

格子状リブを有するサンドイッチ版の局部座屈理論と有限要素解析

Theory and Finite Element Analysis for Local Buckling of Sandwich Panels with Latticed Ribs

立石寧俊 *, 山田聖志 **

Yasutoshi TATEISHI and Seishi YAMADA

*工修, 清水建設(株) 技術研究所 (〒135-8530 東京都江東区越中島 3-4-17)

** 工博, 豊橋技術科学大学助教授, 建設工学系 (〒441-8580 愛知県豊橋市天伯町字雲雀ヶ丘 1-1)

This paper presents the local buckling mechanism of sandwich panel with latticed ribs. First, the theoretical local buckling stresses have been derived from energy method. Three types of buckling mode under uniformly distributed loads are considered. These local buckling mechanisms are discussed. Second, linear buckling analyses by finite element method are carried out and compares with the presented theories. The agreement between the results of the finite element analysis and the theories is good in terms of buckling stresses and buckling wave lengths. It is suggested that the presented formulae are useful to parametric studies for local buckling stress of the sandwich panels with latticed ribs.

Keywords: CFRP sandwich panel, Latticed ribs, Local buckling, Energy method, FEM

キーワード: CFRP サンドイッチ版, 格子状リブ, 局部座屈, エネルギー原理, FEM

1. 序論

サンドイッチ版構造は、主要構造材の薄板を外縁に配置し、芯材に軽量な材料を用いた構造で、軽量かつ高い面外曲げ剛性を得られる構造体として知られている。建設分野においても利用研究がなされ、軽量化、塩害対策などの観点から、材料を FRP 製としたサンドイッチ版構造デッキを道路橋のコンクリート床版の代替として使用した例¹⁾や、既存体育館建物の耐震改修のため、プレキャストコンクリート屋根を、軽量な CFRP サンドイッチ版屋根に置き換えた例²⁾などがある。

サンドイッチ版が圧縮荷重を受ける場合、版全体が単一波形でたわむオイラー座屈や、写真 1 のように表面材が座屈する局部座屈（リンクリング）が見られる³⁾。局部座屈は、コアの弾性係数が表面材のそれよりも数オーダー低い場合などで発生しやすく、その発生を起点として全体剛性が低下し、表面材とコア材の剥離などの破壊現象を生ずる場合が少なくない。よって、局部座屈荷重の推定は、設計上極めて重要と言える^{4),5)}。

サンドイッチ版は、実際にはその内部や端部をリブで仕切る場合も多く、局部座屈に関してコア材やリブの存在はその座屈荷重を高めるが、文献 6) などで紹介されているサンドイッチ版の局部座屈応力の算定式は、Hoff ら⁷⁾、及び Yusuf⁸⁾の論文を基にして書かれており、表面材とコア材の関係を、弾性基礎に置かれた梁で二次元的にモデル化しているため、リブによる局部座屈の補剛効果を評価することはできない。また、地盤（弾性基礎）に

置かれた矩形板の問題を、能町⁹⁾、原口¹⁰⁾、北村ら¹¹⁾が解いているが、サンドイッチ版のようにコアを挟んだ反対側にも表面材が存在する場合には、そうした状態を適切に考慮することが必要である。サンドイッチ版の局部座屈の理論を扱った最近の論文としては、Rammer ら¹²⁾の研究がある。同論文では、三次元のサンドイッチ版を、上面の表面材とそれ以下の部分（コアと下面の表面材）に分割して、弾性基礎におかれた矩形板の基礎式からリッツ法を用いて座屈問題を解いている。同論文では、座屈波形が生じる面内方向の角度についての変数が導入されているが、リブによる境界条件が座屈耐力に与える影響については論じられていない。

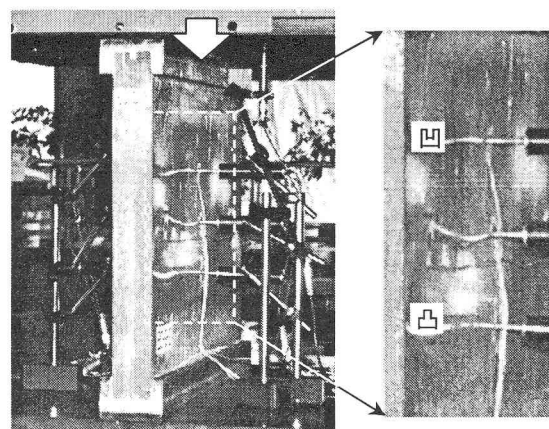


写真 1 圧縮荷重を受ける
CFRP サンドイッチ版の局部座屈³⁾

著者らは、格子状リブを有するサンドイッチ版について、Hoff や Yusuff の方法を三次元に拡張して、Total Potential Energy の停留原理から局部座屈応力の理論式を導いた。また、併行して実験を行い、同式の有効性を実証した³⁾。文献 3) では、主として誘導した座屈理論解と実験結果との比較について議論したが、本論文ではその成果をさらに発展させ、局部座屈応力の理論式と座屈モードについてより詳しい分析を行う。また、有限要素法による線形座屈固有値解析を行い、誘導した理論解との比較を議論する。

2. 格子状リブを有するサンドイッチ版の局部座屈の理論

本章では、格子状リブを有するサンドイッチ版の局部座屈耐力式を理論的に誘導する。弾性安定問題を Total Potential Energy (以下、TPE) の停留化手法で扱い、表面材とコアの座屈モードを規定して、リッツ法で直接解くことにする。TPE の計算は、Koiter¹³⁾、Yamada and Croll¹⁴⁾、文献¹⁵⁾などを参考にして、座屈前基本状態から座屈後平衡状態への増分ひずみエネルギー成分について計算する。以下、増分なる表現はこのことを表わすものとする。また、コア材内部の座屈モードは Hoff の仮定を採用し、コア材が表面材の座屈に抵抗する等価ばねを考える手法として Yusuff の方法を採用する。著者らは文献 3) において同様の方法で座屈応力式を導いたが、座屈モードを詳しく分類するため、本論文では、コア厚が小さい場合の対称型座屈モード及び逆対称型(せん断型)座屈モードの誘導を加えて整理した。なお、本論文では表面材及びコア材は等方性材料として扱っている。

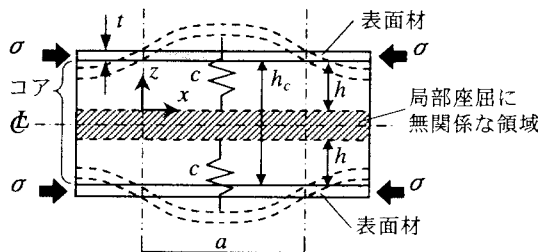


図1 コア厚が十分大きい場合の局部座屈

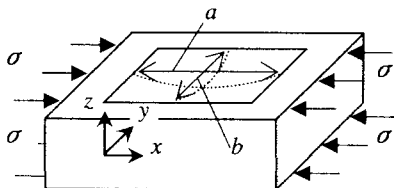


図2 座屈モードの仮定

2.1 コア厚が十分大きい場合及び面外曲げ荷重時の座屈応力

2.1.1 局部座屈モードの仮定

図1に示すように表面材の板厚を t 、コア材の厚さを h_c 、表面材の座屈変形に対し、コアが抵抗する厚さ方向の範囲を h と仮定する。また、コア厚が大きく $h_c/2 > h$ となる場合には、コアの内部に表面材の変形に無関係な領域の存在が想定され、両表面材は独立した座屈モード(以下、独立型座屈モード)をとることができる。図2のように x, y, z 座標をとり、それぞれの方向の座屈にともなう増分変位を (u, v, w) とする。 x 方向、 y 方向の座屈半波長をそれぞれ a, b とし、表面材の座屈モードを次式で表現する。

$$u = 0, v = 0, w = \alpha \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (1)$$

ここに α は、未定係数である。

また、コア部の変位については、次式のように表現する。

$$u_c = 0, v_c = 0, w_c = \frac{z}{h} \alpha \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} \quad (2)$$

式(2)は、コア材部の z 方向の変位 w_c は、式(1)の座屈変位に対して、表面から h の深さまで線形的に減少することを仮定するものである。

なお、表面材の座屈波形について、 z 方向の変位が 0 となる辺を単純支持境界のリブとみなすことができる。実際に設置されるリブとの関連については、2.5、2.6 において説明される。

2.1.2 表面材の増分曲げひずみエネルギー: U_{2b}

増分ひずみ $(\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy})$ と増分変位 (u, v, w) の関係および合応力 (m_x, m_y, m_{xy}) を用いて、表面材の増分曲げひずみエネルギー U_{2b} は、次式として表わせる¹⁵⁾。ここに、 U の後の添字 2 は、増分変位 (u, v, w) に関する次数を表わす。

$$U_{2b} = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a (m_x \kappa_x + m_y \kappa_y + 2m_{xy} \kappa_{xy}) dx dy \quad (3)$$

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \kappa_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (4)$$

$$m_x = D(\kappa_x + \nu \kappa_y), m_y = D(\kappa_y + \nu \kappa_x), \quad (5)$$

$$m_{xy} = D(1 - \nu) \kappa_{xy}$$

ここに、表面材の曲げ剛性 $D = Et^3 / \{12(1 - \nu^2)\}$ 、 E は表面材のヤング係数、 ν は表面材のポアソン比である。

式(1)、式(2)及び式(4)、式(5)を式(3)に代入して U_{2b} を計算すれば、次式が得られる。

$$U_{2b} = \alpha^2 \cdot \frac{D\pi^4}{8ab} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)^2 \quad (6)$$

2.1.3 表面材の線形化された増分面内ひずみエネルギー

$$- : V_{2m}$$

表面材の線形化された増分面内ひずみエネルギー V_{2m} は、増分面内ひずみ $(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy})$ の非線形項

($\varepsilon_x^{dd}, \varepsilon_y^{dd}, \varepsilon_{xy}^{dd}$) 及び増分面内合応力 (n_x, n_y, n_{xy}) の非線形項 ($n_x^{dd}, n_y^{dd}, n_{xy}^{dd}$) と、座屈前平衡状態のひずみ ($\varepsilon_x^F, \varepsilon_y^F, \varepsilon_{xy}^F$) や応力 (n_x^F, n_y^F, n_{xy}^F) を用いて次式として書ける¹⁵⁾。ここに、表記 (dd) は増分変位 (u, v, w) に関する 2 次の非線形項を表わす。また、 V の後の添字 2 は、増分変位 (u, v, w) に関する次数を表わす。

$$V_{2m} = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a (n_x^F \varepsilon_x^{dd} + n_y^F \varepsilon_y^{dd} + 2n_{xy}^F \varepsilon_{xy}^{dd} + n_x^{dd} \varepsilon_x^F + n_y^{dd} \varepsilon_y^F + 2n_{xy}^{dd} \varepsilon_{xy}^F) dx dy \quad (7)$$

本問題では、座屈前の平衡状態は次式としておける。

$$n_x^F = -\sigma t, \quad n_y^F = 0, \quad n_{xy}^F = 0 \quad (8)$$

$$\varepsilon_x^{dd} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad \text{及び式(1) を用いて } V_{2m} \text{ を計算すれば、次式が得られる。}$$

$$V_{2m} = -\alpha^2 \frac{bt \pi^2}{8a} \cdot \sigma \quad (9)$$

2.1.4 コア材の増分ひずみエネルギー

表面材の座屈変形に抵抗するコア材の剛性を、座屈前の表面材に垂直な等価ばね c で表わすことにする(図1)。このとき、表面材の座屈変位によって、コア材に蓄積する増分ひずみエネルギーは、式(1)を用いて次式として表わされる。

$$U_{2c} = \frac{1}{2} \int_0^b \int_0^a c w^2 dx dy \quad (10)$$

$$= \alpha^2 \frac{ab}{8} c$$

一方で、 U_{2c} はコアの z 方向の垂直ひずみエネルギー成分 U_{2a} とコアのせん断ひずみエネルギー成分 U_{2s} の和で表現できる。

$$U_{2c} \equiv U_{2a} + U_{2s} \quad (11)$$

各エネルギー項は以下のように表わされる。

$$U_{2a} = \frac{1}{2} \int_0^h \int_0^b \int_0^a E_c (\varepsilon_z^c)^2 dx dy dz \quad (12)$$

$$U_{2s} = \frac{1}{2} \int_0^h \int_0^b \int_0^a 4G_c \left\{ (\varepsilon_{xz}^c)^2 + (\varepsilon_{yz}^c)^2 \right\} dx dy dz \quad (13)$$

ここに、 E_c はコアのヤング係数、 G_c はコアのせん断弾性係数である。また、コアのひずみは、

$$\varepsilon_z^c = \frac{\partial w_c}{\partial z}, \quad \varepsilon_{xz}^c = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right), \quad \varepsilon_{yz}^c = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) \quad (14)$$

である。

式(1),式(2),式(14)から式(12),式(13)を計算し、それらと式(10)を式(11)へ代入して、 c について整理する。等価ば

ね定数 c は次式で表わされる。

$$c = \frac{E_c}{h} + \frac{G_c h \pi^2}{3ab} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \quad (15)$$

式(15)について最小条件 $dc/dh = 0$ をとれば、 h が次式で与えられる。

$$h = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{3E_c}{G_c}} \cdot \frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (16)$$

2.1.5 TPE の停留原理

2.1 では独立型の座屈モードを考えているので、サンドイッチ版の TPE は、サンドイッチ版の中立軸に対して半分のみを考える。得られたひずみエネルギー式(6)、式(9)、式(10)を用いて、サンドイッチ版の TPE は、次式で表わされる。

$$\Pi \equiv U_{2b} + V_{2m} + U_{2c} \quad (17)$$

Π の α に関する停留条件は以下のように整理できる。

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} = \alpha \frac{ab}{4} \cdot \left[\frac{\pi^2}{a^2} \left\{ \frac{D\pi^2}{b^2} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)^2 - \sigma t \right\} + c \right] = 0 \quad (18)$$

式(18)において、座屈時には $\alpha \neq 0$ であり、そのときの停留条件を満たすためには、 $[]$ 内が 0 とならなければならない。 $[] = 0$ を解いて、表面材の局部座屈応力は次式として表される。

$$\sigma_c = \frac{D\pi^2}{t b^2} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)^2 + \frac{a^2}{t \pi^2} \cdot c \quad (19)$$

式(15)を式(19)に代入すれば、局部座屈応力は、 a, b の関数として次式として求められる。

$$\sigma_c = \frac{D\pi^2}{t b^2} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)^2 + \frac{2\sqrt{3}}{3\pi} \cdot \frac{\sqrt{E_c G_c}}{t} \cdot \frac{a}{b} \sqrt{a^2 + b^2} \quad (20)$$

なお、式(20)は、コア厚 h_c とは無関係な式である。

2.2 片側の表面材が先行して局部座屈する場合の座屈応力

図 3(b)のように、例えば面外曲げ荷重などで圧縮側表面材で座屈が先行する場合を考える。 h の適用範囲が $h > h_c$ となる場合では、 U_{2a} と U_{2s} の z に関する積分区間を $0 \sim h_c$ とおくことで、局部座屈応力を次式として求めることができる。

$$\sigma_c = \frac{D\pi^2}{t b^2} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)^2 + \left\{ \frac{E_c a^2}{h_c t \pi^2} + \frac{G_c h_c}{3t} \cdot \frac{a}{b} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \right\} \quad (21)$$

2.3 コア厚が小さく対称型座屈モードをとる場合の座屈応力

図 3(c)のように、両方の表面材が座屈して対称型座屈

モードをとり、コア厚が小さい場合 ($h > h_c/2$ のとき) には、式(21)の h_c を $h_c/2$ に置き換えれば、このような場合の局部座屈応力式は、次式として求められる。

$$\sigma_c = \frac{D\pi^2}{t b^2} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)^2 + \left\{ \frac{2E_c}{h_c t} \frac{a^2}{\pi^2} + \frac{G_c h_c}{6t} \frac{a}{b} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \right\} \quad (22)$$

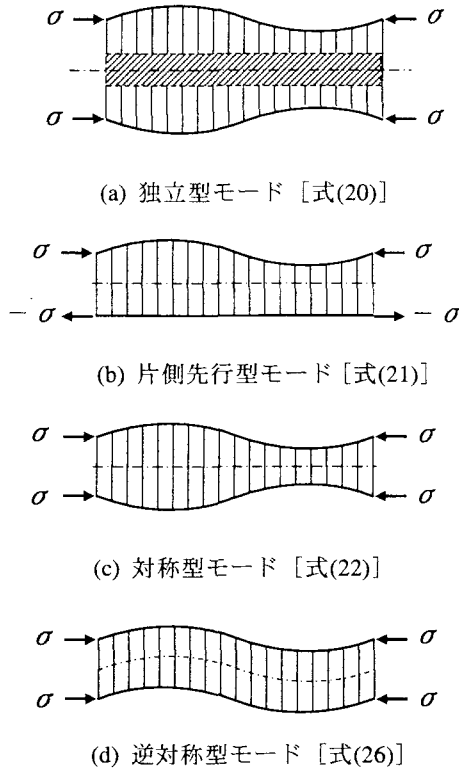


図3 サンドイッチ版の局部座屈モード

2.4 コア厚が小さく逆対称型座屈モードをとる場合の座屈応力

コア厚が小さく $h > h_c/2$ となる場合で、図3(d)のような逆対称型(せん断型)座屈モードの場合を考える。表面材及びコア材のひずみエネルギーからTPEを求め、停留原理から局部座屈応力式を導く。

2.4.1 表面材のひずみエネルギー

表面材の増分曲げひずみエネルギー U_{2b} は、式(6)で表わせる。また、表面材の線形化された増分面内ひずみエネルギー V_{2m} は、式(9)で表わされる。

2.4.2 コア材のひずみエネルギー

せん断型座屈モードを考えているので、コア部の座屈増分変位は式(1)で表わされると仮定する。コア材のひずみエネルギーについてもせん断ひずみ成分のみを考えることとすれば、式(13)は以下のように求められる。

$$U_{2s} = \alpha^2 \frac{G_c h_c \pi^2}{8} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \quad (23)$$

2.4.3 TPEの停留原理

表面材が逆対称型に座屈するサンドイッチ版を考えているので、サンドイッチ版全体のTPEを考えなくてはならない。TPEは次式で表わされる。

$$\Pi = 2 U_{2b} + 2 V_{2m} + U_{2s} \quad (24)$$

式(7), (9), (22)を式(23)に代入して整理すれば、TPEの停留原理から次式が成り立つ。

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \alpha} = \alpha \frac{b \pi^2}{4a} \left\{ \frac{2D\pi^2}{b^2} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)^2 + G_c h_c \frac{a}{b} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) - 2\sigma t \right\} = 0 \quad (25)$$

式(25)において、座屈時には $\alpha \neq 0$ であり、そのとき停留条件を満たすためには、[]内が0とならなければならない。[] = 0を解いて、コア厚が小さく逆対称型座屈モードをとる場合の座屈応力式は、次式で表わされる。

$$\sigma_c = \frac{D\pi^2}{t b^2} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)^2 + \frac{G_c h_c}{2t} \frac{a}{b} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) \quad (26)$$

以上2.1~2.4まで、 x 方向及び y 方向の座屈半波長 a , b を変数とした4種類の局部座屈応力式、式(20), 式(21), 式(22)及び式(26)が得られた。各式において、第1項は、座屈半波長 a , b で四辺単純支持されたコアの無い状態での矩形板の座屈応力であり、第2項は格子状リブ及びコア材によって付加された座屈補剛応力成分である。

2.5 縦リブの間隔と局部座屈応力

式(20), 式(21), 式(22)及び式(26)の $\partial \sigma_c / \partial b$ を計算すると、 $a > 0$, $b > 0$ のとき、 $\partial \sigma_c / \partial b < 0$ であることがわかる。すなわち、 σ_c は b に関して減少関数であり、縦リブの間隔 b を大きくすると、局部座屈応力 σ_c が減少することがわかる。従って、通常 b に設計上の縦リブ間隔 (b の最大値) をとれば、安全側の座屈耐力が得られることになる。

2.6 局部座屈応力の最小値

b を設計上の縦リブ間隔などを用いたとき、式(20), 式(21), 式(22)及び式(26)の極小条件 $\partial \sigma_c / \partial a = 0$ を満たす a を求める。

式(20)については、停留条件は a の10次方程式となる。陽な形で解を求めることは難しく、Newton-Raphson法などの数値解析手法を用いて求める。

式(21)については、停留条件は a の4次方程式となり、次式として求められる。

$$a = \pi b \cdot \sqrt[4]{\frac{3Dh_c}{3Dh_c\pi^4 + 3E_c b^4 + G_c h_c^2 \pi^2 b^2}} \quad (27)$$

式(22)については、式(27)の h_c を $h_c/2$ に置き換えればよく、次式として求められる。

$$a = \pi b \cdot \sqrt[4]{\frac{6Dh_c}{6Dh_c\pi^4 + 12E_c b^4 + G_c h_c^2 \pi^2 b^2}} \quad (28)$$

式(26) についても a の 4 次方程式を解いて、次式として求められる。

$$a = b \cdot \sqrt[4]{1 + \frac{G_c h_c b^2}{2D\pi^2}} \quad (29)$$

得られた各 a を、それぞれ式(20)、式(21)、式(22)及び式(26)に代入すれば、 σ_c の最小値が得られる。

2.7 h の性質

2.7.1 コア厚 h_c と座屈モードの関係

式(16)の h の性質をみるため、 h の a に関する微係数を調べる。 $a, b > 0$ のとき

$$\frac{\partial h}{\partial a} > 0, \quad \frac{\partial^2 h}{\partial a^2} < 0 \quad (30)$$

であることがわかる。従って、 h は a についての上に凸の単調増加関数である。さらに、 h は $a \rightarrow +\infty$ についての極限を持ち、次式で表わされる。

$$h = \lim_{a \rightarrow +\infty} h(a, b) = \frac{b}{\pi} \sqrt{\frac{3E_c}{G_c}} \quad (31)$$

式(31)は、 a を変数とした式(16)の漸近線である。

さらに、コア厚 h_c と座屈モードの関係について考察する。本論文では、サンドイッチ版が面内に一様圧縮力を受ける場合、 $h_c > 2h$ のとき独立型座屈モード、 $h_c < 2h$ のとき対称型又は逆対称型の座屈モードをとるものとして理論を展開した。したがって、 $a > 0$ のすべての範囲で、対称型の座屈モード（式(20)）が支配的となるコア厚の最小値は、式(31)を用いて次式として与えられる。

$$h_c = \frac{2b}{\pi} \sqrt{\frac{3E_c}{G_c}} \quad (32)$$

2.7.2 a, b と h の関係

式(30)の関係と、 a, b の対称性から、 $a > 0$ のとき $\partial h / \partial b > 0$ である。すなわち、 $a, b > 0$ のとき h は単調増加関数である。従って、コア材の座屈補剛効果の度合いを示す h は、座屈半波長 a またはリブ間隔 b が広がれば大きくなり、狭まれば小さくなるがわかる。

3. 局部座屈理論の計算例

3.1 計算の条件

具体的な計算例として、材料定数を文献 3) の実験で用

いた表 1 の値とし、表面材の板厚 $t=4\text{mm}$ 、縦リブ間隔 $b_0=440\text{mm}$, 220mm 、コア厚 $h_c=50\text{ mm}$, 100 mm , 200 mm , 400 mm として、式(20)、式(22)及び式(26)を用いて局部座屈応力と座屈半波長の関係（以下、座屈応力曲線）を求めることとする。

3.2 コア厚 h_c と座屈応力曲線（座屈モード）の関係

予備計算として、コア厚や座屈モードについて考察する。縦リブ間隔を $b_0=110\text{mm}$, 220mm , 440mm , 880mm としたとき、式(16)の 2 倍 ($2h$) と座屈半波長 a の関係を図 4 に示す。図 4 より、 $2h$ と a の関係は、上に凸の単調増加曲線として表わされる。 a に係わらず独立型の座屈モードが支配的となるときの最小コア厚は式(32)で計算され、縦リブ間隔 $b_0=110\text{mm}$ のとき 172mm 、 $b_0=220\text{mm}$ のとき 343mm である。 $b_0=110\text{mm}$, 220mm の曲線は、 a の増加とともにこれらの計算値に漸近していくことがわかる。

図 4 で、現在考えているコア厚 $h_c=50\text{ mm}$, 100 mm , 200 mm , 400 mm を水平な直線で示した。その直線と $2h$ と a の関係を示した曲線（実線）との交点が、独立型座屈モードから対称型又は逆対称型モードへスイッチングする点である。交点の左側の座屈半波長では、式(20)が適用され、右側では、式(22)又は式(26)が適用される。交点が存在しない場合（例えば、コア厚 400 mm のときでは、 $b_0=110\text{mm}$ 及び 220mm の曲線）では、全ての座屈半波長で独立型座屈モードが支配的となることを意味する。

安全側の座屈応力曲線は、座屈応力の低い側の曲線を包絡して描かれる。

3.3 独立型及び対称型座屈モードの座屈応力曲線

式(20)と式(22)を合成した座屈応力曲線を図 5、図 6 に示す。図 5 は $b_0=440\text{mm}$ のときであり、図 6 は $b_0=220\text{mm}$ のときである。太い実線は式(20)、破線は式(22)を示す。式がスイッチングする点は○印で示した。 $b_0=220\text{mm}$ で、 $h_c=400\text{ mm}$ の場合には、独立型の座屈応力曲線で全曲線が表わされる（図 6）。

対称型座屈モードの座屈応力曲線の特徴は、コア厚が大きくなるほど座屈応力の低い値をとることと、コア厚に係わらず、独立型モードの座屈応力曲線が最低の座屈応力を与えることである。

座屈応力曲線の形状は下に凸であり、座屈半波長が極小点を超えると、座屈応力が逆に増加する。これはサンドイッチ版の注目すべき特徴で、座屈半波長が大きくなるに従って、コア材の座屈補剛効果が増加するためである。

また、材料実験などで得られた表面材の圧縮強度（表 1）と比較すると、最小座屈応力（極小点）は、圧縮強度の半分以下であることがわかる。（ $h_c=100\text{mm}$ の場合の最小座屈応力は、 $b_0=440\text{mm}$ では 92.8MPa 、 $b_0=220\text{mm}$ では 109.1MPa である）

3.4 独立型及び逆対称型座屈モードの座屈応力曲線

式 (20) と式 (26) を合成した座屈応力曲線を図 7, 図 8 に示す. 図 7 は $b_0=440\text{mm}$ のときであり, 図 8 は $b_0=220\text{mm}$ のときである. 太い実線は式 (20), 細い実線は式 (26) を示しており, 各コア厚について, 座屈応力の低い曲線で包絡したものである. $h_c=400\text{mm}$ の場合には, a の全ての範囲で, 式 (20) の曲線が式 (26) の曲線よりも低く表わされる.

逆対称型座屈モードの座屈応力曲線の特徴は, コア厚が小さくなるほど座屈応力が低い値をとることである. 従って, コア厚には座屈モードに左右されない最適なコア厚があると推定できる.

座屈応力曲線の形状は下に凸であり, 逆対称型 (せん断型) モードの場合にも, 座屈半波長が極大点を越えてからのコア材の座屈補剛効果を確認することができる.

また, 表面材の圧縮強度 (表 1) と比較すると, 最小

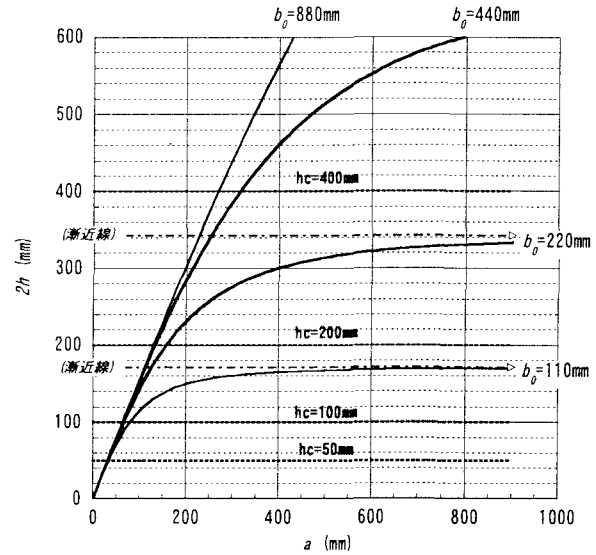


図 4 $2h$ と a の関係

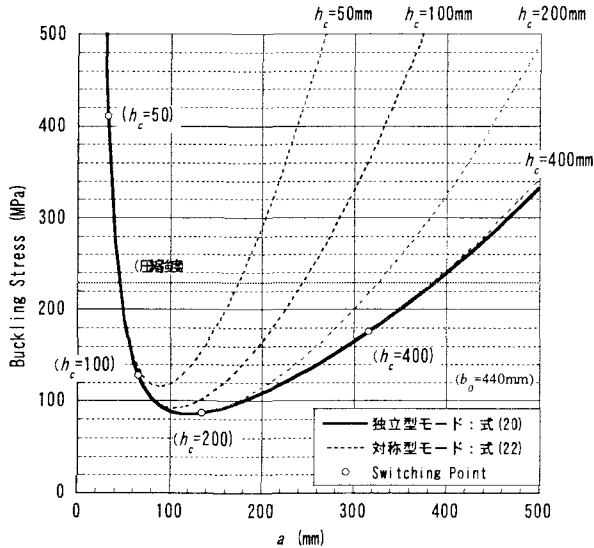


図 5 独立型及び対称型座屈モードの座屈応力と座屈半波長の関係 ($b_0=440\text{mm}$)

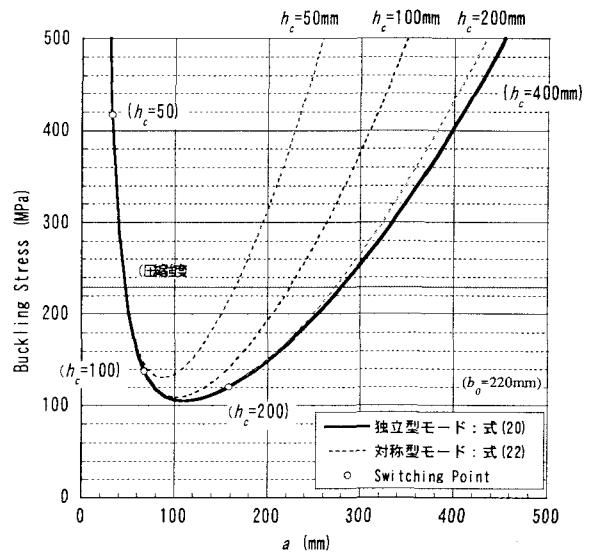


図 6 独立型及び対称型座屈モードの座屈応力と座屈半波長の関係 ($b_0=220\text{mm}$)

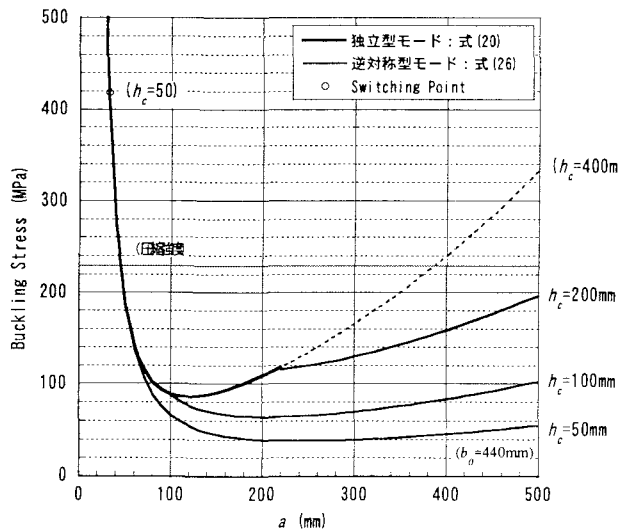


図 7 独立型及び逆対称型座屈モードの座屈応力と座屈半波長の関係 ($b_0=440\text{mm}$)

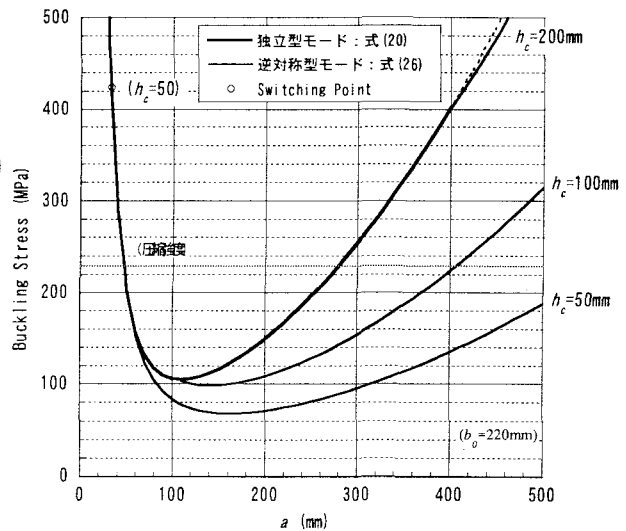


図 8 独立型及び逆対称型座屈モードの座屈応力と座屈半波長の関係 ($b_0=220\text{mm}$)

座屈応力（極小点）は、圧縮強度の半分以下であることがわかる。（ $h_c=100\text{mm}$ の場合の最小座屈応力は、 $b_0=440\text{mm}$ では 64.5MPa 、 $b_0=220\text{mm}$ では 98.8MPa である）

表 1 材料定数（弾性係数及び材料強度の単位：MPa）

	ヤング 係数	せん断 弾性係数	ポアソン 比	引張 強度	圧縮 強度
	E	G	ν	σ_B^T	σ_B^C
表面材 ^{*1}	30300	5390	0.13	300	230
コア材 ^{*2}	6.6	3.3	0.01	0.2	—

*1: CFRP（[体積比] 炭素繊維:ガラス繊維:ポリマー=10:40:50）

*2: フェノール発泡体コア材

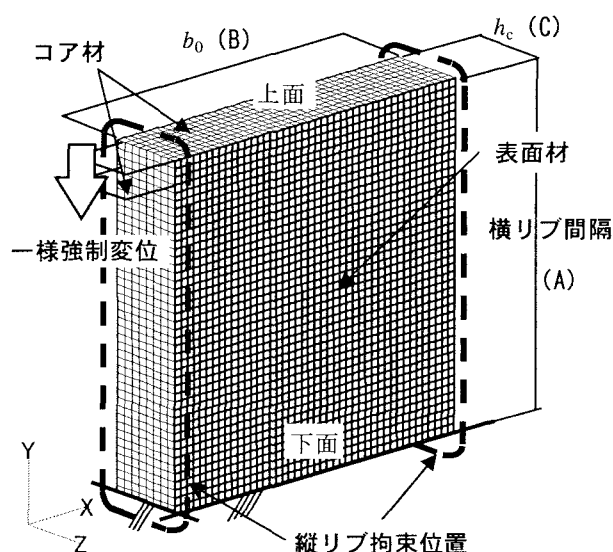


図 9 有限要素モデルの概要図

4. 有限要素解析と局部座屈理論の比較

有限要素法による線形座屈固有値解析を行い、本論文の座屈応力の理論曲線と比較する。

4.1 有限要素解析モデル

格子状リブを有するサンドイッチ版を有限要素法でモデル化する。図 9 に有限要素モデルの概要図を示す。

表面材は、面外曲げ剛性を考慮した Plate 要素（板厚 $t=4\text{mm}$ ）、コアは並進自由度のみを持つ 8 節点 Solid 要素を使用した。表面材とコアの境界節点は全てを共有させた。直交座標 x, y, z を図のように定義した。拘束条件は、上面（載荷面）については、並進 x, z 成分及び回転全成分を拘束し、下面については、並進全成分及び回転全成分を拘束した。側面はリブを表現するものとして、同箇所位置する Plate 要素と Solid 要素の節点は並進 x, z 成分のみを拘束した。圧縮荷重は、上面節点の y 方向変位を一様とする強制変位荷重とした。表面材及びコア材の材料定数は、表 1 の値を用いた。

線形座屈固有値解析（以下、FEM 解析）は、汎用有限

要素解析プログラム MSC/NASTRAN V70 を使用した。座屈固有値の計算法は、Lanczos 法を用いた。

本解析のパラメータは、縦リブ間隔 (B) を $b_0=440\text{mm}$ 及び 220mm とし、コア厚 (C) を $h_c=100\text{mm}$ 及び 400mm とした。また、その他のパラメータとして、表面材の x 方向、 y 方向についての要素分割数、コアの厚さ方向 (z 方向) の要素分割数、横リブの間隔 (A) について行った。

4.2 解析結果と考察

4.2.1 座屈半波長の定義

座屈半波長は、座屈モード図を参照して、解析後の表面材の形状が、解析前の表面材の形状を横切る位置を座屈波形の節とみなし、隣り合う節と節の間を座屈半波長として定義した。高次座屈モードなどで、座屈波形が不整形なものは、最大の振幅を有する座屈波形の座屈半波長で求めた。

4.2.2 局部座屈理論と FEM 解析の比較

図 10～図 13 に、本論文の局部座屈理論による座屈応力曲線と FEM 解析の結果をプロットした図を示す。理論曲線を実線で示した。太い実線は $h_c=400\text{mm}$ 、細い実線は $h_c=100\text{mm}$ の場合である。また、図中の点は FEM 解析の結果を表わしている。図中、理論曲線と FEM 解析結果を示す点の間に引いた線は、座屈応力の両者の差を示している。ここで、FEM 解析の凡例について説明する。例えば「FEM_F440×220×100 (8)」では、はじめの文字「F」は表面材のメッシュを $5\text{mm} \times 5\text{mm}$ を単位として分割したことを表わしている。「F」の表記のないものは、 $10\text{mm} \times 10\text{mm}$ を単位とした分割である。「440」は横リブ間隔 $A=440\text{mm}$ 、「220」は縦リブ間隔 $B=220\text{mm}$ 、「100」はコア厚 $C=100\text{mm}$ を表わし、「(8)」は、コアの厚さ方向の要素分割数を表わしている。

FEM 解析の結果は、座屈固有値の低いものから順に、対称型モード、逆対称型モードの各 2 個をプロットした。

図 10、図 11 は、縦リブの間隔を $b_0=440\text{mm}$ とした場合の理論座屈応力曲線と FEM 解析の結果を示した図である。図 10 は対称型の座屈モードについて、図 11 は逆対称型の座屈モードについて示した。理論曲線と FEM 解析の結果は、対称型モード、逆対称型モードともよく一致しているといえる。コア厚が小さい場合は FEM の結果と理論解はかなり合致する。コア厚が大きい場合には、FEM 解析の結果の方が理論座屈応力曲線よりも若干小さい値を与える。これは、局部座屈理論を展開する際に用いた式(2)の仮定が、コア厚が大きくなるに従って FEM と合わなくなるためと考えられる。

図 12、図 13 は、縦リブの間隔を $b_0=220\text{mm}$ とした場合の理論座屈応力曲線と FEM 解析の結果を示した図である。図 12 は対称型の座屈モードについて、図 13 は逆対称型の座屈モードについて示した。横リブの間隔を

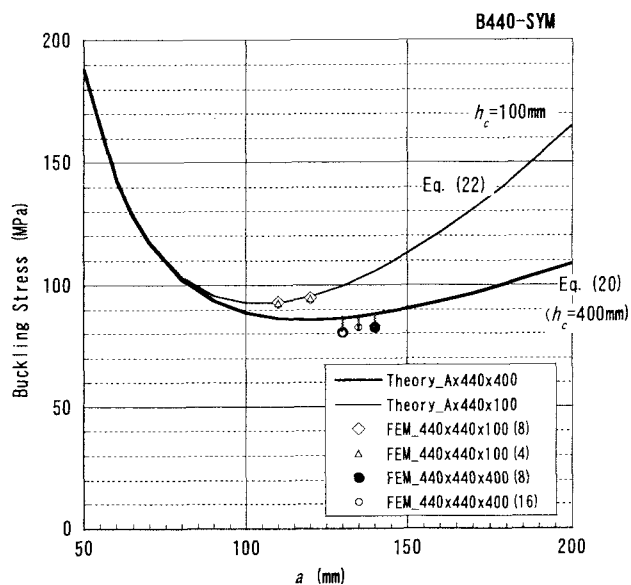


図 10 独立型及び対称型座屈モードの座屈応力曲線と FEM の結果 ($b_0=440\text{mm}$)

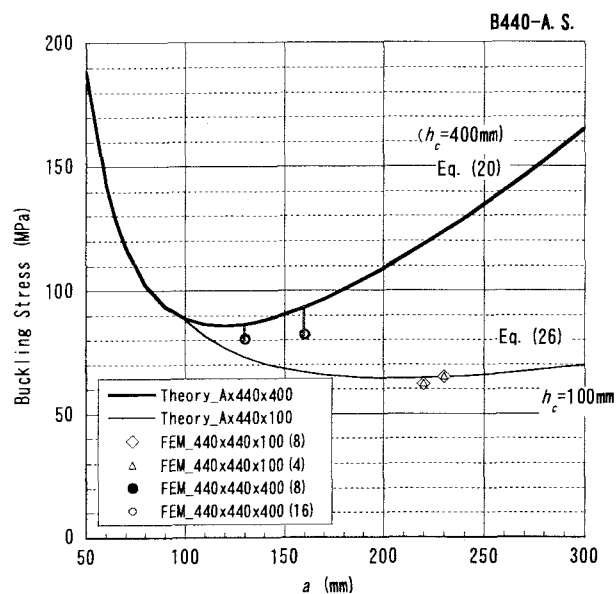


図 11 独立型及び逆対称型座屈モードの座屈応力曲線と FEM の結果 ($b_0=440\text{mm}$)

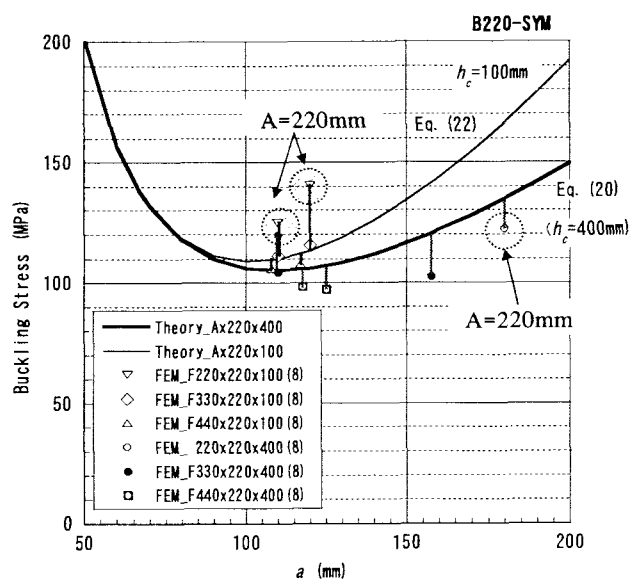


図 12 独立型及び対称型座屈モードの座屈応力曲線と FEM の結果 ($b_0=220\text{mm}$)

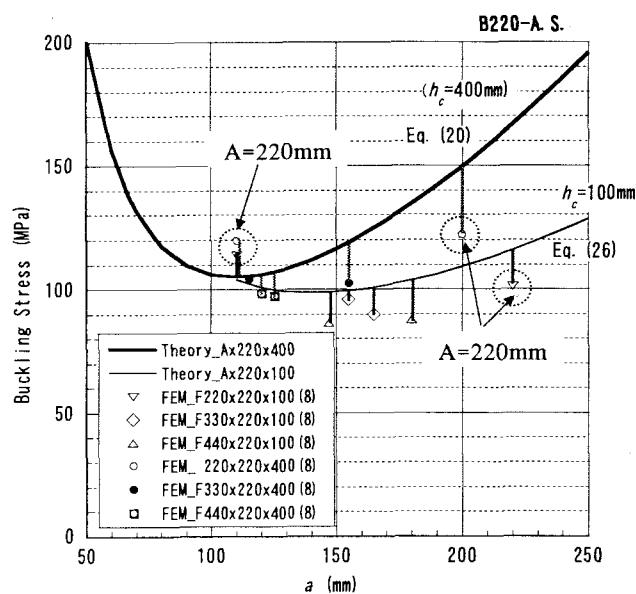


図 13 独立型及び逆対称型座屈モードの座屈応力曲線と FEM の結果 ($b_0=220\text{mm}$)

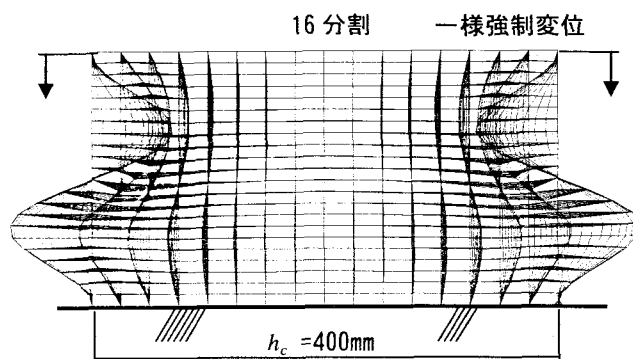
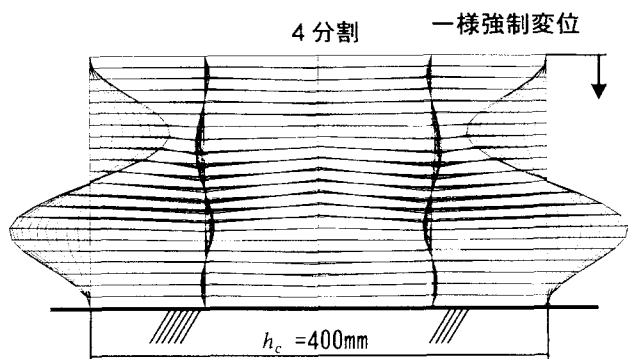


図 14 コア厚方向の要素分割と対称型座屈モード ($h_c=400\text{mm}$, 横リブ間隔 220mm)

220mmとした場合には、FEM解析の結果は、かなり近い座屈固有値で異なる座屈モードが観察され、本論文で導いた理論曲線には乗らなかった。一方、 $A=330\text{mm}$ 及び 440mm の場合には、理論曲線とFEM解析の結果は、対称型モード、逆対称型モードともほぼ近いといえることができる。しかし、コア厚が小さい場合においても、縦リブの間隔が小さく逆対称型の座屈モードをとる場合では、理論曲線との差が生じ、FEM解析の結果の方が低めの座屈応力を与えることが分かった。

4.2.3 コア厚方向のメッシュ分割とコア内部の変形

図14にコアを一緒に描いた座屈モード図を示す。図10～図13で明らかのように、表面材の座屈変形から判断したFEM解析の結果は、コア厚方向の要素分割数にほとんど影響しないことがわかった。しかし、図14をみると、コア自身の座屈変形は、コア厚方向の要素分割数に大きく影響することがわかる。また、式(2)で想定した座屈変形とも異なっていることがわかる。

本論文で用いた材料定数は、コア材の弾性係数が表面材のそれよりも3～4桁も小さい材料としたが、コア材の弾性係数が大きくなる場合などでは、コア厚方向の要素分割数は、FEM解析の結果に影響するものと考えられる。

5. 結論

格子状リブを有するサンドイッチ版について、局部座屈のモードを分類し、Total Potential Energyの停留原理から局部座屈応力の理論式を導いた。同式からリブ及びコア材の座屈補剛応力成分を明らかにした。

具体的な数値例を用いて理論計算を行い、局部座屈応力と座屈半波長は下に凸の曲線となること、対称型座屈モードではコア厚が大きくなるほど座屈応力が低下すること、逆対称型座屈モードではコア厚が小さくなるほど座屈応力が低下することなどのサンドイッチ版の特徴を示した。

本論文で得られた理論曲線と有限要素法による線形座屈固有値解析の結果と比較した。座屈モード、局部座屈応力と座屈半波長の関係は、有限要素解析モデルの横リブの間隔が縦リブの間隔と同程度であれば、有限要素解析の結果と理論解はよく一致することが示された。特にコア厚が小さい場合にはよく一致した。ただし、コア厚が小さい場合でも、縦リブの間隔が小さく、逆対称モードをとる場合では、有限要素解析の結果の方が低めの座屈応力を与えることがわかった。

本理論式は、サンドイッチ版構造の局部座屈設計に際して、格子状リブの座屈補剛効果を考慮したパラメトリックなスタディーを可能とするものである。また、有限

要素法を用いる上でも、解析前のモデル化における条件設定、解析後の結果の妥当性の検討など有用な情報を与えるものとする。

参考文献

- 1) Advanced Materials, Structural Engineering International, IABSE, Vol.12, No.2, 2002
- 2) 立石寧俊, 杉崎健一, 藤崎忠志, 兼光知巳, 米丸啓介, 近藤敏行: CFRP サンドイッチ版屋根の開発, 日本建築学会技術報告集, 第14号, pp.133-138, 2001.12
- 3) 立石寧俊, 山田聖志: 格子状リブを有するCFRP サンドイッチ版の局部座屈に関する研究, 日本建築学会構造系論文集, 第573号, pp.119-127, 2003.11
- 4) 金原勲: 講座 FRP 構造の力学 (その5) 重ねはり・サンドイッチはり, 強化プラスチック, Vol.19, No.11, 1973
- 5) 金原勲: 講座 FRP 構造の力学 (その10) 柱及び平板の座屈, 強化プラスチック, Vol.20, No.9, 1974
- 6) 林毅編: 複合材料工学, 日科技連, 1971
- 7) N. J. Hoff and S. E. Mautner: The Buckling of Sandwich-Type Panels, Journal of the Institute of Aeronautical Sciences, Vol.12, No.3, pp.285-297, July 1945
- 8) S. Yusuff: "Theory of Wrinkling in Sandwich Construction", Jour. of the Royal Aeronautical Society, Vol.59, January, 1955, pp.30-36
- 9) 能町純雄: 弾性基礎にある四辺, 四隅自由な矩形板の曲げについて, 土木学会論文報告集, 第32号, pp.26-32, 1956
- 10) 原口忠次郎: 弾性基礎上の矩形板, 山海堂, 1964
- 11) 北村泰寿, 桜井春輔: 弾性基礎上の4辺自由板の級数解, 土木学会誌, Vol.6, pp.61-66, 1979.3
- 12) Walter K. Vonach, Franz G. Rammerstorfer: A General approach to the wrinkling instability of sandwich plates, Structural Engineering and Mechanics, Vol. 12, No.4, pp. 363-376, 2001
- 13) W. T. Koiter: On the Stability of Elastic Equilibrium, Ph D Dissertation, delft, Holland, 1945, English Translation, NASA TT-F-10833, 1967
- 14) Yamada, S and Croll, J.G.A.: Contributions to understanding the behavior of axially compressed cylinders, Journal of Applied Mechanics, ASME, Vol.66, pp.299-309, 1999
- 15) 日本機械学会編: シェルの振動と座屈ハンドブック, pp.29-37, 2003.1

(2004年9月17日受付)