板の使用箇所の例

そこで, 本研究では, このように接合部に使用されるような三角形板の座屈耐荷力特性を明らかにするために, 二辺が単純支持で斜辺が自由支持された直角二等辺三角形板, および斜辺を十分に補剛した場合に相当する, 三

辺が単純支持された直角二等辺三角形板を板要素の有限要素でモデル化し、三角形分布の強制変位が直交する2辺に作用する場合を対象とした。斜辺の支持条件、および導入する初期たわみ波形が三角形板の座屈耐荷力特性に及ぼす影響を明らかにするため、板厚を変化させてパラメトリックな弾塑性有限変位解析を実施した。

2. 三角形板の弾塑性有限変位解析

2.1 解析モデル

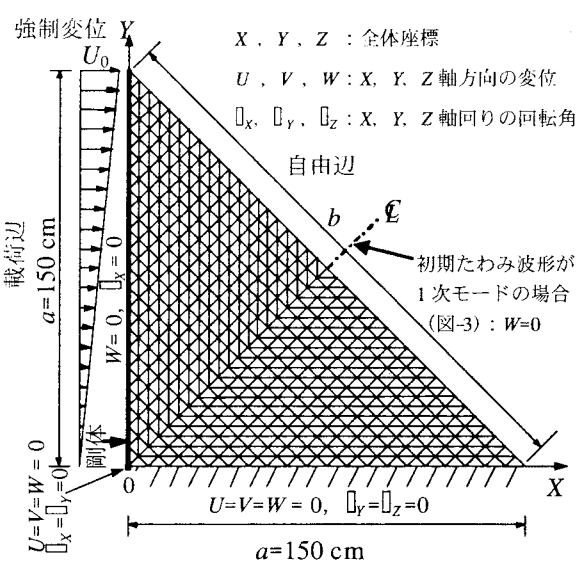
斜辺の支持条件の違いによる三角形板の耐荷力への影響を調べるため、図-2(a)に示すように、解析モデルは、(i)斜辺が自由支持された直角二等辺三角形板、および(ii)斜辺が単純支持された直角二等辺三角形板とした。同図には、解析モデルの境界条件および要素分割を併せて示し、表-1には、解析モデルの寸法を示す。なお、モデル化には、3節点平板要素を用い、板厚方向の層数は10分割とし、斜辺方向を40分割とした。さらに、直角三角形の90°をなす角付近（以下、角部という）に孔（スカーラップ等）が設けられることも多い。そこで、図-2(b)に示すように、角部に孔を有する三角形板についても解析を行った。なお、本解析では、これらの孔の形状は三角形とした。設定した孔の寸法 d は、表-2に示すとおりである。すなわち、三角形板の板厚 t を1.0~5.0 cm（幅厚比 $b/t=212.1\sim42.4$, b :斜辺の長さ）の範囲で変化させ、三角形板の角部に孔を有する場合には、孔の寸法 d を7.5~37.5 cm（ $d/a=0.05\sim0.25$, a :底辺の長さ）の範囲で変化させてパラメトリックな解析を行った。荷重は、載荷辺に沿った三角形分布の強制変位とし、終局状態に至るまで解析を行った。これらの解析には、板構造の弾塑性有限変位解析プログラム USSP⁵⁾を用いた。

表-1 解析モデルの寸法（直角二等辺三角形板）

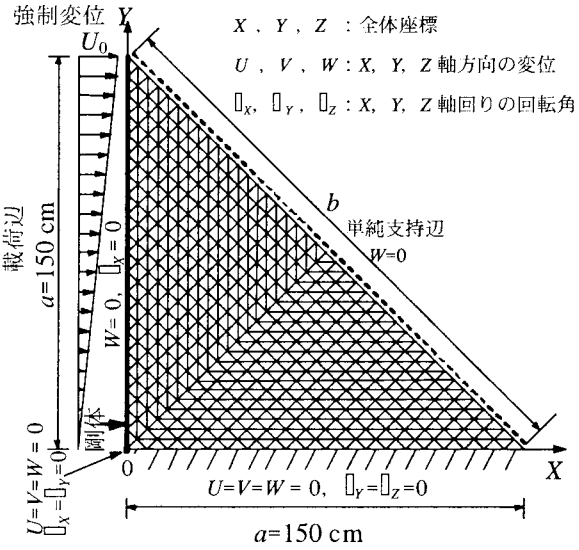
三角形板の 底辺の長さ a (cm)	三角形板の 斜辺の長さ b (cm)	三角形板 の板厚 t (cm)	幅厚比 b/t
150	212.1	1.0	212.1
		1.5	141.4
		2.0	106.1
		3.0	70.7
		4.0	53.0
		5.0	42.4

表-2 孔の寸法

三角形板の 底辺の長さ a (cm)	孔の底辺 の長さ d (cm)	d/a
150	7.5	0.05
	15.0	0.10
	22.5	0.15
	30.0	0.20
	37.5	0.25

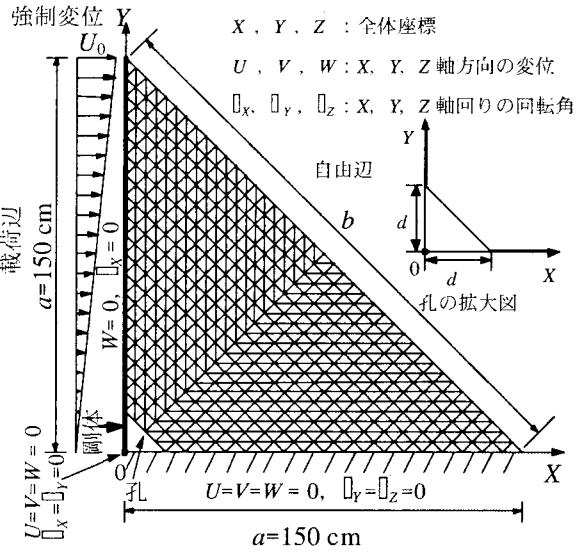


(i)斜辺が自由支持



(ii)斜辺が単純支持

(a)角部に孔を有さない三角形板



(b)角部に孔を有する三角形板、斜辺が自由支持

図-2 解析モデルの概要

2.2 初期不整

図-3 には、解析で考慮した初期たわみ波形を示す。斜辺が自由支持された三角形板で角部に孔を有さない解析モデルには、1次モードと2次モードとの2種類を、斜辺が単純支持された三角形板で角部に孔を有さない解析モデル、および角部に孔を有する解析モデルには、1次モードの初期たわみ波形のみを考慮した。これは、後述の2.4(1)の結果より、耐荷力に着目すると不利な条件である1次モードの初期たわみ波形についてのみに着目したためである。なお、1次モードおよび2次モードの初期たわみ波形は、式(1)～式(4)のように設定し、初期たわみの最大値 $\bar{W}_0$ は道路橋示方書に規定されている板の平面度の製作許容誤差を参考に $a/150$ とした。また、本解析において残留応力は考慮していない。

$$W_0 = \bar{W}_0 \sin\left(\frac{\pi}{b}y\right) \cos\left(\frac{\pi}{2y}x\right) \quad (1)$$

$$W_0 = \bar{W}_0 \sin\left(\frac{\pi}{b}y\right) \sin\left(\frac{\pi}{y}x\right) \quad (2)$$

ここで、

$$x = -X \cos 45^\circ + Y \cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}(X - Y) \quad (3)$$

$$y = X \sin 45^\circ + Y \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}(X + Y) \quad (4)$$

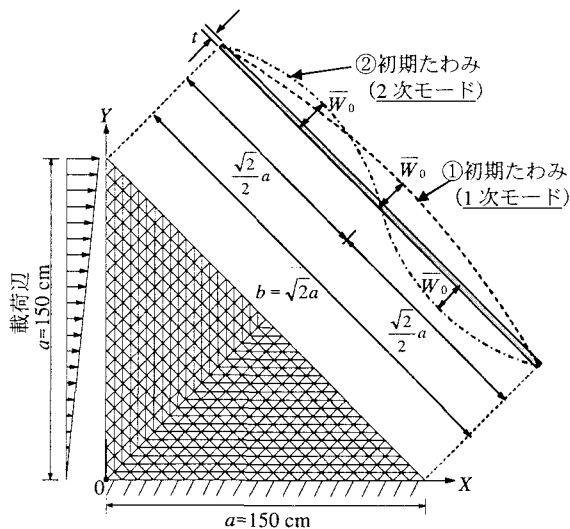


図-3 初期たわみ波形

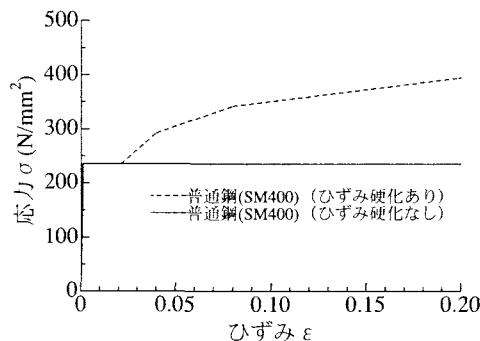


図-4 解析に用いた応力-ひずみ曲線

2.3 解析に用いた鋼材の機械的性質

解析には、図-4に示すように、SM400材を想定したひずみ硬化を無視した場合（完全弾塑性体）とひずみ硬化を考慮した場合との2通りの応力-ひずみ曲線を入力した。すなわち、ヤング係数 E を $2.0 \times 10^5 \text{ N/mm}^2$ 、ポアソン比 μ を0.3、降伏点 σ_Y を 235 N/mm^2 とし、ひずみ硬化については等方硬化則により考慮し、以下のように設定した。

i) ひずみ硬化を無視する場合（完全弾塑性体）

降伏点 : $\sigma_Y = 235$

ひずみ硬化率 : $H\bar{\epsilon} = 0 \quad (\epsilon > 0.00118)$
(N/mm^2)

ii) ひずみ硬化を考慮する場合

降伏点 : $\sigma_Y = 235 \text{ N/mm}^2$

ひずみ硬化率 : $H\bar{\epsilon} = 0 \quad (0.00118 < \epsilon \leq 0.0213)$
 $= 3109.8 \quad (0.0213 < \epsilon \leq 0.0400)$
 $= 1259.8 \quad (0.0400 < \epsilon \leq 0.0800)$
 $= 437.2 \quad (0.0800 < \epsilon \leq 0.220)$
 $= 0 \quad (\epsilon > 0.220)$

ここで、 $H\bar{\epsilon} = E\bar{\epsilon} - E\bar{\epsilon}_Y(E - E_Y)$ (5)

($E\bar{\epsilon}$: 塑性域における応力-ひずみ曲線の傾き)

2.4 解析結果および考察

(1) 角部に孔を有さない三角形板

図-5～図-7 には、斜辺が自由支持および単純支持された三角形板の載荷辺における水平方向（ X 軸方向）の節点力の合計 P_X を載荷辺の断面積 at で割って求めた平均応力 $\bar{\sigma}_x (=P_X/(at))$ と、解析モデルの載荷辺の変形角 θ との関係を示している。

図-5 では、解析モデルに導入する応力-ひずみ曲線（図-4）にひずみ硬化を考慮した場合とひずみ硬化を無視した場合について、斜辺が自由支持（初期たわみ波形が1次モードおよび2次モードの場合）および単純支持された三角形板の解析結果を比較している。同図によると、本解析で対象にする解析モデルの中でひずみ硬化の影響を受けやすいと考えられる三角形板の幅厚比が最も小さい場合（ $b/t=42.4$ ）においても、ひずみ硬化を考慮した場合と無視した場合とは、平均応力と変形角との関係にほとんど違いが認められない。すなわち、本解析で対象にする三角形板の解析モデルにおいて、ひずみ硬化の考慮が耐荷力に及ぼす影響は小さいと言える。

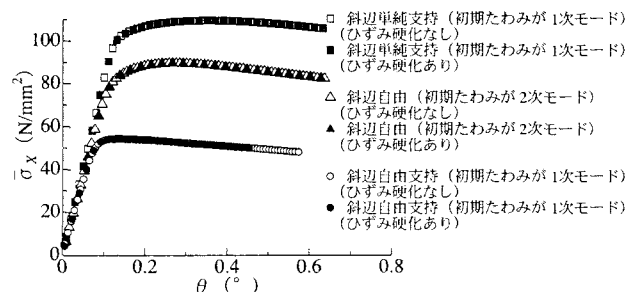
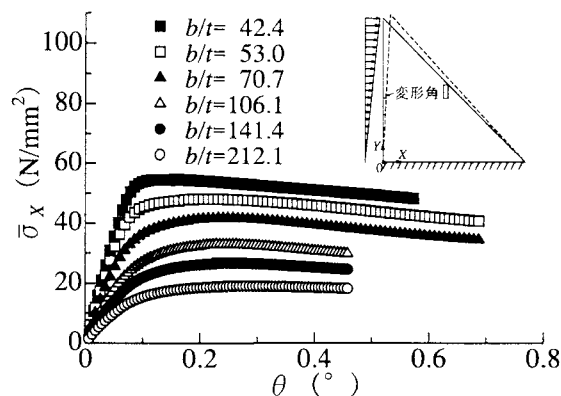


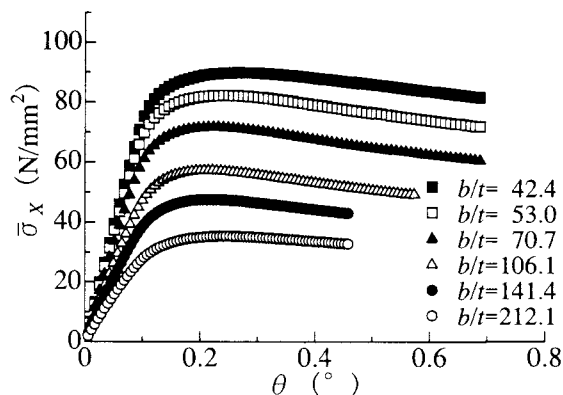
図-5 平均応力と変形角との関係 ($b/t = 42.4$)

このため、以下では、ひずみ硬化を考慮せず、完全弾塑性体の応力-ひずみ曲線を用いた解析結果を示している。

図-6には、斜辺が自由支持および単純支持された三角形板について、解析モデルに導入した初期たわみ波形が1次モードの場合および2次モードの場合について示す。同図より、初期たわみ波形が1次モードの場合および2次モードの場合ともに、三角形板の幅厚比 b/t が小さく



(a)初期たわみ波形が1次モード



(b)初期たわみ波形が2次モード

図-6 平均応力と変形角との関係
(斜辺が自由支持された三角形板)

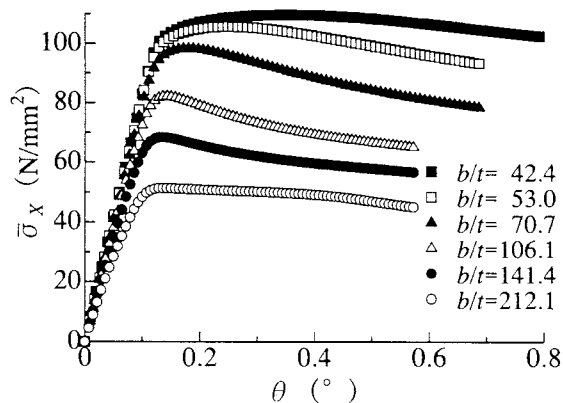
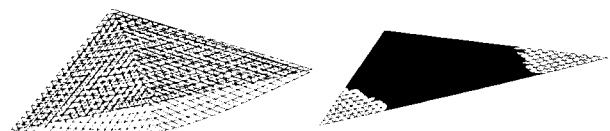


図-7 平均応力と変形角との関係 (斜辺が単純支持された三角形板、初期たわみ波形が1次モード)

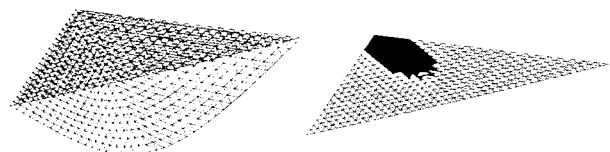
なるにつれて平均応力 $\bar{\sigma}_x$ の最大値が大きくなり、最大値に到達した後の三角形板の強度低下は小さいことがわかる。とりわけ、斜辺が自由支持された三角形板で幅厚比 b/t が小さい場合には、座屈後もほとんど強度低下を伴わずに変形が進行しているのがわかる。

図-7には、斜辺が単純支持された三角形板の結果を示す。同図についても、図-6と同様な挙動がみられる。

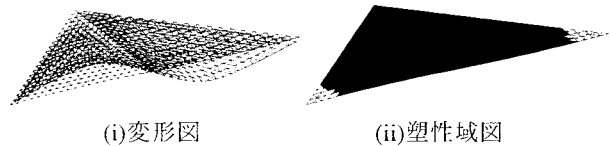
図-8には、幅厚比 $b/t=42.4, 212.1$ の斜辺が自由支持された三角形板の終局状態における変形図および塑性域図を、解析モデルに導入した初期たわみ波形が1次モードと2次モードとの場合について示す。なお、塑性域図において、黒く塗りつぶしている板要素が塑性状態、ここでは、板厚方向の計11層のうちいずれか1層でも塑性化している状態であることを示している。図-8(a)および(b)より、1次モードの初期たわみを考慮した場合には、三角形板の角部から降伏し始め、終局状態では、幅厚比 $b/t=42.4$ のように板厚が大きい場合には斜辺付近においても塑性化が認められるが、幅厚比 $b/t=212.1$ のように板厚が小さい場合には塑性に至らないことがわかる。したがって、これらの三角形板の斜辺付近における塑性域の広がり方の違いが終局強度に影響を及ぼしている。



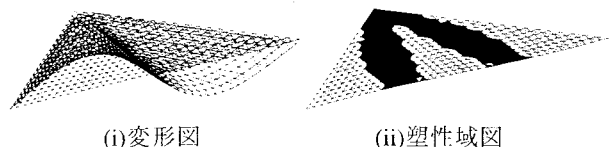
(i)変形図 (ii)塑性域図
(a)$b/t=42.4$、初期たわみ波形が1次モード



(i)変形図 (ii)塑性域図
(b)$b/t=212.1$、初期たわみ波形が1次モード



(i)変形図 (ii)塑性域図
(c)$b/t=42.4$、初期たわみ波形が2次モード



(i)変形図 (ii)塑性域図
(d)$b/t=212.1$、初期たわみ波形が2次モード

図-8 終局状態における変形図 (変形倍率: 10 倍) および塑性域図

2 次モードの初期たわみ波形を考慮した場合においても、1 次モードの場合と同様に、塑性域は角部から広がっていく。両者を同じ幅厚比 b/t において比較すると、2 次モードの初期たわみを考慮する方が、終局状態における塑性域の広がりが大きいことがわかる。

さらに、図-9 には、図-6 で求めた三角形板の載荷辺の平均応力 $\bar{\sigma}_x$ の最大値（終局強度 $\bar{\sigma}_{xu}$ ）を縦軸、幅厚比 b/t を横軸にとり、解析モデルに導入した初期たわみ波形、および斜辺の支持条件の違いによる終局強度 $\bar{\sigma}_{xu}$ の変化を示す。同図より、斜辺が自由支持された三角形板では、2 次モードの初期たわみ波形を考慮した方が 1 次モードの場合よりも全般的に終局強度の値が大きいことが確認できる。さらに、同図より、斜辺が自由支持された三角形板と斜辺が単純支持された三角形板の終局強度 $\bar{\sigma}_{xu}$ を比較すると、斜辺が単純支持された三角形板の終局強度は、斜辺が自由支持された三角形板の 2 倍以上であることが確認できる。

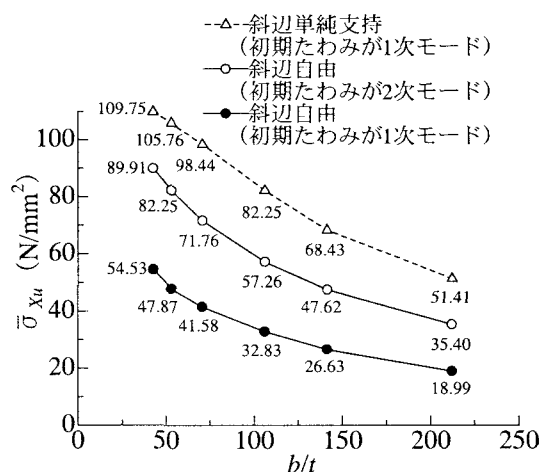


図-9 終局強度と幅厚比との関係

また、図-10 には、終局強度時の載荷辺の変形角 θ_u と幅厚比 b/t との関係を示す。同図より、 $b/t < 50$ の場合には斜辺が単純支持された三角形板が斜辺が自由支持された場合よりも終局強度時の変形角 θ_u が小さいが、 $b/t = 50$ 付近を境にして、1 次モードの初期たわみ波形を考慮した斜辺が自由支持された三角形板における終局強度時の変形角 θ_u の低下が顕著にみられる。これは、図-6(a) からわかるように、幅厚比 $b/t = 42.4$ の場合には、他の場合より高い応力まで平均応力-変形角曲線が比例関係を保つ、すなわち、解析モデルの大部分の要素が降伏に至った後、平均応力が急激に低下して終局状態に至るので、 $b/t \geq 50$ の場合に比べて終局強度時の変形角 θ_u が小さくなったと考えられる。

さらに、図-11(a)には、同図(c)の三角形板（初期たわみが 1 次モードの場合）の対称軸である y 軸に沿った黒く塗りつぶした 11 個の板要素に着目し、終局状態時における圧縮側表面の x 軸方向の垂直応力 σ_x の分布を示す。

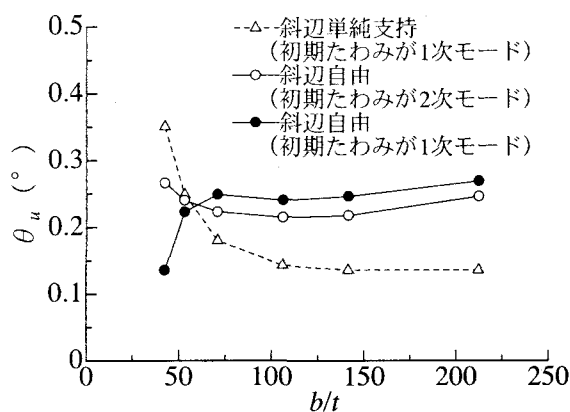


図-10 終局強度時の変形角と幅厚比との関係

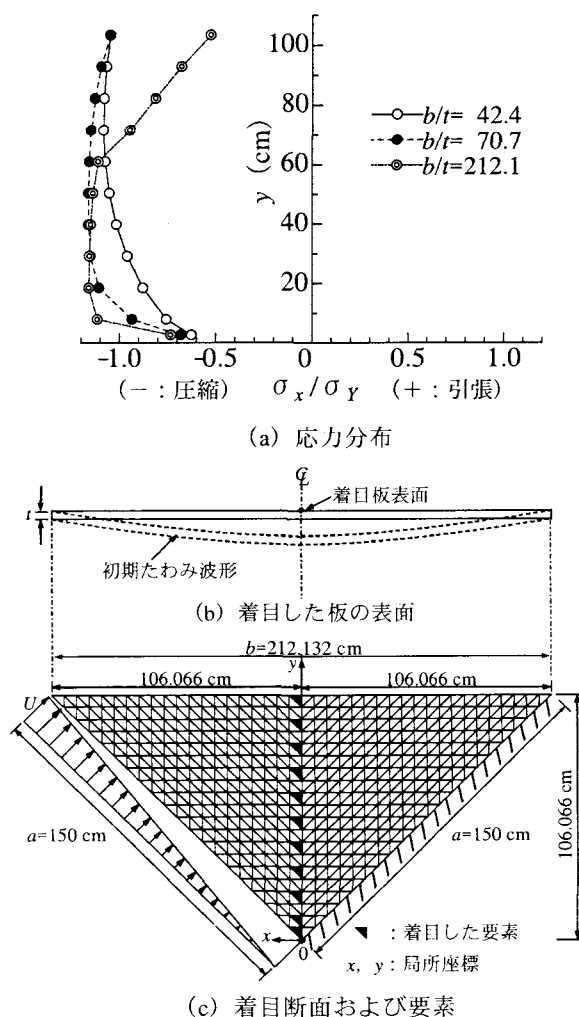


図-11 終局状態時の応力分布

(1 次モードの初期たわみ波形を考慮)

これらの図より、終局荷重時において、幅厚比 $b/t = 42.4$ および 70.7 の三角形板の対称軸に沿ったすべての要素は、角部を除いてほぼ一様な圧縮応力を受けていることがわかる。三角形板の座屈に関する幅厚比の制限値 $b/t = 60$ の場合もこれに含まれる。一方、幅厚比 $b/t = 212.1$ の場合には、斜辺に近づくにつれて垂直応力 σ_x が減少することが確認できる。

(2) 角部に孔を有する三角形板

図-12 には、解析モデルの荷端における水平方向 (X 軸方向) の節点力の合計 P_X を荷端の孔部分を除いた断面積 $[(a-d)t]$ で割ることにより求めた平均応力 $\bar{\sigma}_x$ ($=P_X / [(a-d)t]$) と荷端の変形角 θ との関係、幅厚比 $b/t=42.4, 70.7, 212.1$ の場合について示す。これらの図から、三角形板の角部に設ける孔の寸法が大きいくほど、また、幅厚比 b/t が大きいほど、三角形板の強度が低下する傾向が認められる。

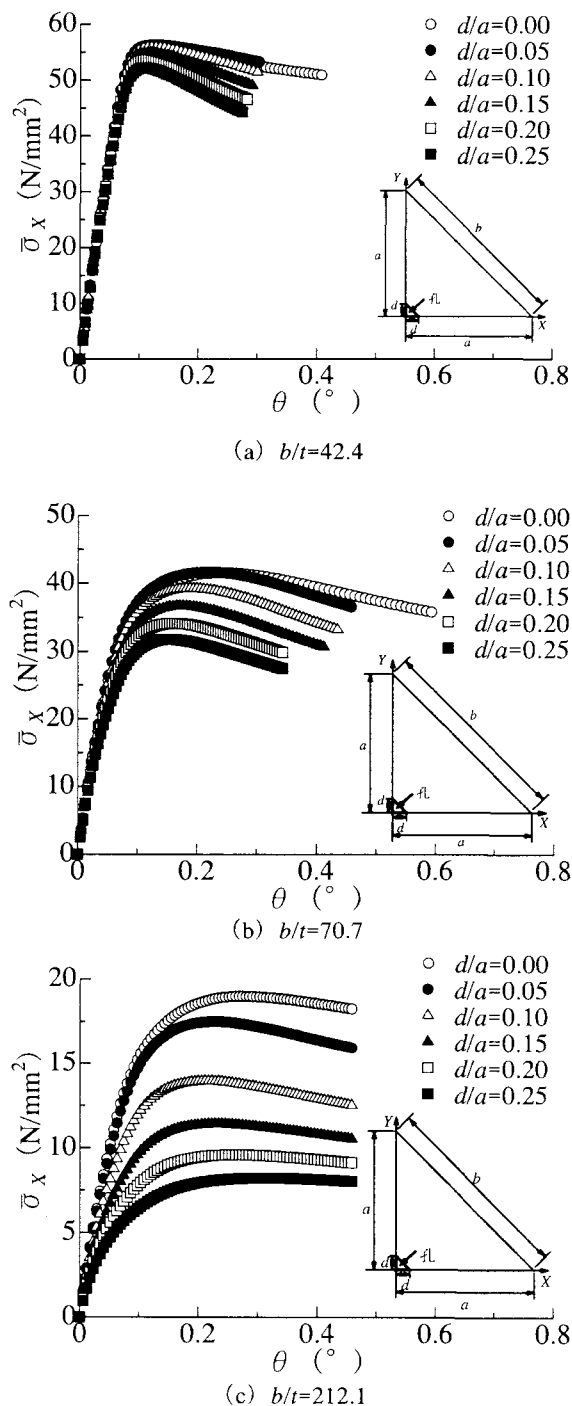


図-12 平均応力と変形角との関係
(角部に孔を有する三角形板)

また、図-13 には、図-12 より得られた荷端の平均応力 $\bar{\sigma}_x$ の最大値(終局強度 $\bar{\sigma}_{xu}$)と幅厚比 b/t の関係を、孔の寸法 d の違いに着目して示す。同図より、幅厚比 b/t が小さくなるにつれて、孔の寸法 d を増加させることによる終局強度 $\bar{\sigma}_{xu}$ の低下率は小さいことがわかる。とりわけ、幅厚比 $b/t=42.4$ のように板厚が大きい場合には、終局状態においても、斜辺には座屈が発生しないため、三角形板の角部に孔を設ける場合にも、終局強度の低下に繋がらない。一方、幅厚比 $b/t=212.1$ のように板厚が小さい場合には、自由辺付近で座屈が発生しやすいため、角部へ孔を設置する場合には、三角形板の終局強度の低下が顕著に認められる。また、図-13 より、幅厚比 b/t が 53.0 以下では孔の寸法 d/a が 0.10 以下、 b/t が 70.7 以上では d/a が 0.05 以下であれば、孔の設置が耐力低下に及ぼす影響は小さいことが確認できる。

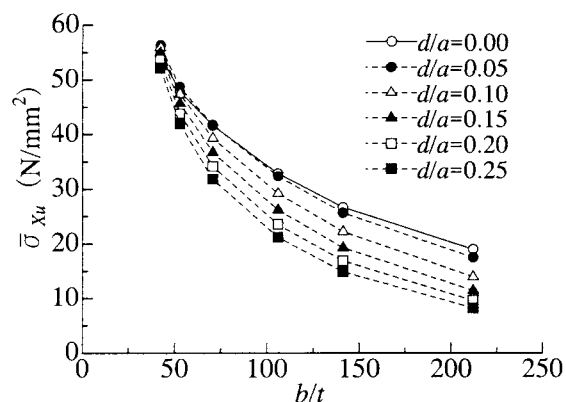


図-13 終局強度と幅厚比との関係
(角部に孔を有し斜辺が自由支持された三角形板)

3. まとめ

本研究では、補強板として用いられる三角形板を対象として、斜辺の支持条件、および導入する初期たわみ波形が三角形板の座屈耐力特性に及ぼす影響を明らかにするため、板厚を変化させてパラメトリックな弾塑性有限変位解析を実施した。また、作用荷重は、荷端に沿った三角形分布の強制変位として導入した。

本研究より得られた主な成果は、以下に示すとおりである。

- i) 斜辺が自由支持された三角形板の荷端の平均応力は、1次(斜辺中央で最大となる半波形)・2次(斜辺中央で節となる1波形)の初期たわみ波形を問わず、三角形板の幅厚比 b/t が小さくなるにつれて大きくなり、最大荷重後の強度低下は小さい。また、導入する初期たわみ波形が1次モードの方が2次モードの場合より耐力力が小さい。
- ii) 斜辺が自由支持された三角形板では、角部から塑性化が進行する。斜辺付近は、幅厚比 b/t が 70 程度と

- 小さい場合には塑性に至るが、大きいと弾性を保つ。
- iii) 斜辺が単純支持された三角形板の終局強度は、斜辺が自由支持された場合の2倍以上となる。
- iv) 斜辺が自由支持された三角形板の角部に孔を設けると、孔の寸法が大きく、幅厚比が大きいほど強度が低下する。幅厚比 b/t が 53.0 以下では孔の寸法 d/a が 0.10 以下、 b/t が 70.7 以上では d/a が 0.05 以下であれば、孔の設置が耐荷力低下に及ぼす影響が小さい。

今回の解析結果では、幅厚比 60 以内という三角形板に関する座屈制限値の妥当性を明確に説明するには至っていない。

今後、斜辺が自由支持された直角二等辺三角形板の斜辺に補剛材を設ける場合についても、三角形板の板厚、および補剛材の寸法を変化させたパラメトリックな弾塑性有限変位解析を行い、三角形板の座屈耐荷力（幅厚比の制限値など）について引き続き検討したいと考えている。

参考文献

- 1) 日本道路協会：道路橋示方書・同解説，Ⅰ 共通編およびⅡ 鋼橋編，2002.
- 2) 上田幸雄・松石正克：有限要素法による鋼構造物の弾塑性解析（第 3 報）種々の荷重を受ける三角形板の座屈，関西造船協会，関西造船協会誌，No. 131，pp. 27-32，1969.
- 3) Column Research Committee of Japan：Handbook of Structural Stability, Corona Publishing Company, Ltd. , 1971.
- 4) Salmon, C. G. : Analysis of Triangular Bracket Type Plates, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, E.M. 6, pp. 41-87, 1962.
- 5) USSP 研究会：USSP ユーザーズ・マニュアル，入出力編，Ver. 6.0，日本構研情報（株），2002.

（2004 年 9 月 17 日受付）